FILTER, ULTRAFILTER UND EINFÜHRUNG VON ${}^*\mathbb{R}$

Im Sinne von G.W.Leibniz ist: Eine Kurve besteht aus unendlich vielen unendlich kurzen Stücken. So darf man denken, wenn man Gegenstände der Mathematik oder Physik anschaulich darstellen will. Aber unter den rellen Zahlen ist keine, die unendlich klein ist. Es ist jedoch gelungen, das Argumentieren mit infinitesimalen Größen auf eine Sichere Grundlage zu stellen. Man erweitert den Körper der reellen Zahlen zu einem Körper ${}^*\mathbb{R}$, in dem es infinitesimale und unendliche Elemente gibt und kann dort Analysis ohne ϵ und δ betreiben. Dies allein wäre allerdings völlig nutzlos, wenn man Erkenntnisse, die man in ${}^*\mathbb{R}$ gewonnen hat, nicht zurück in unsere Welt holen könnte. Letzteres ist aber nicht mehr Thema dieses Vortrags. Hier geht es darum, zu zeigen, dass ein Erweiterungskörpers ${}^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ existiert, der infinitesimale und unendliche Elemente enthält.

Grundlegend für die Konstruktion von Nichtstandard-Modellen sind Ultrafilter.
Filter und Ultrafilter für $\langle \mathcal{P}(I), \subseteq \rangle$
Sei $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{P}(I) := \{A \mid A \subset I\}$. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt *Filter* über I, falls gilt:
(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
(2) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$;
(3) $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq I \implies B \in \mathcal{F}$.
Für einen Filter $\mathcal{F}$ über I sind äquivalent:
(1) Zu $\mathcal{F}$ gibt es keinen echten Oberfilter, d.h. ($\mathcal{G}$ Filter und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$) $\implies \mathcal{F} = \mathcal{G}$;
(2) $A \subseteq I \rightarrow (A \notin \mathcal{F} \leftrightarrow I - A \in \mathcal{F})$.
Erfüllt $\mathcal{F}$ eine der Aussagen (1) oder (2), dann heißt $\mathcal{F}$ *Ultrafilter* über I.

Die Folgende Menge ist ein Beispiel für einen Ultrafilter: Sei I unendlich, $i_0 \in I$ fest und $\mathcal{F} := \{A \subseteq I | i_0 \in A\}$.
Man sieht leicht, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist. Zum Beweis der Ultrafiltereigenschaft sei indirekt $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter. Dann existiert ein Filter $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und folglich gibt es ein $A \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$. Da $A \notin \mathcal{F}$ ist, folgt $i_0 \notin A$, d.h. es ist $A \cap \{i_0\} = \emptyset$. Da $A \in \mathcal{G}, \{i_0\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, folgt $A \cap \{i_0\} \in \mathcal{G}$. Wegen $A \cap \{i_0\} = \emptyset$ ist somit $\emptyset \in \mathcal{G}$ im Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathcal{G}$.

Beim Argumentieren mit Filtern werden folgende Aussagen häufig benutzt:
Für jeden Filter $\mathcal{F}$ über I gilt:
(1) $I \in \mathcal{F}$
(2) $A, B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \subset C \implies C \in \mathcal{F}$
(3) $A \in \mathcal{F} \implies I - A \notin \mathcal{F}$

Beweis: zu (1): Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$ gibt es $A \in \mathcal{F}$. Wegen $A \subseteq \mathcal{F}$ ist $I \in \mathcal{F}$. zu (2): folgt sofort aus den Filtereigenschaften. zu (3): Angenommen, $I - A \in \mathcal{F}$, dann wäre auch $A \cap (I - A) = \emptyset \in \mathcal{F}$. Widerspruch.

In einem gewissen Sinne Grundlegend ist der **Filter $\mathcal{C}$ der koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$:**
$\mathcal{C} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - A$ ist endlich $\}$ ist ein Filter über $\mathbb{N}$.

Beweis: $\mathcal{C} \neq \emptyset$ wegen $\mathbb{N} \in \mathcal{C}$. Es ist $\emptyset \notin \mathcal{C}$, da $\mathbb{N} = \mathbb{N} - \emptyset$ unendlich ist. Gilt $A, B \in \mathcal{C}$, dann sind $\mathbb{N} - A$ und $\mathbb{N} - B$ endlich. Somit ist auch $\mathbb{N} - (A \cap B) = (\mathbb{N} - A) \cup (\mathbb{N} - B)$ endlich, also $A \cap B \in \mathcal{C}$. Ist $A \in \mathcal{C}$ und $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, dann ist $\mathbb{N} - A$ endlich, und wegen $\mathbb{N} - B \subseteq \mathbb{N} - A$ ist auch $\mathbb{N} - B$ endlich, also $B \in \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ ist kein Ultrafilter, denn ein Ultrafilter enthält entweder eine Menge oder deren Komplement. Z.B. ist aber $2\mathbb{N}$ weder endlich noch koendlich.

