Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abteilung für Grundlagenforschung der Mathematik

Mengenlehre.

Ein Skript zu den
Grundlagen der Mathematik
mit einer Einführung in die
Mathematische Logik und Modelltheorie.

Basierend auf Vorlesungen von

Prof. Peter Koepke

ausgearbeitet von
Manfred Burghardt

Bonn 1996

Vorwort.

to boldly go
where no man
has gone before.

Der vorliegende Text zur Grundlagenmathematik fußt auf verschiedenen Vorlesungen, die Prof. Peter Koepke von 1991 bis 1995 an der Rheinischen Friedrich Wilhelms Universität Bonn gehalten hat. Er stellt eine echte Obermenge des Stoffes einer zweisemestrigen einführenden Vorlesung in die Mathematische Logik und Mengenlehre dar. Viele in einer Vorlesung nur angerissene Fragestellungen werden vertiefend behandelt, so daß dieser Text auch für denjenigen noch ein kleiner Leitfaden sein kann, der sich tiefer in die Mengenlehre einarbeiten will.

In Anbetracht der Tatsache, daß in den meisten Lehrbüchern Beweise eher knapp gefaßt sind, sind die Beweise in diesem Skript zum größten Teil ausführlich dargestellt. Dies soll vor allem demjenigen als Rettungsanker dienen, der in der Vorlesungsnach- oder Prüfungsvorbereitung über so manches in Vorlesungen und Büchern nicht dargestellte Detail zu stolpern droht. Jedem sei aber empfohlen, die Details zunächst selbst auszuarbeiten und erst im Zweifelsfall den ausgearbeiteten Beweis im vorliegenden Text zu lesen.

Zu den historisch-biographischen Anmerkungen ist folgendes zu sagen: bei ihrer Abfassung habe ich mich auf mir zugängliche Sekundärliteratur gestützt. Da ich kein Historiker bin, war mir eine Überprüfung der darin angegebenen Informationen und eine Würdigung der vermittelten Einschätzungen der einzelnen Mathematikerpersönlichkeiten i.a. nicht möglich. Die historisch-biographischen Anmerkungen sollen lediglich einen kurzen Blick auf den Lebensweg der Menschen werfen, deren Arbeit letztlich das Fundament des vorliegenden Textes ist; sie erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Objektivität. Im einzelnen habe ich folgende, im Literaturverzeichnis angegebene Bücher zu Rate gezogen: [5], [14], [23], [27], [32] und [39]. Insbesondere verweise ich auf [14], das auch biographische Informationen zu noch lebenden Mathematikern liefert.

Ich bedanke mich bei Herrn Dipl.-Math. Ralf-Dieter Renz, Herrn Carsten Wahl und Frau Ute Köhler, die mir Vorlesungsmitschriften zur Verfügung gestellt haben, und bei allen, die mir Fehler und Unklarheiten in älteren Fassungen dieses Skriptes mitgeteilt haben, insbesondere bei Herrn Ingo Henkel, Herrn Andreas Jöbges, Herrn Dipl.-Math. Jochen Löffelmann, Herrn Dipl.-Math. Florian Rudolph und Herrn Gunnar Stevens. Jeden Leser bitte ich um Hinweise auf inhaltliche Fehler und Druckfehler; auch Anregungen zur besseren Darstellung des Stoffes werden von mir gerne entgegengenommen.

Siegburg, im Januar 1996 — MANFRED BURGHARDT

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung.

Wir geben hier eine knappe Übersicht über die in diesem Text behandelten Themen.

Wir entwickeln zunächst eine Sprache, in der wir über die Mathematik sprechen können. Alle mathematischen Eigenschaften können als Aussagen über Mengen aufgefaßt werden. Eine der Mengenlehre angemessene Sprache sollte es uns also ermöglichen, alle mathematische Sachverhalte auszudrücken.

Im zweiten Kapitel des vorliegenden Textes werden wir eine solche entwickeln. Es handelt sich um eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die genau ein zweistelliges Relationssymbol enthält, das „Elementbeziehung“ genannt und mit $\in$ bezeichnet wird. Um die Eigenschaften des mathematischen Universums zu fixieren, formulieren wir die uns offensichtlich erscheinenden „Grundeigenschaften“ der Mathematik in Form von Axiomen. Das sind gewisse „Sätze“ unserer Sprache der Mengenlehre, deren Aussage wir als „wahr“ postulieren. Allein aus diesen Axiome leiten wir dann alle übrigen Eigenschaften ab. Wir beginnen mit einer sehr einfachen Mengenlehre, dem System der **elementaren Mengenlehre** (**EML**), in der wir gerade die einfachsten mengentheoretischen Operationen durchführen können, und zeigen, wie sich fundamentale mathematische Begriffe wie „geordnetes Paar“, „cartesisches Produkt“, „Ordnung“ und „Funktion“ im Rahmen der Mengenlehre definieren lassen. Wir können dann bereits einfache mathematische Gebilde, wie etwa Gruppen, im Rahmen der Mengenlehre formalisieren.

Das von **EML** bestimmte mathematische Universum ist aber viel zu klein, um darin die gesamte klassische Mathematik durchführen zu können. Deshalb erweitern wir im dritten Kapitel das Axiomensystem **EML** zu den Axiomensystemen **ZF** und **ZFC**, die heute weithin als adäquate Axiomatisierung der Mathematik anerkannt sind. **ZFC** unterscheidet sich von **ZF** um das „Auswahlaxiom“, das in **ZF** nicht enthalten ist. Die Sonderstellung des Auswahlaxioms hat historische Wurzeln, auf die wir an geeigneter Stelle eingehen werden. Eine kleine Analyse des Erweiterungsprozesses von **EML** zu **ZF** bzw. **ZFC** zeigt uns, inwieweit die einzelnen, neu hinzugekommenen Axiome unser mathematisches Universum „anreichern“. Wir sehen exemplarisch, daß wir auf der Grundlage von **ZFC** die gesamte klassische Mathematik auf eine mengentheoretische Basis stellen können.

Im vierten Kapitel bewegen wir uns erstmals sichtbar aus dem mathematischen Bereich heraus, den Studierende aus den Grundvorlesungen kennen, indem wir den Prozeß des Zählens ins Transfinite ausdehnen: durch Addition von 1 kommen wir von 0 zu 1, von 1 zu 2, von 2 zu 3 und so fort. Auf diese Weise erhalten wir sämtliche natürlichen Zahlen, die wir auch als „endliche Ordinalzahlen“ bezeichnen. Wir fassen nun die Menge der natürlichen Zahlen ebenfalls als Zahl auf, und erhalten eine Ordinalzahl ω, die größer ist als jede endliche Ordinalzahl. Wir setzen dann an der Stelle ω den Zählprozeß fort und kommen zu den Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$ und so fort. (Natürlich müssen wir für diese Zahlen geeignete mengentheoretische Definitionen angeben.) Durch permanentes Fortsetzen der hier beschriebenen Bildungsprozesse, also durch Anwenden der $+1$-Operation und der Bildung der Menge aller bisher gewonnen Ordinalzahlen an „Limesstellen“ erhalten wir die Klasse On sämtlicher Ordinalzahlen. Wir werden sehen, daß On sehr groß ist. In der Tat ist On viel zu groß, um überhaupt eine Menge sein zu können. Objekte wie On, die wir mengentheoretisch charakterisieren können, die selbst aber keine Menge sind, heißen „echte Klassen“.

