Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 04
03. 05. 04
Blatt 3

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

7. Sei $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra. Für $u, v \in B$ definiere $u \leq v$ durch $u \cdot (-v) = 0$. Beweisen Sie, daß $(B, \leq)$ dann ein Verband ist.

8. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 1$. Die Menge $\{0, 1\}^n$ wird durch $(x_1, \dots x_n) \cdot (y_1, \dots y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$, $(x_1, \dots x_n) + (y_1, \dots y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ und $\overline{(x_1, \dots x_n)} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ zu einer Booleschen Algebra.

(a) Sei $t = (t_1, \dots, t_n) \in \{0, 1\}^n$. Definiere eine Funktion $f^t : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ durch

$f^t(x_1, \dots x_n) = 1$, falls $t_1 = x_1, \dots, t_n = x_n$,

$f^t(x_1, \dots x_n) = 0$ sonst.

Zeigen Sie, daß sich f^t als Produkt von Faktoren der Form $x_1, \dots x_n, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ schreiben läßt.

(b) Zeigen Sie, daß sich jedes $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ als Summe von Funktionen wie in (a) schreiben lässt.

9. Sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Auf der Menge $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ sei durch $(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$ und $\alpha(v + U) = \alpha v + U$ eine Addition und eine Skalarmultiplikation eigeführt.

(a) Zeigen Sie, daß diese Definitionen unabhängig von der Wahl der "Repräsentanten" ist. D.h. ist $v + U = v' + U$ und $w + U = w' + U$, so gilt $(v + U) + (w + U) = (v' + U) + (w' + U)$ und $\alpha(v + U) = \alpha(v' + U)$.

(b) Zeigen Sie, daß V/U mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum mit Nullvektor $0 + U$ und $(-v) + U$ als additivem Inversen von $v + U$ ist.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 10. Mai 2004, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.