Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
03. 11. 04
Blatt 4

Übungen zur Mengenlehre I

13. Induktion für fundierte Relationen:

Seien A und R Klassen, $\varphi(x, \overrightarrow{w})$ eine $\in$-Formel und R sei fundiert auf A. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\forall x \in A\ (\forall y(yRx \rightarrow \varphi(y, \overrightarrow{w})) \rightarrow \varphi(x, \overrightarrow{w})) \rightarrow \forall x \in A\ \varphi(x, \overrightarrow{w}).$$

14. Rekursion für stark fundierte Relationen:

Seien A, R und G Klassen, sei R stark fundiert auf A und $G : V \rightarrow V$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Klasse $F : A \rightarrow V$ gibt, die $\forall x \in A\ F(x) = G(\{(z, F(z)) \mid zRx\})$ erfüllt.

(b) Sei nun R auch extensional. Geben Sie eine Rekursionsbedingung $G : V \rightarrow V$ an, so dass die Lösung F der Rekursion die Transitivierung von R ist.

15. (a) Zeigen Sie, dass die $\in$-Relation eingeschränkt auf eine transitive Klasse extensional ist.

(b) Zeigen Sie, dass partielle Ordnungen, lineare Ordnungen und strikt lineare Ordnungen extensional sind.

(c) Geben Sie eine starke Wohlordnung von $On \times On$ an. (Beweis!)

16. Es gelte **ZFC** − (**Fund**).

(a) Wie muss man dann On definieren, so dass weiterhin Induktion und Rekursion möglich sind?

(b) Folgern Sie aus $V = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in On\}$ das Fundierungsschema.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 10. 11. 04 in der Vorlesung

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MengenlehreI.html