Lemma von ZORN
Sei $\langle X, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, dann gilt:
Jede nichtleere linear geordnete Menge $K \subset X$ hat eine obere Schranke $\Longrightarrow$ X besitzt ein maximales Element.

Mit Hilfe des Lemmas von Zorn wird die Existenz eines Ultrafilters über $\mathbb{N}$ bewiesen, der schließlich die Existenz von $^*\mathbb{R}$ sichert. Wer also an das Auswahlaxiom glaubt, der muss akzeptieren, dass es unendlich kleine Zahlen und Monaden usw gibt.

Existenz von Ultrafiltern
Satz: Zu jedem Filter $\mathcal{F}_0$ über I existiert ein diesen Filter umfassender Ultrafilter.

Beweis: Zu einem Filter $\mathcal{F}_0$ über I setze
$X := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I) \mid \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ Filter$\}$.
Wegen $\mathcal{F}_0 \in X$ ist $X \neq \emptyset$. $\langle X, \subseteq \rangle$ ist eine Halbordnung. Der Satz ist bewiesen, wenn man gezeigt hat:

(1) Jede nichtleere linear geordnete Menge $K \subseteq X$ hat eine obere Schranke.
(2) Jedes maximale Element von X ist ein $\mathcal{F}_0$ umfassender Ultrafilter.

Zu (1): Sei $K \subseteq X$ nichtleer und linear geordnet. Die Menge $\mathcal{H} := \bigcup K$ ist zunächst eine obere Schranke von K in $\mathcal{P}(I)$, da $\forall \mathcal{F} \in K \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{H} \in X$: Es gilt $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{H}$, da alle Filter in K Obermengen von $\mathcal{F}_0$ sind.
Zur Filtereigenschaft: $\mathcal{H} \neq \emptyset$, wegen $I \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{H}$. Es gilt $\emptyset \notin \mathcal{H}$, da $\emptyset \notin \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F} \in K$ ist.
Sind $A, B \in \mathcal{H}$, dann existieren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in K$ mit $A \in \mathcal{F}_1$ und $B \in \mathcal{F}_2$. Da K linear geordnet ist, folgt o.E. $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, also $A, B \in \mathcal{F}_2$. Da $\mathcal{F}_2$ Filter ist, folgt $A \cap B \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{H}$.
Ist $A \in \mathcal{H}$ und $A \subseteq B \subseteq I$, dann gibt es $\mathcal{F} \in K$ mit $A \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Filter über I ist, folgt $B \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.
zu (2): Sei $\hat{\mathcal{F}}$ ein maximales Element von X. Da $\hat{\mathcal{F}} \in X$, ist $\hat{\mathcal{F}}$ ein $\mathcal{F}_0$ umfassender Filter. Sei nun $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{G}$ für einen Filter $\mathcal{G}$ über I. Dann ist $\mathcal{G} \in X$, und da $\hat{\mathcal{F}}$ ein maximales Element von X ist, folgt $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$. Somit ist $\hat{\mathcal{F}}$ ein Ultrafilter.
Aus (1) folgt mit dem Lemma von Zorn, dass X ein maximales Element hat, und aus (2) folgt, das dies ein $\mathcal{F}_0$ umfassender Ultrafilter ist. Dies öffnet nun die Tür zur Nichtstandard-Analysis.

Definition von ${}^*\mathbb{R}$

Wähle einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ enthält also alle koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und darüber hinaus noch für jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ entweder ihr Komplement oder die Menge selbst.
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiere die Sprechweise
$\alpha(i) = \beta(i)$ f.ü. $:\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$.

Schreibe $\alpha \sim \beta$, falls $\alpha(i) = \beta(i)$ f.ü. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Beweis: Es gilt $\alpha \sim \alpha$ wegen $\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \alpha(i)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$.
$\alpha \sim \beta \implies \beta \sim \alpha$ wegen der Symmetrie der Gleichheit.
Ist $\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma$, dann gilt auch $\alpha \sim \gamma$ wegen
$\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \beta(i)\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid \beta(i) = \gamma(i)\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \gamma(i)\} \in \mathcal{F}$.

