MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 5. Juli 2004
Abgabetermin: 12. Juli 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 11

Definition:
Ein $u \in \mathbb{R}^*$ heißt unendlich, falls $\forall x \in \mathbb{R}\,(x < u)$ gilt.

Aufgabe 42

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^*$ eine infinitesimale Zahl enthält. (5 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^*$ eine unendliche Zahl enthält. (5 Punkte)
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^*$ eine unendliche Zahl enthält. (5 Punkte)

Aufgabe 43
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz von:

1. f ist stetig.
2. $\forall x_0 \in \mathbb{R}\,\forall x \in \mathbb{R}^*\,(x \sim x_0 \to f^*(x) = f(x_0))$.
3. $\forall x_0 \in \mathbb{R}\,\forall h \in \mathbb{R}^*\,(h \sim 0 \to f^*(x_0 + h) = f(x_0))$.

(25 Punkte)

Aufgabe 44
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz von:

1. f ist gleichmäßig stetig.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*\,(x \sim y \to f^*(x) \sim f^*(y))$.

(20 Punkte)

Aufgabe 45
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiere $\Sigma_f(n) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})$.

Beweisen Sie $\forall N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{st}(\Sigma_f^*(N))$.

(30 Punkte)

Aufgabe 46
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Beweisen Sie die Äquivalenz von:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
2. $\exists N \in \mathbb{N}^*\,(f^*(N) \sim 0)$.

(20 Punkte)