Nachdem wir grundlegende Eigenschaften von On untersucht haben – in diesen Zusammenhang gehört auch eine erste Analyse des wichtigen Begriffes der Wohlordnung – untersuchen wir im fünften Kapitel zwei fundamentale Prinzipien der Mengenlehre, nämlich das Beweisprinzip der Induktion und das Konstruktionsprinzip der Rekursion. Beide fußen darauf, daß man über eine Menge x eine Aussage macht aufgrund der Kenntnis der bisher bereits betrachteten „Vorgänger“ von x. Diese Prinzipien sind offenbar für Untersuchungen, die Ordinalzahlen involvieren, prädestiniert, können wir hier doch den Begriff „Vorgänger“ durch „kleinere Ordinalzahl“ interpretieren. Als Beispiele übertragen wir durch Rekursion die üblichen arithmetischen Operationen von den natürlichen Zahlen auf alle Ordinalzahlen. Wir definieren auch die von Neumann-Hierarchie, eine echt aufsteigende Folge von Mengen (indiziert über die Ordinalzahlen), die das mathematische Universum von den einfachsten zu immer komplizierteren Mengen hin vollständig ausschöpft.

Im zweiten Teil des fünften Kapitels übertragen wir die Begriffe „Induktion“ und „Rekursion“ auf allgemeinere Situationen, in denen „x ist Vorgänger von y“ bedeutet, daß eine Relation $x < y$ besteht, wobei

$<$ eine „stark fundierte Relation“ ist. Hier beweisen wir den „Rekursionssatz“ in voller Allgemeinheit.

Aus dem Rekursionssatz folgern wir im sechsten Kapitel den „Isomorphiesatz von Mostowski“ und leiten ein paar nützliche Resultate ab. Insbesondere konstruieren wir hier die Gödel Pairing Function, die eine „kanonische “ Bijektion zwischen $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ und On darstellt.

Im siebenten Kapitel kehren wir für einen Augenblick zur klassischen Mathematik zurück und skizzieren einen mengentheoretischen Aufbau unseres Zahlsystems von den natürlichen über die rationalen und m.H. von Dedekindschen Schnitten zu den reellen Zahlen. Wir kommen damit zu der Erkenntnis, daß sich in unserem System **ZFC** die gesamte reelle und komplexe Analysis mengentheoretisch formalisieren läßt.

Im achten Kapitel analysieren wir das Auswahlaxiom **(AC)**. Wir charakterisieren äquivalente Formulierungen von **(AC)** und zeigen z.B., daß **(AC)** (unter **ZF**) äquivalent ist zu der Eigenschaft, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Wohlordnungssatz von Zermelo), und zum Lemma von Zorn. Wir diskutieren auch Folgerungen des Auswahlaxioms für die klassische Mathematik, so etwa die Existenz einer Basis für einen jeden Vektorraum und die Existenz einer nicht Lebesgue-meßbaren Menge von reellen Zahlen.

Unter Ausnutzung des Auswahlaxioms zeigen wir im neunten Kapitel, daß sich jeder Menge eindeutig eine Ordinalzahl zuordnen läßt, die die „Größe“, auch „Kardinalität“, dieser Menge mißt, nämlich die kleinste Ordinalzahl, die bijektiv auf die fragliche Menge abgebildet werden kann. Insbesondere werden hierbei auch unendliche Mengen differenziert gemessen. Jede Ordinalzahl, die Kardinalität einer Menge ist, bezeichnen wir als Kardinalzahl. Wir analysieren die Klasse der Kardinalzahlen und sehen insbesondere, daß sie durch die „$\aleph$-Hierarchie“ aufsteigend ausgeschöpft wird.

Wie man mit Kardinalzahlen rechnet, wird im zehnten Kapitel gezeigt. Wir können Kardinalzahlen addieren, multiplizieren und exponieren. Die fundamentalen Rechenregeln dieser Operationen werden hergeleitet. Für feinere Analysen im Bereich der Kardinalzahlarithmetik wird der Begriff der konfinalen Teilmenge einer Kardinalzahl eingeführt. Wir werfen auch einen Blick auf „Große Kardinalzahlen“; das sind Kardinalzahlen, die sehr starke „Abgeschlossenheitseigenschaften“ erfüllen.

Im elften Kapitel beschäftigen wir uns mit Kombinatorik im Bereich der unendlichen Mengen. Hier beweisen wir den Satz von Ramsey und den allgemeinen Δ-System-Satz. Wir führen auch die Begriffe der abgeschlossenen und der stationären Teilmenge einer Kardinalzahl ein und analysieren weitere Große Kardinalzahlen.

Im zwölften Kapitel führen wir den Begriff des Filters ein. Filter sind Mengen, die bestimmte Objekte als „klein“ bzw. „groß“ klassifizieren. Von besonderer Wichtigkeit sind Ultrafilter auf Potenzmengen. Diese entscheiden für jede Teilmenge, ob diese „groß“ ist, d.h., zum Ultrafilter gehört, oder ob sie „klein“ ist, d.h., nicht zum Ultrafilter gehört. Wir untersuchen die Existenz derartiger Ultrafilter. Mit Hilfe von Ultrafiltern führen wir eine weitere Familie Großer Kardinalzahlen ein, die „meßbaren“ Kardinalzahlen.

Damit endet der erste Teil unserer Reise in die Mengenlehre. Wir haben bisher in naiver Weise ein Axiomensystem eingeführt und das durch dieses Axiomensystem spezifizierte mathematische Universum erkundet. Hierbei haben wir – wiederum in naiver Weise – aus den Axiomen Folgerungen abgeleitet und die Mathematik mengentheoretisch aufgebaut. Wir formalisieren nun die Grundbegriffe der Mathematischen Logik mengentheoretisch und beweisen ihre grundlegendsten Resultate.

Zunächst formalisieren wir im dreizehnten Kapitel den Begriff der „mathematischen Struktur“ im mathematischen Universum. Eine Struktur ist eine Menge A zusammen mit gewissen ausgezeichneten Funktionen $f\colon A^n \to A$, Relationen $R \subset A^m$ und Elementen $c \in A$ (Konstanten). Beispiele für Strukturen sind z.B. Gruppen, Ringe und Körper.

Um Eigenschaften mathematischer Strukturen zu beschreiben, führen wir im vierzehnten Kapitel den Begriff der „formalen Sprache“ ein und untersuchen Terme und Formeln.

Ein Modell einer Formelmenge Φ ist eine mathematische Struktur, in der jede Formel $\varphi \in \Phi$ gilt. Was hierunter formal zu verstehen ist, klärt das fünfzehnte Kapitel.

Wie man aus einer Menge von Formeln eine Aussage ableitet, erklärt das sechzehnte Kapitel durch Einführung des Sequenzenkalküls. Dieser Kalkül besteht aus gewissen „Regeln“; eine Aussage φ kann aus einer Formelmenge Φ abgeleitet werden, wenn man durch endlich-oft faches Anwenden von endlich vielen dieser Regeln auf die Formeln aus Φ und auf bereits aus Φ abgeleitete Aussagen in endlich vielen Schritten zu φ gelangen kann. Wir zeigen, daß der von uns angegebene Kalkül „korrekt“ ist, d.h., daß alles, was aus einer Formelmenge Φ abgeleitet werden kann, in jeder „Situation“ gilt, in der auch die Formeln aus Φ gelten. Ein Kalkül, der aus den Körperaxiomen die Eigenschaft $1 + 1 = 0$ ableitet, ist offenbar nicht adäquat, da im Körper der reellen Zahlen die Körperaxiome gelten, die Aussage $1 + 1 = 0$ aber falsch ist. Wir können dies auch so ausdrücken, daß „erfahrungsgemäß“ $1+1 = 0$ nicht aus den Körperaxiomen folgt.