Für $r \in \mathbb{R}$ sei $r_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die konstante Folge $(r, r, r, ...)$.
Abweichend von der üblichen Vorgehensweise werden jetzt den Folgen α mit $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ nicht ihre Äquivalenzmengen zugeordnet, sondern r selbst. Damit wird direkt $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ erzwungen. Für $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ setze

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} r, & \text{falls } \exists r \in \mathbb{R}\, \alpha \sim r_{\mathbb{N}} \\ \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \beta \sim \alpha\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich definiere $\mathbb{R}^* := \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Es gilt:
(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\, \overline{\alpha} = \overline{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$;
(2) $\forall r \in \mathbb{R}\, \overline{r_{\mathbb{N}}} = r$;
(3) $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

Die Eindeutigkeit von $\overline{\alpha}$ im Fall $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ und die Eigenschaften (1) bis (3) sind wegen der Ungewöhnlichen Definition nicht von vornherein klar, aber dennoch war.
Zwei Folgen, die sich an nur endlich vielen Stellen unterscheiden stellen dasselbe ${}^*\mathbb{R}$-Element dar. Ob $(0, 1, 0, 1, ...)$ und $(1, 0, 1, 0, ...)$ äquivalent sind, hängt vom gewählten Ultrafilter ab, den man nicht explizit angeben kann.

Struktur auf ${}^*\mathbb{R}$

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Setze

$$\overline{\alpha} +^* \overline{\beta} := \overline{\alpha + \beta}, \qquad \overline{\alpha} \cdot^* \overline{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta}$$

und schreibe

$$\overline{\alpha} \leq^* \overline{\beta} :\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \leq \beta(i)\} \in \mathcal{F}.$$

Dann sind $\overline{\alpha} +^* \overline{\beta}$, $\overline{\alpha} \cdot^* \overline{\beta}$ und die Gültigkeit von $\overline{\alpha} \leq^* \overline{\beta}$ unabhängig von den speziellen Representanten α und β. Außerdem sind $+^*, \cdot^*, \leq^*$ in ${}^*\mathbb{R}$ Fortsetzungen von $+, \cdot, \leq$ in $\mathbb{R}$.

Beweis: Seien $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$ und $\overline{\beta} = \overline{\beta'}$. Dann gilt nach Definition $A_1 := \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \alpha'(i)\} \in \mathcal{F}$ und $A_2 := \{i \in \mathbb{N} \mid \beta(i) = \beta'(i)\} \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist gilt auch $A_1 \cap A_2 \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) + \beta(i) = \alpha'(i) + \beta'(i)\} \in \mathcal{F}$. Also ist $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha' + \beta'}$. Genauso geht $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha' + \beta'}$.
Ist $\overline{\alpha} \leq^* \overline{\beta}$, dann ist $A_3 := \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \leq \alpha'(i)\} \in \mathcal{F}$. Wegen $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ folgt $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha'(i) \leq \beta'(i)\} \in \mathcal{F}$. Also $\overline{\alpha'} \leq^* \overline{\beta'}$.
Zum Beweis von $+ = +^* |_{\mathbb{R}}$ seien $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$, $\overline{s_{\mathbb{N}}} = s$, $\overline{(r+s)_{\mathbb{N}}} = r + s$ und es folgt: $r + s = \overline{(r+s)_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}}} +^* \overline{s_{\mathbb{N}}} = r +^* s$. Genauso geht $r \cdot s = r \cdot^* s$.
Schließlich gilt: $r \leq s \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid r_{\mathbb{N}}(i) \leq s_{\mathbb{N}}(i)\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overline{r_{\mathbb{N}}} \leq^* \overline{s_{\mathbb{N}}} \Leftrightarrow r \leq^* s$.
Im folgenden kann deshalb auf die Unterscheidung von $+^*, \cdot^*, \leq^*$ und $+, \cdot, \leq$ verzichtet werden.

Satz: $\langle ^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ ist ein Körper.

Beweis: Die Körperaxiome folgen im wesentlichen aus den Rechenregeln für Folgen und der Definition von $+$ und $\cdot$ in $^*\mathbb{R}$. Die 0 und die 1 in $^*\mathbb{R}$ sind die 0 und die 1 in $\mathbb{R}$. Einzig interessant ist die Existenz inverser Elemente. Hier wird ausgenutzt, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist:
Ist $\overline{\alpha} \neq 0$, dann ist $\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \neq 0\} \in \mathcal{F}$, da sonst $\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = 0\} \in \mathcal{F}$ und damit $\overline{\alpha} = 0$ wäre. Setze $\beta(i) := \frac{1}{\alpha(i)}$, falls $\alpha(i) \neq 0$ und $\beta(i) := 0$ sonst. Dann ist $\{i \in \mathbb{N} \mid (\alpha \cdot \beta)(i) = 1\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \neq 0\} \in \mathcal{F}$, und es folgt $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta} = 1$.

