Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis

Elementare Modelltheorie und Nichtstandardmodelle

— Alexander Sonnikow —

5. November 2002

Die Modelltheorie ist eine Untersuchung von Axiomensystemen, deren Modellen sowie der Beziehung zwischen den beiden. Wir werden nun einige der Grundbegriffe der Modelltheorie erläutern. Weiterhin werden wir im Laufe des Vortrages ein "minimales" **Nichstandardmodell** von $\mathbb{R}$ kreieren, wo am Beispiel der ersten Ableitung einer Funktion erstmals das **Transferprinzip** vorgeführt wird. Dieses ist eine Standardmethode der Modelltheorie und wird uns im Laufe des Seminars noch häufiger begegnen.

Definition 1
Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen.

(a) **Theorie** von $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller Sätze, die in $\mathfrak{A}$ gelten: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L) | \mathfrak{A} \models \varphi\}$.
(b) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent**, falls ihre Theorien gleich sind: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} :\equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.
(c) Funktion h ist **elementare Abbildung**, falls die elementaren (d.h. durch die Formeln 1. Stufe darstellbaren) Eigenschaften der Struktur invariant sind. Das heißt: $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, wenn gilt
  (i) $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$;
  (ii) $\forall n < \omega \forall \varphi \in \mathrm{Fml}_n(L) \forall \vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n (\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{a})])$.
(d) $\mathfrak{A}$ ist **elementare Substruktur** von $\mathfrak{B}$, wenn sie dieselben elementaren Eigenschaften hat. Das heißt: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, falls gilt
  (i) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$;
  (ii) $id : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Bemerkung 2
Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen.

(a) Für $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ gilt: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$.
(b) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)\ (\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$.
(c) $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
(d) $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \longrightarrow h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Insbesondere sind also isomorphe Strukturen elementar äquivalent.
(e) Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist elementar gdw. $\forall \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\forall a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Beweis: (a)-(d) sind nur eine Anwendung der Definition.
zu (e): der Beweis ist eher technischer Natur, durch Induktion über den Term- und Formelaufbau. □

Der Begriff **Nichtstandard**-Analysis bezieht sich auf die infinitesimalen, d.h. unendlich kleinen Größen, welche eigentlich ab dem 19. Jahrhundert aus der Mathematik verbannt wurden und erst Mitte des 20. Jahrhunderts exakt formuliert und begründet wurden.

ZIEL: Darstellung der (ersten) Ableitung einer Funktion mit Nichtstandardmethoden.

Zunächst wollen wir feststellen, daß $\mathbb{R}$ sowohl für die Menge der reellen Zahlen wie auch für die Struktur des angeordneten Körpers der reellen Zahlen über der Sprache L steht.

Seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Zunächst müssen wir die Sprache L zu L' erweitern, indem wir zwei Funktionssymbole $\dot{f}, \dot{g}$ sowie die Konstantensymbole $\{\dot{r} | r \in \mathbb{R}\}$ (wichtig für eine spätere Einbettung in das Nichtstandardmodell) hinzufügen. Durch die Interpretation von $\dot{f}$ durch f, $\dot{g}$ durch g und $\dot{r}$ durch r haben wir eine kanonische Expansion von $\mathbb{R}$ zu einer L'-Struktur $\mathbb{R}'$, in der wir von einer Ableitung reden können.

Auf $\mathbb{R}'$ aufbauend werden wir das Modell um die infinitesimalen Größen zu einem speziellen Nichtstandard-Modell erweitern, in welchem nun die Ableitung auch mit den Nichtstandard-Methoden formuliert werden kann.

Für unendlich kleine Größen wählen wir ein neues Konstantensymbol $\dot{\theta}$ und betrachten:

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathbb{R}') \cup \{\dot{(}\dot{0}\dot{<}\dot{\theta}\dot{\wedge}\dot{\theta}\dot{<}\dot{r}\dot{)} | r \in \mathbb{R} \wedge 0 < r\}.$$

Bemerkung 3
Jede endliche Teilmenge Φ' von Φ ist in einer Expansion von $\mathbb{R}'$ erfüllbar.

