Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 03/04
16. 12. 03
Blatt 9

Übungen zur Mathematik für Informatiker I a

25. Untersuchen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ lösbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & t \\ 3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & 7x_2 & - & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 13. \end{array}$$

26. Man bestimme, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

invertierbar ist, und berechne gegebenenfalls die inverse Matrix A^{-1}.

27. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß dann *Bild* $f^{n+1} \subseteq$ *Bild* f^n und *Kern* $f^n \subseteq$ *Kern* f^{n+1} für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt.

Das waren die letzten Aufgaben, von denen Sie die Hälfte (oder etwas weniger) für die Zulassung zur Klausur benötigen. Die folgenden drei Aufgaben geben Zusatzpunkte. Sie sind aber auch eine interessante Übung.

28. Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 7x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

29. Eine quadratische Matrix A heißt Permutationsmatrix, wenn jede Zeile von A und jede Spalte von A genau eine 1 enthält, alle anderen Einträge aber 0 sind. Zeigen Sie, daß jede Permutationsmatrix invertierbar ist, und geben Sie das Inverse an.

30. Seien $A = (a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ und $B = (b_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ zwei $m \times n$-Matrizen mit Spalten

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad w_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}.$$

Und sei C eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit $AC = B$.

Zeigen Sie, daß dann $L(v_1, \ldots, v_n) = L(w_1, \ldots, w_n)$ ist.

Sind also f und g die zu A bzw. B gehörigen linearen Abbildungen, so gilt $\mathit{Bild}\ f = \mathit{Bild}\ g$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 6. Januar 2004, 9.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!!