Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
14. 02. 05

Klausur zur Mathematik für Informatiker I a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:

Vorname: Übungsgruppe:

Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Vorkorrigierender:

Prüfer: Note:

Bei Rechnungen soll der Rechenweg ersichtlich sein. Viel Erfolg!

1. Sei K ein Körper, und seien V und W K-Vektorräume. Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear? Wann heißt eine Teilmenge $U \subseteq V$ ein Unterraum von V?

2. Beweisen Sie folgende Variante des Basisergänzungssatzes, ohne diesen zu verwenden: Sei V ein K-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V$, so dass $L(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) = V$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig aber keine Basis ist. Dann gibt es ein i mit $1 \leq i \leq m$, so dass $(v_1, \ldots, v_n, w_i)$ linear unabhängig ist.

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten zwei Punkte für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Drehmatrix.

☐ $\frac{1+i}{i} = 1 - i \in \mathbb{C}$.

☐ Ist $v_1 = (0, 1)$ und $v_2 = (1, 0)$, so ist $L(v_1) \cup L(v_2) = \mathbb{R}^2$.

☐ $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Ring.

Bitte wenden!

4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Sei
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Man bestimme $\mathrm{DM}_B(f)$ für $B = (b_1, b_2, b_3)$.

6. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern} f$.

7. Sei $M \neq \emptyset$ und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ gilt.

8. Sei V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3). Seien $\lambda, \mu \in K$ und $f : V \to V$ der Endomorphismus, so dass
$$f(v_i) := \lambda v_i + \mu(v_1 + v_2 + v_3)$$
für $i = 1, 2, 3$ gilt.
(a) Bestimmen Sie, zu welchen Eigenwerten die Vektoren $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 - v_2$ und $v_2 - v_3$ Eigenvektoren sind.
(b) Ist f diagonalisierbar, wenn $K = \mathbb{R}$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort. Ist Ihre Begründung auch im Fall $K = \mathbb{Z}_3$ richtig?

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.