Um zu beweisen, daß unser Sequenzenkalkül auch „vollständig“ ist, d.h., daß jede Aussage φ, die „erfahrungsgemäß“ aus einer Formelmenge folgt, aus dieser auch abgeleitet werden kann, verifizieren wir im siebzehnten Kapitel den GÖDELschen Vollständigkeitssatz. Als Konsequenz erhalten wir u.a. den Endlichkeitssatz (wenn eine Aussage aus einer unendlichen Formelmenge folgt, so wird dies bereits von endlich vielen Formeln der Menge bewirkt) und gewisse LÖWENHEIM-SKOLEM-Sätze.

Wir beenden unseren Ausflug in die Mathematische Logik mit einer Einführung in die Modelltheorie. Wir untersuchen im achtzehnten Kapitel Axiomatisierbarkeitsfragen. Insbesondere analysieren wir für gewisse Klassen von Modellen, ob eine vorhandene Axiomatisierung mit unendlich vielen Formeln durch eine Axiomatisierung mit nur endlich vielen Formeln ersetzt werden kann. Dies beantworten wir insbesondere für die Modellklasse der algebraisch abgeschlossenen Körper negativ und geben einen elementaren Beweis hierfür an. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der „Kette von Modellen“ ein. Ferner analysieren wir mathematische Theorien auf „Vollständigkeit“. Wir beschließen dieses Kapitel mit einer knappen Einführung in die Nichtstandard-Analysis.

Im neunzehnten und letzten Kapitel des zweiten Teils benutzen wir Ultrafilter zur Konstruktion mathematischer Strukturen. Mit den in diesem Kapitel entwickelten Methoden geben wir auch einen neuen Beweis des Endlichkeitssatzes, der ohne Rückgriff auf einen Sequenzenkalkül auskommt.

Im Abschnitt „Axiomatische Mengenlehre“ untersuchen wir Eigenschaften von Axiomensystemen der Mathematik.

Nachdem wir im zwanzigsten Kapitel einen kurzen Blick auf von **ZFC** verschiedene Ansätze der Axiomatisierung der Mengenlehre geworfen haben, wenden wir uns im einundzwanzigsten Kapitel den GÖDELschen Unvollständigkeitssätzen zu. Diese Sätze zeigen fundamentale Grenzen der axiomatischen Methode in der Mathematik auf. Nach dem ersten GÖDELschen Unvollständigkeitssatz ist es unmöglich, ein **ZF** umfassendes Axiomensystem anzugeben, das jede Aussage der Sprache der Mengenlehre als „wahr“ oder „falsch“ klassifiziert. M.a.W.: haben wir irgendein Axiomensystem für die Mathematik vorliegen, so gibt es eine mathematische Aussage, die auf der Grundlage dieses Systems nicht bewiesen, aber auch nicht widerlegt werden kann. Der zweite GÖDELsche Unvollständigkeitssatz besagt, daß die Widerspruchsfreiheit der Mathematik nicht mathematisch bewiesen werden kann. Wir können also niemals ausschließen, daß es zwei sich widersprechende mathematische Aussagen gibt, die beide mathematisch korrekt bewiesen werden können. (Wir glauben fest und unerschütterlich daran, daß es zwei derartige Aussagen **nicht** gibt.) Um diese beiden wichtigen Resultate zu verifizieren, wollen wir die Resultate und Methoden der Mathematischen Logik auf **ZF** bzw. **ZFC** anwenden. Hierzu müssen wir **ZF** bzw. **ZFC** mengentheoretisch formalisieren. Dies geschieht – grob gesprochen – wie folgt: wir ordnen jeder $\in$-Formel φ eine Menge $\ulcorner\varphi\urcorner$ so zu, daß $\ulcorner\varphi\urcorner$ eine Formel im Sinn der im zweiten Teil entwickelten Mathematischen Logik ist; auf ähnliche Weise erhalten wir aus **ZF** bzw. **ZFC** Mengen $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$ bzw. $\ulcorner\mathbf{ZFC}\urcorner$, die Axiomensysteme im Sinn der Mathematischen Logik sind.

Die im zweiundzwanzigsten Kapitel eingeführten Begriffe und die hier entwickelten Techniken sind für die weiteren Untersuchungen in diesem Text von fundamentaler Bedeutung. Um den modelltheoretischen Begriff „Modell“ auf klassengroße Modelle der Mengenlehre verallgemeinern zu können, führen wir die Begriffe der „relativierten“ Formeln und Terme ein. Eine relativierte Formel ist eine $\in$-Formel, in der der Laufbereich eines jeden Quantors auf eine Teilklasse des mathematischen Universums eingeschränkt ist. Die Gültigkeit einer auf eine Klasse W relativierten Formel bedeutet, daß die durch diese Formel spezifizierte mathematische Eigenschaft gilt, wenn man W als das gesamte mathematisches Universum ansieht. Von besonderer Bedeutung sind dann die Eigenschaften, deren Gültigkeit nicht vom jeweiligen mathematischen Universum abhängen; diese heißen „absolute Eigenschaften“. Ein Term der Mengenlehre ist ein durch eine $\in$-Formel definierbares mathematisches Objekt; je nach dem mathematischen Universum W, in dem dieser Term „berechnet“ wird (d.h., man bildet den auf die Klasse W relativierten Term), kann sich das Aussehen dieses Objektes ändern. Ist das Aussehen des Objektes vom jeweiligen Universum unabhängig, sprechen wir von einem „absoluten Term“. Wir untersuchen exemplarisch, welche Axiome in den Stufen der VON NEUMANN-Hierarchie gelten und stellen ein paar Konsistenzbetrachtungen in Hinsicht auf die Existenz Großer Kardinalzahlen an.

Da wir nach den GÖDELschen Unvollständigkeitssätzen keine absoluten Konsistenzbeweise der Art „**ZF** ist zusammen mit dem Axiom φ nicht widerspruchsvoll“ erhoffen dürfen, interessieren wir uns im Bereich der Axiomatischen Mengenlehre für „relative Konsistenzresultate“ der Art „wenn **ZF** nicht widerspruchsvoll ist, so ist auch **ZF** zusammen mit dem Axiom φ widerspruchsfrei“. Wie solche relativen Konsistenzbeweise geführt werden können, zeigt das dreiundzwanzigste Kapitel. Wir untersuchen die beweistheoretischen Grundlagen der beiden wichtigsten Verfahren zur Führung relativer Konsistenzbeweise. Diese Verfahren sind die „Methode der inneren Modelle“ und die „Methode der abzählbaren, transitiven Modelle“. In diesem Zusammenhang beweisen wir den LÉVYschen Reflexionssatz, aus dem wir u.a. folgern, daß **ZFC** nicht endlich axiomatisierbar ist.

Als Anwendung der Methode der inneren Modelle beweisen wir im vierundzwanzigsten Kapitel m.H. des inneren Modelles HOD der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen, daß **ZFC** konsistent ist, wenn **ZF** es ist, kurz, daß das Auswahlaxiom in Gegenwart von **ZF** auf keine Widersprüche führt.

