Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
05. 04. 05

Wiederholungsklausur zur Mathematik für Informatiker I a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:
Vorname: Übungsgruppe:
Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Vorkorrigierender:
Prüfer: Note:

Bei Rechnungen soll der Rechenweg ersichtlich sein. Viel Erfolg!

1. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wann heißt eine Abbildung $f : V \to V$ ein Endomorphismus? Wann heißt ein $\lambda \in K$ Eigenwert eines Endomorphismus $f : V \to V$?

2. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beweisen Sie: Das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn kein v_i $(1 \leq i \leq n)$ eine Linearkombination der übrigen Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ ist.

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten zwei Punkte für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

- ☐ Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(-\varphi) = \sin \varphi$.
- ☐ Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \mathrm{Bild} A$ ist.
- ☐ Ist $v_1 = (0, 1)$ und $v_2 = (1, 0)$, so ist $L(v_1) \cup L(v_2)$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Ist $(b_1, \ldots, b_n)$, $n > 1$, eine Basis des R^n und U ein eindimensionaler Unterraum des R^n, so gibt es ein b_i $(1 \leq i \leq n)$ mit $U = L(b_i)$.

Bitte wenden!

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie dazu die inverse Matrix A^{-1}.

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie von A alle Eigenwerte sowie Basen der dazugehörigen Eigenräume.

6. Sei $M = \{(1,2,3,4), (2,1,3,0), (1,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Sei $M^\perp$ das orthogonale Komplement von M in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $M^\perp$.

7. Sei $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $f \circ f$ injektiv ist.

8. Sei V ein K-Vektorraum und $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Definiere eine Abbildung

$$Spur : M(n \times n, K) \to K$$

$$(a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeigen Sie:
(a) $Spur : M(n \times n, K) \to K$ ist linear.
(b) Für alle $A, B \in M(n \times n, K)$ gilt $Spur(AB) = Spur(BA)$.
(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass es keine Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ mit $AB - BA = E_n$ gibt.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.