Mathematisches Institut
Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 03/04
25. 11. 03
Blatt 6

Übungen zur Mathematik für Informatiker I a

16. Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche injektiv, welche surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (5x_1 - x_2 + x_3, x_3 - x_1)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 cos\varphi + x_2 sin\varphi, -x_1 sin\varphi + x_2 cos\varphi, x_3)$$

17. Geben Sie für folgende lineare Abbildungen eine Basis des Kerns und des Bildes an.

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto (2\alpha_1 - \alpha_3, 4\alpha_1 - 2\alpha_3, 0)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \mapsto$$

$$(\alpha_1+4\alpha_2+5\alpha_3+9\alpha_5, 3\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3-\alpha_5, -\alpha_1-\alpha_3-\alpha_5, 2\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4+8\alpha_5)$$

18. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ und $n = 2^k - 1$. Seien $v_1, \ldots v_n$ die von Null verschiedenen Elemente von $\mathbb{Z}_2^k$ und $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^k$ definiert durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n.$$

(a) Zeigen Sie, daß f linear ist. Also ist $C = Kern\ f$ ein Unterraum des $\mathbb{Z}_2^n$. D.h. C ist ein linearer Code, der sog. Hamming-Code.

(b) Sei $x \in C$ und $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{Z}_2^n$. Sei $y = x + e_i$ für ein i, d.h. y der Vektor x mit einem (!) Fehler. Zeigen Sie, daß dann $f(y) = v_i$ ist. D.h. an $f(y)$ kann man ablesen, ob und an welcher Stelle im Vektor ein Fehler ist.

(c) Sei $k = 3$ und $n = 7$. Geben Sie eine Basis von C an. Für welches m werden also Bitfolgen $x \in \mathbb{Z}_2^m$ durch Elemente von C kodiert? Geben Sie eine mögliche Kodierung an, d.h. einen Isomorphismus $f : \mathbb{Z}_2^m \to C$.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabetermin: bis spätestens 2. Dezember 2003, 9.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr./Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.