Im vierten Teil wenden wir uns dem methodischen Teil der Forcing-Methode zu. Mit ihrer Hilfe können relative Konsistenzbeweise der Art „wenn **ZFC** widerspruchsfrei ist, so ist auch **ZFC** zusammen mit φ widerspruchsfrei“ geführt werden; hierbei ist φ eine $\in$-Formel. Die Grundidee dieser Methode besteht darin, ein abzählbares Modell M der Mengenlehre durch „kontrollierte Hinzufügung“ neuer Elemente so zu modifizieren, daß einerseits **ZFC** in dieser Erweiterung gilt, andererseits in dieser Erweiterung auch φ richtig ist.

Im fünfundzwanzigsten Kapitel entwickeln wir grundlegende Begriffe der Forcing-Methode und zeigen, wie mathematische Objekte m.H. geeigneter Filter auf geeigneten Halbordnungen konstruiert werden können. Derartige Filter heißen „generisch“. Wir untersuchen ein Beispiel aus der Rekursionstheorie (Existenz unvergleichbarer TURING-Grade) und der Modelltheorie (Typenübergehungssatz).

In Anwesenheit von „MARTINs Axiom“ wenden wir im sechsundzwanzigsten Kapitel Konstruktionsmethoden m.H. generischer Filter auf Fragestellungen der Maßtheorie (Additivität des LEBESGUE-Maßes bei überabzählbaren Vereinigungen), der Topologie (Magerheit der Vereinigung überabzählbar vieler magerer Mengen von reellen Zahlen) und Kombinatorik (Berechnung von 2^κ für $\kappa < 2^{\aleph_0}$ sowie Bestimmung der Kardinalitäten maximaler, fast-disjunkter Teilmengen von Mengen natürlicher Zahlen) an.

Im siebenundzwanzigsten Kapitel definieren wir, was eine „generische“ Erweiterung $M[G]$ eines abzählbaren Modelles M der Mengenlehre ist und studieren erste, einfache Eigenschaften von $M[G]$. (Hierbei ist G ein generischer Filter.) Sehr vereinfacht gesprochen erhalten wir $M[G]$ aus M, indem wir jedes Element x von M als Symbol für ein Element y von $M[G]$ auffassen; wir kommen von x zu y, indem wir eine von G induzierte Funktion auf x anwenden. Wir sagen, y ist die G-Interpretation von x, und nennen x den M-Namen von y.

Um die Struktur von $M[G]$ genauer analysieren zu können, führen wir im achtundzwanzigsten Kapitel die Forcingrelation $\Vdash$ ein, die wir innerhalb des Gesamtuniversums der Mengenlehre definieren. Wir zeigen, daß diese Relation durch eine in M definierbare ersetzen können und verifizieren, daß in einer generischen Erweiterung $M[G]$ von M genau die Eigenschaften gelten, deren Gültigkeit durch die Forcingrelation erzwungen wird. (Dieses „Forcing-Theorem“ ist von immenser Bedeutung.)

Im neunundzwanzigsten Kapitel sehen wir, daß **ZFC** in $M[G]$ erfüllt ist. Mehr noch: $M[G]$ ist das kleinste Obermodell von M, in dem **ZFC** gilt, das alle Elemente seiner Elemente enthält (Klassen mit dieser letztgenannten Eigenschaft heißen „transitiv“) und das G als Element besitzt.

Sehr wichtig bei Forcingkonstruktionen ist es, daß Kardinalitäten beim Übergang von M zu $M[G]$ auf kontrollierte Art und Weise behandelt werden. Wir untersuchen deshalb im dreißigsten Kapitel, wie sich Kardinalzahlen bei diesem Übergang verhalten. Insbesondere leiten wir Kriterien her, wann sich Kardinalzahlen hierbei nicht verändern. Wir zeigen ferner auf, daß „geeigneten“ Elementen von $M[G]$ kanonische Namen zugeordnet werden können, was uns später in die Lage versetzt, Kardinalitäten von Elementen von $M[G]$ ausrechnen zu können.

Im einundreißigsten Kapitel zeigen wir mit Hilfe der Forcing-Methode die relative Konsistenz von

ZFC + **CH** und **ZFC** + ¬ **CH**; hierbei ist **CH** die von Cantor aufgestellte Kontinuumshypothese: jede Menge reeller Zahlen ist entweder gleichmächtig zu einer Menge natürlicher Zahlen oder ist gleichmächtig zur Menge aller reeller Zahlen.

Mit den im vorhergehenden Kapitel konstruierten Modellen und einer leichten Verallgemeinerung der Klasse der erblich-ordinalzahldefinierbaren Mengen zeigen wir im zweiunddreißigsten Kapitel die relative Konsistenz der Negation des Auswahlaxioms (mit **ZF**): wir konstruieren hierzu in einer geeigneten generischen Erweiterung $M[G]$ ein Modell von **ZF**, ein sog. „Permutationsmodell“, in dem das Auswahlaxiom nicht gilt.

Im dreiunddreißigsten Kapitel geben wir eine Einführung in iterierte Forcings. Bei diesen werden unendlich lange Ketten von Forcingkonstruktionen hintereinander ausgeführt.

Nach einer Analyse kombinatorischer Eigenschaften des bei dieser „Kettenkonstruktion“ entstehenden „Zielmodells“ im vierunddreißigsten Kapitel, zeigen wir im fünfunddreißigsten Kapitel, wie wir m.H. eines geeigneten iterativen Forcings ein „nicht-triviales“ Modell von **ZFC** zusammen mit Martins Axiom gewinnen. Wie wir sehen werden bedeutet hier „nicht-trivial“, daß in dem fraglichen Modell die Kontinuumshypothese verletzt ist.

Aber kehren wir nun ganz an den Anfang zurück.

Teil I.
Naive Mengenlehre.

2 Klassen und einfache Mengenaxiome.

2.1 Die Sprache der Mengenlehre

Erstes Ziel dieses Kapitels ist es, eine Sprache zu entwickeln, in der wir „mathematische Eigenschaften" ausdrücken können. Die Sprache soll aus gewissen Zeichenreihen über einem geeigneten Zeichenvorrat (Alphabet) bestehen, die nach noch anzugebenden Regeln gebildet sind. Welcher Zeichenvorrat und welche Regeln sind adäquat? Wie wir weiter unten an verschiedenen Stellen andeuten, ist es möglich, die gesamte Mathematik mengentheoretisch aufzubauen. Jede mathematische Eigenschaft kann dann als Aussage über Mengen verstanden werden. Deshalb benötigen wir eine Sprache, die Aussagen über Mengen ermöglicht, andererseits aber auch keine Parameter zuläßt, die außerhalb der Mengentheorie liegen. (Eine Aussage wie etwa

$$x = 0, \textit{ falls es regnet; } x = 1, \textit{ falls die Sonne scheint;}$$

werden wir nicht als mathematische Eigenschaft (von x) auffassen.) Insbesondere wird diese Sprache der Mengenlehre dazu dienen festzulegen, was unter einer „Menge" zu verstehen ist. Um aber zu entscheiden, welchen Zeichenvorrat und welche Regeln wir für den Aufbau dieser Sprache wählen sollen, müssen wir vorher bereits intuitiv erfaßt haben, was eine „Menge" eigentlich sein soll. Hierzu dient uns folgende, von Georg Cantor[1] stammende Charakterisierung:[2]

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Wir stellen uns auf den Standpunkt, daß als Elemente von Mengen nur Mengen selbst in Frage kommen. Die Sprache der Mengenlehre muß dann ausdrücken können, daß eine Menge x ein Element einer Menge y ist ($x \in y$) und daß zwei Mengen gleich sind ($x = y$). Alle komplizierteren Eigenschaften lassen sich aus diesen „atomaren" Eigenschaften konstruktiv gewinnen: es ist mit unserer Intuition gut vereinbar, daß jede mathematische Eigenschaft (d.i. jede Aussage über Mengen) durch eine „$\in$-Formel" ausgedrückt werden kann, worunter wir das folgende verstehen:

2.1 Definition Eine Zeichenreihe φ ist genau dann eine **$\in$-Formel**, wenn sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) $x = y$
(ii) $x \in y$
(iii) *nicht* ψ
(iv) ψ *und* χ
(v) ψ *oder* χ
(vi) ψ *impliziert* χ
(vii) ψ *ist äquivalent zu* χ
(viii) *für alle* x *gilt* ψ
(ix) *es existiert ein* x*, so daß* ψ *gilt.*

Hierbei sind x und y Variablen und ψ und χ sind wiederum $\in$-Formeln.

