MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 22. April 2004
Abgabetermin: 3. Mai 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe
Sommersemester 2004
Übungsblatt 2

Korrektur von Aufgabe 2.

Die in Aufgabe 2 angegebenen Definitionen bezogen sich auf Ableitungsregeln, die nicht exakt die in der Vorlesung benutzten sind. Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesem Problem umzugehen:

Entweder geben Sie eine alternative Formulierung der Ableitungsregeln und eine alternative Definition von $\mathrm{Erz}(\mathcal{K})$, so daß Aufgabe 2 sinnvoll wird;

oder Sie verwenden die folgende Definition:

Wir betrachten das Alphabet $\mathbb{A} = \{a, b\}$ und eine Erweiterung $\mathbb{B} := \mathbb{A} \cup \{t\}$. Eine Regel $r \subseteq (\mathbb{B}^*)^1 \times \mathbb{B}^* = \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^*$ heisse **kontextfrei** falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Falls $(w, w') \in r$, so existieren $v, v', u \in \mathbb{B}^*$, so daß $w = vtv'$ und $w' = vuv'$.
2. Für alle Wörter $w, w', v, v', u \in \mathbb{B}^*$ gilt
$$(wtw', wuw') \in r \iff (vtv', vuv') \in r.$$

Sei r_0 die 0-äre Regel $\{(\varnothing, t)\}$. Wir nennen eine Menge $L \subseteq \mathbb{A}^*$ **kontextfrei**, falls es eine kontextfreie Regel r gibt, so daß $L = \mathrm{Erz}(\{r, r_0\}) \cap \mathbb{A}^*$.

Beispiel. Die Regel
$$r_1 := \{(wtw', watw')\,;\, w, w' \in \mathbb{B}^*\} \cup \{(wtw', ww')\,;\, w, w' \in \mathbb{B}^*\}$$
ist kontextfrei, und $\mathrm{Erz}(\{r_0, r_1\}) \cap \mathbb{A}^*$ ist die Menge aller endlichen Folgen von as.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde die eindeutige Lesbarkeit des Termkalküls bewiesen. Formulieren und beweisen Sie analog die eindeutige Lesbarkeit des Ausdruckkalküls. (40 Punkte)

Aufgabe 4

Sei S eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe und Φ eine Menge von S-Sätzen. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Mod}^S\Phi$ die Klasse aller S-Strukturen $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \models \Phi$. Wir schreiben abkürzend $\mathrm{Mod}^S\varphi$ statt $\mathrm{Mod}^S\{\varphi\}$.

Sei S beliebig und φ und ψ S-Sätze. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Mod}^S(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Mod}^S\varphi \cap \mathrm{Mod}^S\psi$ (6 Punkte).

(b) $\mathrm{Mod}^S(\varphi \vee \psi) = \mathrm{Mod}^S\varphi \cup \mathrm{Mod}^S\psi$ (6 Punkte).

(c) $\mathrm{Mod}^S(\varphi \to \psi) = \mathrm{Mod}^S\neg\varphi \cup \mathrm{Mod}^S\psi$ (6 Punkte).

Aufgabe 5
Wir definieren eine binäre Verknüpfung $\star$ auf den natürlichen Zahlen durch Rekursion. Diese Verknüpfung wird auch **Hyperexponentiation** genannt.

$$\begin{aligned} x \star 0 &:= x, \\ x \star (y+1) &:= (x \star y)^x. \end{aligned}$$

Sei $S := \{\circ\}$ die Symbolmenge für die Sprache mit einer binären Verknüpfung. Dann sind

$$\begin{array}{ccl} \mathsf{Ass} & \doteq & \forall x(\forall y(\forall z(\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\ ))) \\ \mathsf{Comm} & \doteq & \forall x(\forall y(\ x \circ y = y \circ x\ )) \\ \mathsf{LUnit} & \doteq & \exists x(\forall y(\ x \circ y = y\ )) \\ \mathsf{RUnit} & \doteq & \exists x(\forall y(\ y \circ x = y\ )) \end{array}$$

die kanonischen Ausdrücke für Assoziativität, Kommutativität, Existenz einer Linkseins und Existenz einer Rechtseins. Im folgenden sei $\mathfrak{N}$ die S-Struktur $(\mathbb{N}, \star)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathfrak{N} \models \mathsf{Ass}$ (5 Punkte).
(b) $\mathfrak{N} \models \mathsf{Comm}$ (5 Punkte).
(c) $\mathfrak{N} \models \mathsf{LUnit}$ (5 Punkte).
(d) $\mathfrak{N} \models \mathsf{RUnit}$ (5 Punkte).

Aufgabe 6
Wir betrachten die Symbolmenge $S = \{\mathsf{Tisch}, \mathsf{Stuhl}, \mathsf{Bierseidel}, \in\}$. Die ersten drei Symbole sind einstellige Relationssymbole, das Symbol $\in$ ist ein zweistelliges Relationssymbol.

(a) Formalisieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen als S-Sätze $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: "Jeder Stuhl ist ein Tisch", "Es gibt Bierseidel, die zwar Tische, aber keine Stühle sind", "Jeder Bierseidel enthält einen Stuhl", "Jeder Tisch ist in einem Bierseidel enthalten". (8 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und definieren Sie die folgenden Relationen auf $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \in R_0 &:\iff n^2 + 20n^3 > 256, \\ n \in R_1 &:\iff n \equiv 7(8), \\ n \in R_2 &:\iff n \text{ ist eine Primzahlpotenz}, \\ (n,m) \in R_3 &:\iff n^3 | m^2. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathfrak{H} := (\mathbb{N}, R_0, R_1, R_2, R_3)$ eine S-Struktur. Beweisen oder widerlegen Sie:

(b) $\mathfrak{H} \models \sigma_0$ (6 Punkte),
(c) $\mathfrak{H} \models \sigma_1$ (6 Punkte),
(d) $\mathfrak{H} \models \sigma_2$ (6 Punkte),
(e) $\mathfrak{H} \models \sigma_3$ (6 Punkte).
(f) Warum gerade "Tische", "Stühle" und "Bierseidel"? (3 Punkte)