Beweis: Für jedes endliche $\Phi' \subset \Phi$ existiert ein endliches $I \subset \mathbb{R}_+$, so daß

$$\Phi \subset \Phi(I) :\equiv \mathrm{Th}(\mathbb{R}') \cup \{\dot{(}\dot{0}\dot{<}\dot{\theta}\dot{\wedge}\dot{\theta}\dot{<}\dot{r}\dot{)} | r \in I\}.$$

Mit $\theta :\equiv \frac{1}{2} \cdot \min(I)$ ist $(\mathbb{R}', \theta) \models \Phi(I)$ und damit auch $(\mathbb{R}', \theta) \models \Phi'$. □

Bemerkung 4
Nach dem Endlichkeitssatz ist damit auch Φ erfüllbar. Sei $(\mathbb{R}^*, \theta^*) \models \Phi$, wobei

$$\mathbb{R}^* = (|\mathbb{R}^*|, <^*, +^*, \cdot^*, f^*, g^*, (r^* | r \in \mathbb{R})).$$

Man beachte den Unterschied zu der Vorgehensweise von früher. Statt das Nichtstandardmodell direkt zu konstruieren, argumentieren wir nun ausschließlich über die Existenz. Aus der Erfüllbarkeit aller endlichen Teilmengen folgern wir die Existenz eines Models für Φ, ein solches nennen wir $\mathbb{R}^*$, über das Aussehen oder gar Eindeutigkeit dieses Models wissen wir nichts.

Lemma 5
$\mathbb{R}^*$ ist eine echte Erweiterung von $\mathbb{R}'$ zu einem angeordneten Körper.

Beweis: Mit $r \mapsto r^*$ haben wir eine Einbettung von $\mathbb{R}'$ in $\mathbb{R}^*$, diese ist sogar elementar. Damit ist $\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}^*$. Per Definition von $\mathbb{R}^*$ ist $\theta^* \in \mathbb{R}^* \backslash \mathbb{R}' \implies \mathbb{R}' \subsetneq \mathbb{R}^*$. □

Damit können die Ordnungsrelation, die arithmetischen Operationen und die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^*$ als Fortsetzungen der entsprechenden Relation aus $\mathbb{R}$ definiert und die bekannten Rechenregeln übernommen werden. Wir vereinbaren nun ein Paar Sprechweisen und untersuchen $\mathbb{R}^*$:

Definition 6
Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$.

(a) u ist **endlich** $:\equiv \exists r \in \mathbb{R} \quad |u| < r$.
(b) Ist u endlich, so bezeichnet $\mathrm{st}(u) :\equiv \sup_{\mathbb{R}}\{r \in \mathbb{R} | r < u\}$ den **Standardteil** von u.
(c) u ist **unendlich klein** (auch: **infinitesimal**) $:\equiv \mathrm{st}(u) = 0$.
(d) u, v sind **unendlich nahe** $:\equiv u \sim v :\equiv u - v$ ist unendlich klein.

Lemma 7
Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$.

(a) u ist unendlich klein $\longleftrightarrow \forall r \in \mathbb{R} \quad (0 < r \rightarrow |u| < r)$.
(b) Sind u und v endlich, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.
(c) Sind u und v unendlich klein, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.
(d) Ist u endlich und v unendlich klein, so ist $u \cdot v$ unendlich klein.
(e) Ist $r \in \mathbb{R}$, so ist $\mathrm{st}(r) = r$; insbesondere ist r endlich.

Beweis: problemlos mit Hilfe der wohlbekannten Eigenschaften der Betragsfunktion, bei (e) fließt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ mit hinein. □

Satz 8
Jedes endliche u ist eindeutig darstellbar in der Form $u = r + h$, so daß $r \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*$ unendlich klein ist. Es ist dann $r = \mathrm{st}(u)$.

BEWEIS: Wir zeigen zuerst (a) die Eindeutigkeit und dann (b) die Existenz der Darstellung.

zu (a): Angenommen die Darstellung wäre nicht eindeutig, d.h. $u = r_1 + h_1 = r_2 + h_2$

$\implies \quad r_1 - r_2 \overset{7(e)}{=} \mathrm{st}(r_1 - r_2) = \mathrm{st}(h_2 - h_1) \overset{7(c)}{=} 0 \quad \implies \quad r_1 = r_2 \quad \implies \quad h_1 = h_2;$

zu (b): Für die Existenz genügt es zu zeigen, daß $h :\equiv u - \mathrm{st}(u)$ unendlich klein ist.
Angenommen es gilt nicht, d.h. $\mathrm{st}(h) \neq 0$, o.B.d.A. $\mathrm{st}(h) > 0$.