Endlich, unendlich, infinitesimal und $\approx$
Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$. Dann heißt

(1) $\overline{\alpha}$ *endlich* oder *finit*, falls $\exists n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \leq n$;
(2) $\overline{\alpha}$ *unendlich*, falls $\forall n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \geq n$;
(3) $\overline{\alpha}$ *infinitesimal*, falls $\forall n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \leq 1/n$;
(4) $\overline{\alpha}$ *unendlich nahe bei* $\overline{\beta}$ oder $\overline{\alpha}$ *infinitesimal benachbart zu* $\overline{\beta}$ (geschrieben: $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$), falls $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ infinitesimal ist.

Eigenschaften von $^*\mathbb{R}$

(1) $^*\mathbb{R}$ enthält von 0 verschiedene infinitesimale Elemente.
Zum Beispiel gilt für $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Wenn $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$, dann ist $\overline{\alpha}$ infinitesimal.
(2) $^*\mathbb{R}$ enthält unendliche Elemente, d.h. $^*\mathbb{R}$ ist nicht archimedisch.
Zum Beispiel ist $\overline{\alpha}$ unendlich, falls $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \infty$.
(3) $^*\mathbb{R}$ ist nicht (ordnungs)vollständig.
(4) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation über $^*\mathbb{R}$.
(5) Endliche Elemente liegen unendlich nahe bei einer rellen Zahl.
Genauer: $\forall x \in {}^*\mathbb{R}\, (x \text{ endlich} \implies \exists! r \in \mathbb{R}\, x \approx r)$.

Beweis: zu (1): Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt $|\alpha(i)| \leq 1/n$ bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{F}$ alle koendlichen Mengen von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ enthält, folgt $|\alpha(i)| \leq 1/n$ f.ü. und somit $|\overline{\alpha}| \leq 1/n$, also ist $\overline{\alpha}$ infinitesimal.
zu (2): Dies gilt, da $\alpha(i) \geq n$ f.ü.
zu (3): Betrachte $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ und $\beta := (1, 2, 3, 4, ...)$. Dann ist $\overline{\beta}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Zum Nachweis, dass $\mathbb{N}$ keine kleinste obere Schranke hat, reicht es zu zeigen, dass mit $\overline{\alpha}$ auch $\overline{\alpha} - 1$ obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Sei hierzu $\overline{\alpha}$ obere Schranke von $\mathbb{N}$. Dann gilt $n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N} \implies n+1 \leq \overline{\alpha} \implies n \leq \overline{\alpha} - 1$, d.h. $\overline{\alpha} - 1$ ist eine obere Schranke von $\mathbb{N}$.
Der tiefliegende Grund, warum ${}^*\mathbb{R}$ nicht vollständig ist, dass die Vollständigkeit nicht mit einer Formel erster Stufe ausgedrückt werden kann. Alle erststufigen Formeln übertragen sich nämlich von $\mathbb{R}$ nach ${}^*\mathbb{R}$.
zu (4): Das folgt aus $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} |\alpha(i) - \beta(i)| \leq 1/n$ f.ü.
zu (5): Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ endlich. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq n_0$, d.h. es ist $-n_0 \leq x \leq n_0$. Setze $A := \{s \in \mathbb{R} | s \leq x\} \subseteq \mathbb{R}$. Wegen $-n_0 \in A$ und $s \leq n_0$ für alle $s \in A$ ist A eine lichtleere, in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkte Menge. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert eine kleinste obere Schranke $r \in \mathbb{R}$ von A. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Da r obere Schranke von A ist, folgt $r + 1/n \notin A$ und somit $x \leq r + 1/n$. Da $r - 1/n$ keine obere Schranke von A ist, existiert ein $s \in A$, so dass $s \leq r - 1/n$ nicht gilt. Folglich ist $r - 1/n \leq s \leq x$. Im ganzen gilt also $r - 1/n \leq x \leq r + 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was bedeutet, dass $x \approx r$. Sei $t \in \mathbb{R}$ ein weiteres Element mit $x \approx t$. Dann ist $t \approx r$, weil $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist. Da aber $t, r \in \mathbb{R}$ gilt $t = r$. Daher ist r eindeutig bestimmt.

Damit ist der Erweiterungskörper gefunden, der über die reellen Zahlen hinaus auch noch unendliche und infinitesimale Elemente enthält.