[1] Georg Cantor (3.3.1845, St. Petersburg–6.1.1918, Halle/Saale); Studium von 1862–1867 in Zürich, Göttingen und Berlin, hier u.a. bei Weierstrass, Kummer und Kronecker; Promotion 1867 bei Kummer; anschließend Tätigkeit als Mathematiklehrer in Berlin; 1869 Habilitation in Halle, nachfolgend zunächst Privatdozent am Mathematischen Seminar der Philosophischen Fakultät der Universität Halle; ab 1872 außerordentlicher, ab 1879 ordentlicher Professor für Mathematik an der Universität Halle; 1890 Gründung der Deutschen Mathematikervereinigung, nachfolgend deren erster Vorsitzender; 1913 Emeritierung in Halle. In einer Vielzahl von Arbeiten, die er ab Mitte der siebziger Jahre des 19. Jahrhunderts veröffentlicht, wird Cantor zum Begründer der Mengenlehre.

[2] siehe [3], p. 282

Um die Notation zu vereinfachen, führen wir einige Abkürzungen ein. Wir schreiben:
– $\neg\psi$ statt *nicht* ψ; $x \notin y$ statt $\neg\, x \in y$; $x \neq y$ statt $\neg\, x = y$
– $(\psi \wedge \chi)$ statt ψ *und* χ
– $(\psi \vee \chi)$ statt ψ *oder* χ
– $(\psi \rightarrow \chi)$ statt ψ *impliziert* χ
– $(\psi \leftrightarrow \chi)$ statt ψ *ist äquivalent zu* χ
– $\forall x\psi$ statt *für alle* x *gilt* ψ
– $\exists x\psi$ statt *es existiert ein* x*, so daß* ψ *gilt.*

Wir nennen $\forall$ den **Allquantor** und $\exists$ den **Existenzquantor**. Die Variable unmittelbar nach dem Quantor (in diesem Fall x) bezeichnen wir auch als Laufvariable des Quantors. Kommt eine Variable x an einer Stelle der $\in$-Formel φ nicht als Laufvariable eines Quantors vor, so sagen wir, x ist eine **freie Variable** von φ. Eine Schreibweise wie $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ bedeutet, daß die freien Variablen der $\in$-Formel φ unter den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen. Statt $x_1, \ldots, x_n$ schreiben wir manchmal auch kurz $\vec{x}$.

Klammern dienen der eindeutigen Lesbarkeit einer $\in$-Formel. Um die Darstellung von $\in$-Formeln aber durch zu viele Klammern nicht zu unübersichtlich zu machen, vereinbaren wir, Klammern dort fort zu lassen, wo sie für das Verständnis unwesentlich sind.

Wir gehen davon aus, daß wir einen unendlichen Vorrat an Variablen haben, genau eine für jede natürliche Zahl. Diese Variablen seien mit v_0, v_1, v_2, v_3 usw. benannt. Um die Notation zu vereinfachen, haben wir bisher und werden ggf. auch weiterhin mit Variablen arbeiten, die mit x, y, z, … oder auch x_1, x_2, … bezeichnet sind. Diese stehen dann stellvertretend für Variablen aus der Liste der v_i.

Wir vereinbaren folgende „Quantoreneinsparregeln“: stehen in einer $\in$-Formel mehrere gleiche Quantoren hintereinander, so schreiben wir manchmal nur einen derartigen Quantor hin und fügen ihm die Laufvariablen der einzelnen Quantoren durch Kommata getrennt an. So schreiben wir etwa $\forall x, y, z\ \varphi$ statt $\forall x \forall y \forall z\ \varphi$ oder $\exists x_1, x_2\ \varphi$ statt $\exists x_1 \exists x_2\ \varphi$. Statt $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir auch $\forall \vec{x} \varphi(\vec{x})$; analog verfahren wir beim Existenzquantor. Wir vereinbaren außerdem, daß eine Aussage wie „es gilt $\varphi(\vec{x})$“ abkürzend steht für „es gilt $\forall \vec{x} \varphi(\vec{x})$“.

Schließlich definieren wir „beschränkte Quantoren“: statt $\forall x(x \in y \rightarrow \varphi)$ schreiben wir manchmal $\forall x \in y\ \varphi$ und statt $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ schreiben wir manchmal $\exists x \in y\ \varphi$. Interpretation: der Laufbereich von x ist auf (die Elemente von) y beschränkt. Satt $\forall x_1 \in y \ldots \forall x_n \in y\ \varphi$ schreiben wir auch $\forall x_1, \ldots, x_n \in y\ \varphi$ oder $\forall \vec{x} \in y\ \varphi$; analog verfahren wir beim Existenzquantor.

Um Mengen mit gleichen Eigenschaften zusammen zu fassen, führen wir den Begriff des Klassentermes ein:

2.2 Definition Ein **Klassenterm** ist eine Zeichenreihe der Form $\{x \mid \varphi\}$, wobei φ eine $\in$-Formel ist.

Auch bei Klassentermen macht der Begriff „freie Variable“ Sinn: wir nennen eine Variable x **freie Variable** des Klassentermes $\{z \mid \varphi\}$, falls x von z verschieden und eine freie Variable von φ ist. Bei Klassentermen verwenden wir ebenfalls manchmal die Schreibweisen $t(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $t(\vec{x})$, um freie Variablen von t explizit zu machen.

Wir bauen nun Klassenterme in die Sprache der Mengenlehre ein. Dies soll so geschehen, daß hierdurch die Sprache im Prinzip nicht vergrößert wird: jede Formel, die einen Klassenterm enthält, steht nur als „Abkürzung“ für eine $\in$-Formel. Unsere Idee, daß Klassenterme dazu dienen, Mengen mit gleichen Eigenschaften zusammen zu fassen, bedeutet doch, daß eine Zeichenreihe wie $x \in \{z \mid \varphi(z)\}$ so zu interpretieren ist, daß φ auf x zutrifft; diese Zeichenreihe sollte also als die $\in$-Formel interpretiert werden, die man erhält, wenn man in φ jedes freie Vorkommen von z durch x ersetzt (substituiert). Wir müssen allerdings etwas exakter definieren, da wir verhindern müssen, daß ein neu eingesetztes x an irgendeiner Stelle der neu entstandenen Formel an einen Quantor gebunden ist.

2.3 Definition Sei φ eine $\in$-Formel. Sind x und y Variablen, so daß weder x noch y in φ Laufvariable eines Quantors ist,[3] dann sei $\varphi\frac{x}{y}$ diejenige $\in$-Formel, die man erhält, wenn man in φ jedes Auftreten von y durch x ersetzt. Hiermit definieren wir:

[3] Dies ist keine Einschränkung, da wir ggf. die Laufvariablen der Quantoren austauschen können.