$\implies \quad \exists r_0 \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\} : r_0 < h \quad \implies \quad \mathrm{st}(u) + r_0 < \mathrm{st}(u) + h = u$

$\implies \quad \mathrm{st}(u) = \sup\{r \in \mathbb{R} | r < u\} \geq \mathrm{st}(u) + r_0 > \mathrm{st}(u).$ Widerspruch.

$\square$

Korollar 9
Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$ endlich. Dann gilt:

(a) $st(u + v) = st(u) + st(v)$.
(b) $st(u \cdot v) = st(u) \cdot st(v)$.
(c) $st(-u) = -st(u)$.
(d) Wenn $u \leq v$ so $st(u) \leq st(v)$.
(e) $|st(u)| = st(|u|)$.

BEWEIS:

zu (a): $u + v = (\mathrm{st}(u) + h_1) + (\mathrm{st}(v) + h_2) = \mathrm{st}(u) + \mathrm{st}(v) + \underbrace{h_1 + h_2}_{\sim 0};$

zu (b): $u \cdot v = (\mathrm{st}(u) + h_1) \cdot (\mathrm{st}(v) + h_2) = \mathrm{st}(u) \cdot \mathrm{st}(v) + \underbrace{h_1 \cdot \mathrm{st}(v) + h_2 \cdot \mathrm{st}(u) + h_1 \cdot h_2}_{\sim 0};$

zu (c): aus (a) mit $v \equiv -u$;

zu (d): $u \leq v \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{st}(u) + h_1 \leq \mathrm{st}(v) + h_2$
Angenommen, $r :\equiv \mathrm{st}(u) - \mathrm{st}(v) > 0 \quad \implies \quad 0 < r \leq h_2 - h_1$. Widerspruch zu $(h_2 - h_1) \sim 0$.

zu (e): Falls $u \geq 0$, dann $\mathrm{st}(|u|) = \mathrm{st}(u) \geq \mathrm{st}(0) = 0$;
Falls $u < 0$, dann $\mathrm{st}(|u|) = \mathrm{st}(-u) = -\mathrm{st}(u) \geq 0$;
Die Behauptung folgt dann aufgrund der Definition der Betragsfunktion.

$\square$

Nach dieser Analyse von unserem $\mathbb{R}^*$ sind wir nun endlich in der Lage, unser angekündigtes Ziel zu erreichen, d.h. die Darstellung der ersten Ableitung mit Nichtstandardmethoden:

Satz 10
$g = f' \quad \iff \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall h \in \mathbb{R}^* \ \Big((h \sim 0 \wedge h \neq 0) \longrightarrow g^*(x) \sim \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h}\Big).$

BEWEIS: Bevor wir mit dem Beweis beginnen, müssen wir einige der unverzichtbaren analytischen Eigenschaften in der Sprache L_{aoK} der angeordneter Körper formalisiern:

„$v_1 = -v_0$" entspricht $\alpha(v_0, v_1) :\equiv v_0 + v_1 = 0.$
„$v_1 = v_0^{-1}$" entspricht $\mu(v_0, v_1) :\equiv v_0 \bullet v_1 = 1.$
„$|v_0| < v_1$" entspricht

$$\beta(v_0, v_1) :\equiv \quad \Big(\big((0 < v_0 \vee 0 = v_0) \rightarrow v_0 < v_1\big) \wedge \big(v_0 < 0 \rightarrow \forall v_2(\underbrace{v_0 + v_2 = 0}_{\text{d.h. } v_2 = -v_0} \rightarrow v_2 < v_1)\big)\Big).$$

Betrachte nun die Formel:

$$\Delta(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) :\equiv \forall v_5 \forall v_6 \forall v_7 \left(\left(\alpha \frac{v_1}{v_0} \frac{v_5}{v_1} \wedge \left(\mu \frac{v_2}{v_0} \frac{v_6}{v_1} \wedge \alpha \frac{v_3}{v_0} \frac{v_7}{v_1} \right) \right) \longrightarrow \beta \frac{(v_0 + v_5) \bullet v_6 + v_7}{v_0} \frac{v_4}{v_1} \right).$$

