Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
05. 01. 05
Blatt 11

Übungen zur Mengenlehre I

41. Zeigen Sie: Ist A unendlich, so ist in dem in der Vorlesung konstruierten Modell von $\mathbf{ZF}_A$ die Menge A eine unendliche Menge, die nicht Dedekind-unendlich (vgl. Aufgabe 20) ist.

42. Zeigen Sie: Ist A unendlich, so existiert in dem in der Vorlesung konstruierten Modell von $\mathbf{ZF}_A$ ein Vektorraum V, der keine Basis hat.
Hinweis: Betrachten Sie A^2, und setzen Sie $-(a,u) = (u,a)$ für $(a,u) \in A^2$. Dann ist $V = \{x \in (A^2)^{<\omega} \mid$ es kommen nicht sowohl (u,a) als auch (a,u) in x vor$\}$ mit einer geeigneten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_3$.

43. Sei $X \in V$. Eine Menge $a \subseteq X$ heißt definierbar über X, falls es eine Formel $\varphi(x, \overrightarrow{z}) \in \mathrm{Fml}(L(\in))$ und $\overrightarrow{a} \in X$ gibt, so dass

$$a = \{b \in X \mid (x, \in\restriction X) \models \varphi[b, \overrightarrow{a}]\}$$

ist. Sei $\mathrm{Def}(X)$ die Menge aller über X definierbaren Mengen. Definiere rekursiv $\langle L_\alpha \mid \alpha \in On\rangle$ durch $L_0 = \emptyset$, $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$ und $L_\lambda = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für $\lambda \in Lim$.
Zeigen Sie:
(a) $L_\gamma \subseteq L_\alpha$ für alle $\gamma \leq \alpha$
(b) $L_\gamma \in L_\alpha$ für alle $\gamma < \alpha$
(c) L_α ist transitiv
(d) $On \cap L_\alpha = \alpha$.

44. Sei $L = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha \in On\}$. Zeigen Sie, dass L ein inneres Modell von $\mathbf{ZF}$ ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 12. 01. 05 in der Vorlesung

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MengenlehreI.html