(a) $x \in \{y \,|\, \varphi\} \;:\equiv\; \varphi\frac{x}{y}$
(b) $x = \{y \,|\, \varphi\} \;:\equiv\; \forall y\,(y \in x \leftrightarrow \varphi)$
(c) $\{y \,|\, \varphi\} = x \;:\equiv\; x = \{y \,|\, \varphi\}$
(d) $\{y \,|\, \varphi\} = \{z \,|\, \psi\} \;:\equiv\; \forall x\,(\varphi\frac{x}{y} \leftrightarrow \psi\frac{x}{z})$
(e) $\{y \,|\, \varphi\} \in x \;:\equiv\; \exists z\,(z \in x \wedge z = \{y \,|\, \varphi\})$
(f) $\{y \,|\, \varphi\} \in \{z \,|\, \psi\} \;:\equiv\; \exists x\,(x = \{y \,|\, \varphi\} \wedge x \in \{z \,|\, \psi\})$.

2.4 Bemerkung (a) Die Schreibweise $A :\equiv B$ bedeutet, daß die Zeichenreihe A als Abkürzung für die Zeichenreihe B steht. (Manchmal benutzen wir auch die Schreibweise $A \equiv: B$; dies bedeutet, daß die Zeichenreihe B als Abkürzung für die Zeichenreihe A steht.) Durch endlich oft – fache Anwendung der Regeln (a)—(f) läßt sich jede $\in$-Formel, in die Klassenterme eingesetzt sind, in eine $\in$-Formel umarbeiten.

(b) Ist $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel, so schreiben wir statt $\varphi\frac{y}{x}$ manchmal auch nur kurz $\varphi(y, \vec{w})$.

(c) Im zweiten Teil diese Textes, in dem wir uns mit der mathematischen Logik befassen, werden wir genauer erklären, was es mit der Substitution auf sich hat: in Definition 16.1 auf Seite 123 geben wir eine formale Definition dieser Operation an.

Wir führen Namen für bestimmte Formeln und Klassenterme ein; bei der Namensgebung lassen wir uns von den in der Mathematik üblichen Bezeichnungen leiten.

2.5 Definition Für Variablen x, y und z definieren wir:
(a) $\emptyset :\equiv \{x \,|\, x \neq x\}$ heißt **leere Klasse** bzw. **leere Menge**.
(b) $x \subset y :\equiv \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$
(c) $\{x\} :\equiv \{y \,|\, y = x\}$ heißt **Einermenge** x.
(d) $\{x, y\} :\equiv \{z \,|\, z = x \vee z = y\}$ heißt **Paarmenge** von x und y.
(e) $x \cap y :\equiv \{z \,|\, z \in x \wedge z \in y\}$ heißt **Schnitt** von x und y.
(f) $x \cup y :\equiv \{z \,|\, z \in x \vee z \in y\}$ heißt **Vereinigung** von x und y.
(g) $x \setminus y :\equiv \{z \,|\, z \in x \wedge z \notin y\}$ heißt **Differenz** von x und y.
(h) $\overline{x} :\equiv \{z \,|\, z \notin x\}$ heißt **Komplement** von x.
(i) $\bigcap x :\equiv \{z \,|\, \forall y\; y \in x \rightarrow z \in y\}$ heißt **Schnitt** von x.
(j) $\bigcup x :\equiv \{z \,|\, \exists y\; y \in x \wedge z \in y\}$ heißt **Vereinigung** von x.
(k) $\mathrm{Pot}(x) :\equiv \{z \,|\, z \subset x\}$ heißt **Potenzklasse** von x.
(l) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} :\equiv \{z \,|\, z = x_1 \vee z = x_2 \vee \ldots \vee z = x_n\}$.
Hierbei sind x_1, x_2, …, x_n endlich viele konkret vorgegebene Variablen.
(m) $V :\equiv \{x \,|\, x = x\}$ heißt **Klasse aller Mengen**.
(n) x **ist eine Menge** $:\equiv x \in V$.

Indem man in den obigen Definitionen die freien Variablen durch Klassenterme ersetzt, erhält man Definitionen für neue Klassenterme.

2.6 Bemerkung (a) Die Definition von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bedarf einer Erläuterung: Diese Definition ist als unendliches *Schema* von Definitionen zu verstehen, wobei genau genommen für jede natürliche Zahl n eine Definition des für dieses n zu erklärenden Klassentermes hinzuschreiben ist. Man hat dieses Schema also als eine unendlich lange Liste von Definitionen anzusehen, die wie folgt beginnt:
$\{x_1\} :\equiv \{x \,|\, x = x_1\}$
$\{x_1, x_2\} :\equiv \{x \,|\, x = x_1 \vee x = x_2\}$
$\{x_1, x_2, x_3\} :\equiv \{x \,|\, x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3\}$
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} :\equiv \{x \,|\, x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3 \vee x = x_4\}$
$\ldots$.

(b) Bei den soeben vorgenommenen Definitionen handelt es sich um rein formale Bildungen von Zeichenreihen. Ihren *Sinn* bekommen unsere Bezeichnungen erst im Kontext eines Axiomensystems, welches die Struktur des Universums spezifiziert, über das $\in$-Formeln und Klassenterme sprechen. Insbesondere können wir erst innerhalb dieses Axiomensystems Sprechweisen wie „leere Menge“ oder „Einermenge“ inhaltlich rechtfertigen.

2.7 Definition Sei $\{x \mid \varphi\}$ ein Klassenterm. $\{x \mid \varphi\}$ ist eine **echte Klasse** $:\equiv \{x \mid \varphi\} \notin V$.

2.8 Lemma *Sei t ein Klassenterm. t ist eine echte Klasse* $\iff \forall x \neg x = t$.
Hierbei bedeutet $\varphi \iff \psi$, daß die Aussage $\varphi \leftrightarrow \psi$ gilt.

Beweis. Man überlegt sich aufgrund der angegebenen Definitionen leicht die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

$$t \notin V \iff \neg t \in V \iff \neg \exists x(x = t \wedge x \in V) \iff \neg \exists x(x = t \wedge x = x) \iff \neg \exists x\, x = t,$$

letzteres, da die Aussage $x = x$ stets wahr ist. Wegen $\neg \exists x \varphi \iff \forall x \neg \varphi$ folgt hieraus die Behauptung.
QED

Wir führen Namen für weitere Klassenterme ein und formalisieren die uns konkret gegebenen natürlichen Zahlen:

2.9 Definition Sei n eine konkret vorgegebene natürliche Zahl. Wir definieren einen Klassenterm $\tilde{n}$ wie folgt: es sei $\tilde{0} :\equiv \emptyset$ und $\widetilde{n+1} :\equiv \tilde{n} \cup \{\tilde{n}\}$.

2.10 Bemerkung Die Definition der $\tilde{n}$ ist eine „metasprachliche Rekursion“: es wird ein metasprachliches[4] Verfahren zur Konstruktion des Klassentermes $\tilde{n}$ aus den für $k < n$ bereits konstruierten Klassentermen $\tilde{k}$ angegeben. Wie läßt sich diese metasprachliche Rekursion rechtfertigen? Wie wir in 5.3 sehen werden, gilt für die natürlichen Zahlen in dem durch das anzugebende Axiomensystem spezifizierte mathematische Universum V ein entsprechendes Rekursionsgesetz (in V). Dieses rechtfertigt unsere metasprachliche Rekursion in soweit, als wir uns auf den Standpunkt stellen können, daß wir, wenn wir Mathematik betreiben, also zum Beispiel die obigen Definitionen unter Rückgriff auf *unsere* natürlichen Zahlen vornehmen, selbst in einem derartigen (d.h., unseren gewählten Axiomen genügenden) Mengenuniversum arbeiten und somit auch für *unsere* konkret gegebenen natürlichen Zahlen ein entsprechendes Rekursionsgesetz haben; dieser Standpunkt ist vernünftig, da die Axiome aus unserer mathematischen Erfahrung und Intuition abgeleitet sind.