Dann gilt in jedem angeordneten Körper $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} \models \Delta[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \qquad \iff \qquad \left| \frac{a_0 - a_1}{a_2} - a_3 \right| < a_4.$$

Damit können wir uns dem eigentlichen Beweis zuwenden.
zu „ $\Rightarrow$ ": gegeben ist $g = f'$, d.h. wenn wir $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*, h \sim 0, h \neq 0$ fixieren, so ist zu zeigen:

$$\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} \sim g^*(x)$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 : \left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - g^*(x) \right| < \eta$$

Fixiere also ein $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$. Es gilt:

$$g = f' \iff \forall t \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \rightarrow \left| \frac{f(t+\xi) - f(t)}{\xi} - g(t) \right| < \varepsilon \right) \qquad (*)$$

d.h. zu unserem fixierten η existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \rightarrow \left| \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - g(x) \right| < \eta \right).$$

In der Sprache L' ausgedrückt ist dies gleichwertig mit:

$$\mathbb{R}' \models \forall \xi \left(\left(\beta \frac{\xi}{v_0} \frac{\delta}{v_1} \wedge \neg \xi = 0 \right) \longrightarrow \Delta \frac{f(x+\xi)}{v_0} \frac{f(x)}{v_1} \frac{\xi}{v_2} \frac{g(x)}{v_3} \frac{\eta}{v_4} \right).$$

Damit ist:

$$\forall \xi \left(\left(\beta \frac{\xi}{v_0} \frac{\delta}{v_1} \wedge \neg \xi = 0 \right) \longrightarrow \Delta \frac{f(x+\xi)}{v_0} \frac{f(x)}{v_1} \frac{\xi}{v_2} \frac{g(x)}{v_3} \frac{\eta}{v_4} \right) \in \mathrm{Th}(\mathbb{R}').$$

Der nächste Schritt ist der **Transfer vom Standard- zum Nichtstandardmodell** und von zentraler Bedeutung:

$$\mathbb{R}^* \models \mathrm{Th}(\mathbb{R}') \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models \forall \xi \left(\left(\beta \frac{\xi}{v_0} \frac{\delta}{v_1} \wedge \neg \xi = 0 \right) \longrightarrow \Delta \frac{f(x+\xi)}{v_0} \frac{f(x)}{v_1} \frac{\xi}{v_2} \frac{g(x)}{v_3} \frac{\eta}{v_4} \right).$$

Dies bedeutet:

$$\forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \rightarrow \left| \frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x) \right| < \eta \right).$$

Und speziell für $\xi = h$:

$$\left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - g^*(x) \right| < \eta.$$

Genau dies war ja zu zeigen.

zu „ $\Leftarrow$ ": Angenommen $g \neq f'$. Dann liefert uns die Negierung von $(*)$:

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists \xi \;\; \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \wedge \left| \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - g(x) \right| \geq \varepsilon \right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{R}' \models \forall \delta \left(0 < \delta \longrightarrow \exists \xi \left(\left(\beta \frac{\xi}{v_0} \frac{\delta}{v_1} \wedge \neg \xi = 0 \right) \wedge \neg \Delta \frac{f(x+\xi)}{v_0} \frac{f(x)}{v_1} \frac{\xi}{v_2} \frac{g(x)}{v_3} \frac{\varepsilon}{v_4} \right) \right)$$

Die Transformation in das Nichtstandardmodell (wie in „ $\Rightarrow$ ") liefert uns dann:

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \xi \;\; \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \wedge \left| \frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x) \right| \geq \varepsilon \right).$$

Wir setzen $\delta :\equiv \theta^*$ und erhalten ein $\xi \in \mathbb{R}^*$ mit $0 < |\xi| < \delta$ und $\left| \frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x) \right| \geq \varepsilon$.
Dies bedeutet aber: $\frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} \nsim g^*(x)$. $\square$

Beispiel: Für $0 < n < \omega$ ist $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, denn für $h \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ mit $h \sim 0$ gilt

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} + \underbrace{h \cdot \sum_{k=2}^{n} x^{n-k} h^{k-2}}_{\sim 0}.$$