MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 30. April 2004
Abgabetermin: 10. Mai 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe
Sommersemester 2004
Übungsblatt 3

Aufgabe 7
Sei $S = \{\{\dot{f}_i\,;\, i \in I\}, \{\dot{R}_j\,;\, j \in J\}, \{\dot{c}_k\,;\, k \in K\}\}$ eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe, sei X eine beliebige Menge und seien

$$\mathbf{A}_x = (A^x; \{f_i^x\,;\, i \in I\}, \{R_j^x\,;\, j \in J\}, \{c_k^x\,;\, k \in K\})$$

S-Strukturen (für $x \in X$). Man definiere:

1. $A := \{g\,;\, g$ ist eine Funktion von X nach $\bigcup_{x\in X} A^x$ so daß für jedes $x \in X$ gilt: $g(x) \in A^x\}$;
2. falls $\dot{R}_j$ ein n-stelliges Relationssymbol ist und g_1, ..., g_n Elemente von A sind, so setze man $R_j(g_1, ..., g_n) :\iff \forall x \in X\, \big(R_j^x(g_1(x), ..., g_n(x))\big)$;
3. falls $\dot{f}_i$ ein n-stelliges Funktionssymbol ist und g_1, ..., g_n Elemente von A sind, so setze man $f_j(g_1, ..., g_n)(x) := f_j^x(g_1(x), ..., g_n(x))$;
4. falls $\dot{c}_k$ ein Konstantensymbol ist, so setze man $c_k(x) := c_k^x$.

Wir nennen die Struktur

$$\mathbf{A} := (A; \{f_i\,;\, i \in I\}, \{R_j\,;\, j \in J\}, \{c_k\,;\, k \in K\})$$

das **direkte Produkt der Strukturen** $\mathbf{A}_i$.

(a) Sei $S = \{\dot{+}, \dot{-}, \dot{0}\}$ die Sprache der Gruppentheorie. Zeigen Sie für beliebige Mengen X: Ist $\mathbf{A}_x$ eine Gruppe für alle $x \in X$, so ist auch $\mathbf{A}$ eine Gruppe. (12 Punkte)

(b) Sei nun $S = \{\dot{+}, \dot{\cdot}, \dot{-}, \dot{}^{-1}, \dot{0}, \dot{1}\}$ die Sprache der Körpertheorie. Zeigen Sie, daß direkte Produkte von mehr als einem Körper keine Körper sind. (8 Punkte)

Aufgabe 8
Sei S eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe. Wir definieren die Klasse der S-**Hornausdrücke** durch Rekursion:

1. Falls φ_0, ..., φ_n atomare S-Ausdrücke sind, so ist $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \to \varphi_n$ ein S-Hornausdruck.

2. Falls φ_0, ..., φ_n atomare S-Ausdrücke sind, so ist $\neg(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ ein S-Hornausdruck.

3. Falls φ und ψ S-Hornausdrücke sind, so ist auch $\varphi \wedge \psi$ ein S-Hornausdruck.

4. Falls φ ein S-Hornausdruck ist, so auch $\exists x \varphi$.

5. Falls φ ein S-Hornausdruck ist, so auch $\forall x \varphi$.

6. Keine anderen Ausdrücke sind S-Hornausdrücke.

Ein S-Hornausdruck ohne freie Variablen heißt S-Hornsatz.

Zeigen Sie:

(a) Sei σ ein S-Hornsatz, X eine beliebige Menge ist $\mathbf{A}_x$ eine S-Struktur mit $\mathbf{A}_x \models \sigma$ (für alle $x \in X$). Sei $\mathbf{A}$ das direkte Produkt der $\mathbf{A}_x$ (vgl. Aufgabe 7). Dann gilt auch $\mathbf{A} \models \sigma$. (35 Punkte)

Hinweis. Zeigen Sie das Analogon der Behauptung für Hornausdrücke (statt -sätze) durch Induktion nach der rekursiven Definition. Überlegen Sie sich gut, was “das Analogon der Behauptung für Hornausdrücke” ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Satz σ, der kein Hornsatz ist, und für den die Konklusion von (a) falsch ist. (10 Punkte)

(c) Geben Sie die Lebensdaten von Alfred Horn an, nach dem die Hornausdrücke benannt sind. An welcher Universität lehrte er über 40 Jahre? (4 Punkte)