Alle bisher gemachten Definitionen sind, wie in 2.6 angedeutet, als rein formale Definition von gewissen Zeichenreihen zu verstehen. Insbesondere haben die Klassenterme $\tilde{n}$ a priori nichts mit irgendwelchen Zahlen zu tun. Um eine solche Beziehung herstellen zu können, müssen wir uns durch Angabe eines Axiomensystems erst ein „geeignetes“ mathematisches Universum erschaffen. Dabei werden wir *nicht* definieren, *was* eine Menge ist, was es bedeutet, Element einer Menge zu sein usw. Vielmehr werden wir durch die *Axiome* (Grundannahmen) Eigenschaften der $\in$-Relation festlegen und Existenzen von gewissen Mengen fordern. Das Axiomensystem soll so umfangreich sein, daß die gesamte „klassische“ Mathematik in dem durch die Axiome bestimmten Universum V formalisiert und durchgeführt werden kann. Wir werden sehen, daß unsere Axiome nur einen Teil von V in allen Einzelheiten fixiert, einen Teil jedoch, der groß genug ist, darin die „übliche“ Mathematik durchführen zu können. In V verbleiben, wie umfangreich auch immer wir unser Axiomensystem wählen, immer gewisse „Dunkelzonen“, über die wir allein aufgrund der Grundannahmen keine Aussagen machen können. Mehr noch, wir können in vielen Fällen unsere Grundannahmen auf verschiedene Weisen derart erweitern, daß sich diese Dunkelzonen erhellen, aber für jede Erweiterung ein unterschiedliches Bild liefern.

[4] d.h., nicht innerhalb eines formalen Systems durchgeführtes

2.2 Das System EML.

Wir beginnen mit ein paar einfachen Axiomen, die die mathematische Welt gerade soweit kennzeichnen, daß wir einfache Operationen in ihr vornehmen können. Deshalb wird das in der folgenden Definition angegebene System auch **EML** (**elementare Mengenlehre**) bzw. **EST** (**elementary set theory**) genannt.

2.11 Definition Das System **EML** besteht aus den folgenden vier Aussagen:

(Ex) $\exists v_0 \forall v_1 \neg v_1 \in v_0$
In Worten: es gibt eine Menge, die kein Element enthält.
Mengenexistenzaxiom

(Ext) $\forall v_0 \forall v_1 \big(\forall v_2 (v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1\big)$
In Worten: zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
Extensionalitätsaxiom

(Paar) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 \big(v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1)\big)$
In Worten: Zu je zwei Mengen existiert eine Menge, die genau diese beiden Mengen als Elemente hat.
Paarmengenaxiom

($\bigcup$-Ax) $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 (v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3)\big)$
In Worten: Die Vereinigung (der Elemente) einer jeden Menge ist wieder eine Menge.
Vereinigungsmengenaxiom

2.12 Bemerkung Mit Hilfe von Klassentermen und bereits definierten Formeln lassen sich die Axiome von **EML** in prägnanterer Form schreiben:

(a) (**Ex**) $\iff \emptyset \in V$.
(Speziell: Wenn **(Ex)** gilt, ist die leere Klasse eine Menge, so daß die Bezeichnung **leere Menge** gerechtfertigt ist.)
(b) (**Ext**) $\iff \forall v_0 \forall v_1 \big((v_0 \subset v_1 \wedge v_1 \subset v_0) \rightarrow v_0 = v_1\big)$.
(c) (**Paar**) $\iff \forall v_0 \forall v_1 \ \{v_0, v_1\} \in V$.
(d) **($\bigcup$-Ax)** $\iff \forall v_0 \ \bigcup v_0 \in V$.

Beweis. Wir beweisen dies für **(Ex)**, die anderen Beweise verbleiben dem Leser zur Übung. Aus den oben angegebenen Definitionen folgt

$$\begin{aligned} \emptyset \in V &\iff \{x|x \neq x\} \in \{y|y = y\} \iff \exists a\big(a = \{x|x \neq x\} \wedge a \in \{y|y = y\}\big) \\ &\iff \exists a\big(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \neq x) \wedge a = a\big) \iff \exists a\big(\forall x \neg (x \in a)\big) \iff (\mathbf{Ex}) \end{aligned}$$

(Die vorletzte Äquivalenz gilt, da $x \neq x$ stets falsch und $a = a$ stets wahr ist.) QED

Von nun an setzen wir bis zum Ende dieses Kapitels EML voraus. Wenn wir im folgenden also eine Formulierung wie „es gilt φ" benutzen, bedeutet dies, daß sich aus den Axiomen des Systems **EML** die Aussage φ folgern läßt. Wir stellen nun einige fundamentale Resultate zusammen, deren Beweise in mehr oder weniger trivialen Umformungen bestehen.

2.13 Satz *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\emptyset \subset A \subset V$, *für jeden Klassenterm* A.
(b) $\emptyset \neq V$.
(c) Die Operationen $\cup$, $\cap$ *und* — *erfüllen die für diese Operationen aus dem mathematischen Alltag bekannten Rechenregeln. Genauer, es gelten die folgenden Gesetze einer* **Booleschen Algebra**[5]

[5]nach George Boole (2.11.1815, Lincoln–8.12.1864, Bellintemple); Boole beschäftigt sich als Autodidakt mit der Mathematik. Er wendet erstmals algebraische Methoden auf die Logik an und wird so zum Begründer der modernen formalen Logik. Obwohl Boole keinen akademischen Grad besitzt, wird er 1849 als Professor an das Queen's College in Cork berufen.

(und damit alle aus diesen ableitbaren Aussagen; dieses sind gerade die Regeln, die wir gemeinhin beim „Rechnen mit Mengen“ anwenden):

(i) $x \cap y = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$ *(Kommutativität)*

(ii) $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$, $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ *(Assoziativität)*

(iii) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$, $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ *(Distributivität)*

(iv) $x \cap (x \cup y) = x$, $x \cup (x \cap y) = x$ *(Idempotenz, Verschmelzung)*

(v) $\emptyset \cap x = \emptyset$, $V \cup x = V$

(vi) $x \cap \overline{x} = \emptyset$, $x \cup \overline{x} = V$.

Beweis. zu (a). Da die Prämisse stets falsch ist, gilt $x \neq x \rightarrow x \in A$ für alle x. $\forall x(x \neq x \rightarrow x \in A)$ bedeutet aber gerade $\emptyset \subset A$. Da die Konklusion stets wahr ist, gilt $x \in A \rightarrow x = x$ für alle x. $\forall x(x \in A \rightarrow x = x)$ bedeutet gerade $A \subset V$.

zu (b). Nach **(Ex)** gilt $\emptyset \in V$. Es genügt zu zeigen, daß $\emptyset \notin \emptyset$. Wäre dies doch der Fall, so würde $\exists x(x = \emptyset \wedge x \neq x)$ gelten, was nicht möglich ist, da das zweite Glied der Konjunktion stets falsch ist.

zu (c). Dies rechnet man leicht nach. QED

2.14 Satz *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

(b) $\bigcap \emptyset = V$.

