MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 11. Juni 2004
Abgabetermin: 21. Juni 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 8

Aufgabe 28

Sei S eine Sprache und $\mathfrak{K}$ eine Klasse von S-Strukturen.

(a) **Erinnerung:** Eine Klasse $\mathfrak{K}$ heißt **elementar** falls ein S-Satz φ existiert, so daß $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\varphi$.
Zeigen Sie, daß $\mathfrak{K}$ genau dann elementar ist, wenn eine endliche Menge Φ von S-Sätzen existiert, so daß $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$. (2 Punkte)

(Dies erklärt, warum wir elementare Klassen auch "endlich axiomatisierbar" nennen.)

(b) **Erinnerung:** Eine Klasse $\mathfrak{K}$ heißt **Δ-elementar** falls eine Menge Φ von S-Sätzen existiert, so daß $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$.
Zeigen Sie: $\mathfrak{K}$ ist genau dann Δ-elementar falls eine Menge Φ existiert, so daß

$$\mathfrak{K} = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \mathrm{Mod}^S\varphi. \quad \text{(2 Punkte)}$$

(Das "Δ" steht für "Durchschnitt".)

(c) Sei $\mathfrak{K}_\infty$ die Klasse aller unendlichen S-Strukturen. Zeigen Sie: Falls $\mathfrak{K}$ Δ-elementar ist, so ist auch $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_\infty$ Δ-elementar. (10 Punkte)

Aufgabe 29

Beweisen Sie: Sei σ ein Satz der Sprache der Körpertheorie ($S_{\mathrm{Ar}} := \{+,\cdot,0,1\}$). Falls σ in allen Körpern der Charakteristik 0 gilt, so gibt es ein N_σ, so daß σ in allen Körpern der Charakteristik p für $p > N_\sigma$ gilt. (25 Punkte)

Definitionen:

Sei $\in$ ein binäres Relationssymbol. Die Sprache $S_\in := \{\in\}$ wird als Sprache der Mengenlehre bezeichnet. Wir definieren die folgenden $S_\in$-Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{EX}: && \exists x\, \forall y\, (\neg(y \in x)),\\
&\mathsf{EXT}: && \forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \equiv y),\\
&\mathsf{PAAR}: && \forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall w\, (w \in z \leftrightarrow (w \equiv x \vee w \equiv y)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 30

Sei $\mathcal{M} = (M, E)$ eine $S_\in$-Struktur und es gelte $\mathcal{M} \models \mathsf{EX} \wedge \mathsf{EXT} \wedge \mathsf{PAAR}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine unendliche Menge ist. (20 Punkte)

Tip: Definieren Sie per Induktion eine Injektion von den natürlichen Zahlen in das Modell $\mathcal{M}$.

Aufgabe 31
Sei $\mathcal{M} = (M, E)$ eine $S_\in$-Struktur.

(a) Ein Element $s \in \mathcal{M}$ heißt **maximal**, wenn es kein Element $u \in \mathcal{M}$ mit $s\,E\,u$ gibt. Zeigen Sie: Wenn die Struktur $\mathcal{M}$ die Ausdrücke PAAR und EXT erfüllt, so besitzt $\mathcal{M}$ kein maximales Element. (12 Punkte)

(b) Ein Element $s \in \mathcal{M}$ heißt **fast maximal**, wenn für alle Elemente $u \in \mathcal{M}$ aus $s\,E\,u$ folgt, dass s gleich u ist. Zeigen Sie: Wenn die Struktur $\mathcal{M}$ die Ausdrücke PAAR und EXT erfüllt und s ein fast maximales Element von $\mathcal{M}$ ist, so gilt $s\,E\,s$. (12 Punkte)

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine endliche $S_\in$-Struktur, die PAAR und EXT erfüllt und ein fast maximales Element besitzt. (6 Punkte)

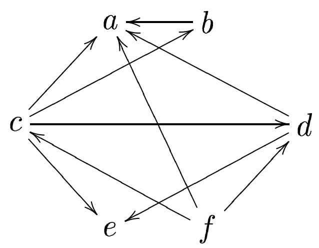
Definitionen:
Sei $\mathcal{M} = (M, E)$ eine $S_\in$-Struktur und x, y, z seien Elemente aus M. Dann ist x die **Potenzmenge** von y in $\mathcal{M}$, falls folgendes gilt:

$$\forall z(\forall w(w\,E\,z \to w\,E\,y) \to z\,E\,x).$$

Weiterhin nennen wir z die **Paarmenge** von x und y in $\mathcal{M}$, falls gilt:

$$\forall w\,(w\,E\,z \leftrightarrow (w \equiv x \vee w \equiv y)).$$

Aufgabe 32
Gerichtete Graphen lassen sich als $S_\in$-Strukturen interpretieren: Im folgenden Graphen G bedeutet ein Pfeil von einem Knoten x zu einem Knoten y, dass $x\,E\,y$ gelten soll. Dann ist $\mathcal{G} := (G, E)$ also eine $S_\in$-Struktur.



Finden Sie Antworten auf die folgenden Fragen:

(a) Ist der Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von EX? (3 Punkte)

(b) Ist der Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von EXT? (12 Punkte)

(c) Was ist die Potenzmenge von d in $\mathcal{G}$? (5 Punkte)

(d) Was ist die Potenzmenge von f in $\mathcal{G}$? (5 Punkte)

(e) Für welche Paare aus $\mathcal{G}$ existiert die Paarmenge in $\mathcal{G}$? (12 Punkte)?