Aufgabe 9

Sei $S = \{\{\dot{f}_i\,;\, i \in I\}, \{\dot{R}_j\,;\, j \in J\}, \{\dot{c}_k\,;\, k \in K\}\}$ eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe, und seien

$$\mathbf{A} = (A, \{f_i^A\,;\, i \in I\}, \{R_j^A\,;\, j \in J\}, \{c_k^A\,;\, k \in K\}) \text{ und}$$

$$\mathbf{B} = (B, \{f_i^B\,;\, i \in I\}, \{R_j^B\,;\, j \in J\}, \{c_k^B\,;\, k \in K\})$$

zwei S-Strukturen. Eine Funktion $F : A \to B$ heisst **Isomorphismus** falls

1. F eine Bijektion ist,

2. für jedes n-stellige Relationssymbol $\dot{R}_j$ und $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ gilt

$$\mathbf{A} \models \dot{R}_j[a_1, ..., a_n] \iff \mathbf{B} \models \dot{R}_j[F(a_1), ..., F(a_n)],$$

3. für jedes n-stellige Funktionssymbol $\dot{f}_i$ und $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ gilt

$$F(f_i^A(a_1, ..., a_n)) = f_i^B(F(a_1), ..., F(a_n)) \text{ und}$$

4. für jedes Konstantensymbol $\dot{c}_k$ gilt $F(c_k^A) = c_k^B$.

Wir nennen zwei Strukturen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ **isomorph**, falls ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. Wir nennen sie **elementar äquivalent**, falls für alle S-Sätze σ gilt:

$$\mathbf{A} \models \sigma \iff \mathbf{B} \models \sigma.$$

Zeigen Sie die folgende Implikation: Falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ isomorph sind, so sind sie elementar äquivalent. (25 Punkte)

Aufgabe 10
Eine Struktur $\mathbf{B} = (B; +, \cdot, -, 0, 1)$ heißt **Boolesche Algebra** falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $+$ and $\cdot$ sind assoziativ, kommutativ und distributiv (also $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$),
2. es gelten die Absorptionsgesetze $x \cdot (x+y) = x$ und $x + (x \cdot y) = x$,
3. es gilt $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$,
4. $-$ ist eine Komplementsfunktion, also $x + (-x) = 1$ und $x \cdot (-x) = 0$.

Wegen der Assoziativität von $+$ und $\cdot$ kann man endliche Summen und Produkte durch Rekursion definieren. Falls $X = \{x_1, ..., x_n\}$, so setzen wir $\sum X = x_1 + ... + x_n$ und $\prod X = x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

In einer Booleschen Algebra $\mathbf{B}$ kann man eine Ordnungsrelation $\leq$ definieren durch

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x \cdot y = x.$$

Sei $\mathbf{B}$ eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie:

(a) 0 ist das $\leq$-kleinste Element (2 Punkte),
(b) 1 ist das $\leq$-größte Element (2 Punkte),
(c) die Idempotenzgesetze gelten: $x + x = x$ und $x \cdot x = x$ (4 Punkte),
(d) es gilt $-(-x) = x$ (6 Punkte).

Man kann die Regeln der Folgerungsbeziehung in die Sprache der Booleschen Algebren übersetzen, indem man alle Ausdrücke durch Elemente der Booleschen Algebra ersetzt, Mengen von Ausdrücken durch Produkte über die Elemente der Menge, $\models$ durch $\geq$, $\neg$ durch $-$, $\vee$ durch $+$ und $\wedge$ durch $\cdot$.

Beispiel. Die Regel

$$\frac{\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \psi}{\Phi \models \psi}$$

verwandelt sich in die Aussage "Falls $y \leq x \cdot \prod X$ und $y \leq (-x) \cdot \prod X$, dann gilt $y \leq \prod X$."

Übersetzen Sie die folgenden Folgerungsregeln in die Sprache der Booleschen Algebren und beweisen Sie die entsprechenden Aussagen über Boolesche Algebren:

(e)

$$\frac{\Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \psi \quad \Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \neg\psi}{\Phi \models \varphi} \text{ (12 Punkte)}$$

(f)

$$\frac{\Phi \cup \{\varphi\} \models \chi \quad \Phi \cup \{\psi\} \models \chi}{\Phi \cup \{\varphi \vee \psi\} \models \chi} \text{ (12 Punkte)}$$