MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 21. Juni 2004
Abgabetermin: 28. Juni 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 9

Definitionen:

- Eine Menge A ist **transitiv**, Trans(A), falls gilt
  $\text{Trans}(A) \;:\Leftrightarrow\; \forall y \forall z\,(y \in A \wedge z \in y) \to z \in A.$
- Die **Vereinigung** einer Menge A ist $\bigcup A := \{y \mid \exists x\,(x \in A \wedge y \in x)\}$.
- Der **Durchschnitt** einer Menge A ist $\bigcap A := \{y \mid \forall x\,(x \in A \to y \in x)\}$.
- Eine Ordinalzahl ist ein **Limesordinalzahl**, wenn sie kein unmittelbarer Nachfolger einer Ordinalzahl ist.
- Eine Menge $X \subseteq \text{Ord}$ ist **unbeschränkt**, wenn gilt $\forall \beta \in X \exists \alpha \in X (\beta \in \alpha)$.

Aufgabe 33

(a) Formalisieren Sie den Begriff "Topologischer Raum" in der Sprache der Mengenlehre. (4 Punkte)

(b) Geben Sie alle Topologien auf $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ an. Dabei sind Topologien die isomorph, aber nicht identisch sind, als verschieden zu betrachten. (4 Punkte)

(c) **Bonus:** Wenn sie Spass an endlicher Kombinatorik haben: Finden Sie alle Topologien auf 3. (30 Punkte)

Aufgabe 34

(a) Beweisen Sie, unter Angabe der verwendeten Axiome der Mengenlehre, dass für je zwei Mengen x und y das HAUSDORFF-Paar $(x, y)_{\text{H}} := \{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}$ existiert. (10 Punkte)

(b) Beweisen Sie, dass das HAUSDORFF-Paar $(x, y)_{\text{H}}$ die Grundeigenschaft geordneter Paare erfüllt, d.h. dass gilt

$$\forall x_0, x_1, y_0, y_1\ ((x_0, y_0)_{\text{H}} = (x_1, y_1)_{\text{H}} \leftrightarrow (x_0 = x_1 \wedge y_0 = y_1)).$$

(10 Punkte)

(c) Geben Sie analog zu (b) eine Formel für die Grundeigenschaft geordneter Tripel an. (3 Punkte)

(d) Untersuchen Sie, ob die durch

$$\langle x, y, z\rangle_0 := \{\{x, 0\}, \{y, 1\}, \{z, 2\}\} \text{ bzw. } \langle x, y, z\rangle_1 := \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

definierten Tripel diese Grundeigenschaft erfüllen. (je 10 Punkte)

Aufgabe 35
Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(A)$ zusammen mit der symmetrischen Differenz $a \triangle b := (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$ als Addition und der Schnittmengenbildung als Multiplikation ein Ring ist. (10 Punkte)

(b) Ist $\mathcal{P}(A)$ mit diesen Verknüpfungen auch ein Körper? (5 Punkte)

Aufgabe 36
Sei $A \neq \emptyset$ eine transitive Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung $\bigcup A$ ist transitiv. (8 Punkte)

(b) Der Durchschnitt $\bigcap A$ ist transitiv. (8 Punkte)

(c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist transitiv. (8 Punkte)

Aufgabe 37
Sei $C \subseteq \mathrm{Ord}$ eine nicht leere Teilmenge der Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcap C$ eine Ordinalzahl ist. (8 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup C$ eine Ordinalzahl ist. (8 Punkte)

(c) Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Zeigen Sie, dass α genau dann ein Limesordinalzahl ist, wenn $(\beta + 1) \in \alpha$ für alle $\beta \in \alpha$ gilt. (8 Punkte)

(d) Zeigen Sie: Ist eine Menge $X \subseteq \mathrm{Ord}$ unbeschränkt, so ist $\bigcup X$ eine Limesordinalzahl. (8 Punkte)