

Übungen zur Mathematik für Informatiker I a

22. Gegeben seien im \mathbb{R}^3 die zwei Vektoren $v_1 = (1, 1, 3)$ und $v_2 = (1, 3, -1)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(v_1) = (1, 0) \quad \text{und} \quad f(v_2) = (0, 1).$$

(b) Alle in (a) betrachteten Abbildungen nehmen an der Stelle $(1, 2, 1)$ den selben Wert an.

23. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $DM(f)$.

24. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ und $n = 2^k - 1$. Seien v_1, \dots, v_n die von Null verschiedenen Elemente von \mathbb{Z}_2^k und $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

(a) Zeigen Sie, daß f linear ist. Also ist $C = \text{Kern } f$ ein Unterraum des \mathbb{Z}_2^n . D.h. C ist ein linearer Code, der sog. Hamming-Code.

(b) Sei $x \in C$ und $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ die kanonische Basis von \mathbb{Z}_2^n . Sei $y = x + e_i$ für ein i , d.h. y der Vektor x mit einem (!) Fehler. Zeigen Sie, daß dann $f(y) = v_i$ ist. D.h. an $f(y)$ kann man ablesen, ob und an welcher Stelle im Vektor ein Fehler ist.

(c) Sei $k = 3$ und $n = 7$. Geben Sie eine Basis von C an. Für welches m werden also Bitfolgen $x \in \mathbb{Z}_2^m$ durch Elemente von C kodiert? Geben Sie eine mögliche Kodierung an, d.h. einen Isomorphismus $f : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow C$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 14. Dezember 2004, 9.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIA04.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.