(c) Für $a, b \in V$ *ist* $a \cup b = \bigcup\{a, b\} \in V$.

(d) $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$. *(Beachten Sie, daß wir nicht behaupten, daß* $a \cap b$ *eine Menge ist! Dies ist nämlich, wie wir ohne Beweis hier festhalten, allein auf der Basis von* **EML** *i.a. nicht der Fall.)*

Beweis. zu (a). Gäbe es $x \in \bigcup \emptyset$, so wäre $x \in y \in \emptyset$ für ein y. Solches y gibt es aber nicht.

zu (b). Da die Konklusion immer richtig ist, gilt $x = x \longrightarrow \forall z(z \in \emptyset \rightarrow x \in z)$ für alle x, und dies bedeutet $V \subset \bigcap \emptyset$.

zu (c). $\bigcup\{a, b\} \in V$ folgt sofort aus **(Paar)** und **($\bigcup$-Ax)**. Der Rest von (c) ist klar.

zu (d). Dies ist klar. QED

Im Kontext von **EML** können wir auch bereits Aussagen über unsere „formalisierten“ Zahlen $\tilde{n}$ machen:

2.15 Lemma *Sei* n *eine konkret vorgegebene natürliche Zahl. Dann ist* $\tilde{n} \in V$. *Ferner ist* $\tilde{0} = \emptyset$ *und* $\tilde{n} = \left\{\tilde{0}, \tilde{1}, \ldots, \widetilde{n-1}\right\}$ *im Fall* $n > 0$.

Beweis. Der Beweis muß im Prinzip für jedes konkret vorgegebene n separat geführt werden. Wir machen hierzu Induktion nach n. Dies ist natürlich *keine* Induktion *innerhalb* unseres Mengenuniversums V, sondern eine „metasprachliche Induktion“, die sich *außerhalb* von V abspielt. Daß wir ein solches „Induktionsprinzip“ anwenden können, ist zunächst nur intuitiv klar. Unser Vorgehen wird aber dadurch gerechtfertigt, daß wir später[6] in unserem mathematischen Universum V ein entsprechendes Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen *von* V beweisen; dieses rechtfertigt unsere metasprachliche Induktion in soweit, als wir uns auf den Standpunkt stellen können, daß wir, wenn wir Mathematik betreiben, selbst in einem derartigen (d.h., unseren gewählten Axiomen genügenden) Mengenuniversum arbeiten; dieser Standpunkt ist vernünftig, da die Axiome aus unserer mathematischen Erfahrung und Intuition abgeleitet sind.[7] Führen wir also unsere metasprachliche Induktion durch!

$n = 0$. Nach Definition ist $\tilde{0} \equiv \emptyset$, und dieses ist in V nach **(Ex)**.

$n \rightarrow n+1$. Nach Definition ist $\widetilde{n+1} \equiv \tilde{n} \cup \{\tilde{n}\}$. Aus der Induktionsvoraussetzung und **(Paar)** (und **(Ext)**) folgt sukzessive, daß die folgenden Klassenterme in V sind: $\tilde{n}$, $\{\tilde{n}\}$, $\{\tilde{n}, \{\tilde{n}\}\}$. Nach **($\bigcup$-Ax)** ist

[6]siehe 5.2 auf Seite 42

[7]Vergleiche hierzu auch unsere Ausführungen zur „metasprachlichen Rekursion“ in 2.10.

dann $\bigcup\{\tilde{n}, \{\tilde{n}\}\} \in V$, und diese Menge ist gerade $\widetilde{n+1}$. Aus der Induktionsvoraussetzung über $\tilde{n}$ folgt weiter $\widetilde{n+1} = \left\{\tilde{0}, \dots, \widetilde{n-1}\right\} \cup \{\tilde{n}\} = \{\tilde{0}, \dots, \tilde{n}\}$. QED

2.16 Bemerkung Das letzte Lemma ist ein unendliches Schema, nämlich eine unendliche Liste von Aussagen, die beginnt mit:
$\tilde{0} = \emptyset$
$\tilde{1} = \{\tilde{0}\}$
$\tilde{2} = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$
$\tilde{3} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}\}$
$\tilde{4} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}\}$

In nahezu allen Bereichen der Mathematik spielt der Begriff des geordneten Paares (x, y) eine fundamentale Rolle, sei es, daß Funktionen als gewisse Mengen geordneter Paare auftreten oder ein mehrdimensionaler Parameter in Form eines geordneten Paares oder gar eines n-Tupels angegeben wird. Wir geben hier eine mengentheoretische Formalisierung des geordneten Paares an, die die folgende *Grundeigenschaft geordneter Paare* erfüllt:

$$(x_0, x_1) = (y_0, y_1) \iff x_0 = y_0 \wedge x_1 = y_1.$$

Die von uns gewählte Formalisierung geht auf KURATOWSKI[8] zurück.

2.17 Definition $(x, y) :\equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$ heißt **geordnetes Paar** von x und y.

2.18 Bemerkung Auch andere Formalisierungen des geordneten Paares sind bekannt. So definierte etwa HAUSDORFF[9] wie folgt:

$$(x, y) :\equiv \{\{x, \tilde{1}\}, \{y, \tilde{2}\}\}.$$

2.19 Satz $(x, y) \in V$

BEWEIS. Durch Anwendung von **(Paar)** zeigt man nacheinander, daß die folgenden Klassenterme in V sind: $\{x\}$, $\{x, y\}$, $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. QED

2.20 Satz *Das* KURATOWSKI-*Paar hat die Grundeigenschaft geordneter Paare:* $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ *impliziert* $x_0 = x_1$ *und* $y_0 = y_1$.

BEWEIS. Gelte $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, d.h.,

(1) $\{\{x_0\}, \{x_0, y_0\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1. $x_0 = y_0$. Dann ist nach **(Ext)** $\{\{x_0\}, \{x_0, y_0\}\} = \{\{x_0\}\}$, und (1) wird zu

[8] KAZIMIERZ KURATOWSKI (2.2.1896, Warschau–18.6.1980, Warschau) Studium in Glasgow und ab 1915 in Warschau; 1921 Promotion bei WACŁAW FRANCISZEK SIERPIŃSKI (14.3.1882, Warschau–21.10.1969, Warschau), im gleichen Jahr Habilitation mit einer Arbeit zur Mengenlehre; ab 1927 außerordentlicher Professor in Lemberg; ab 1934 Professor an der Warschauer Universität; nach der von ihm initiierten Gründung des Mathematischen Instituts der Polnischen Akademie der Wissenschaften (1945) bis 1968 dessen Direktor. KURATOWSKIs Hauptarbeitsgebiet ist die Topologie, aber auch zur Maßtheorie, Verbandstheorie und Mengenlehre liefert er wichtige Beiträge.

[9] FELIX HAUSDORFF (8.11.1868, Breslau–26.1.1942, Bonn) Studium in Leipzig, Freiburg und Berlin; 1891 Promotion, 1895 Habilitation in Leipzig; 1902 a.o. Professor in Leipzig, 1910 in Bonn; 1913 ordentlicher Professor in Greifswald, dann von 1921 bis 1935 in Bonn; angesichts der drohenden Deportation in ein Konzentrationslager durch die deutschen Behörden scheidet HAUSDORFF 1942 gemeinsam mit seiner Frau freiwillig aus dem Leben. HAUSDORFF arbeitet in verschiedenen Bereichen der Mathematik. Seine wichtigsten Arbeitsgebiete sind Mengenlehre und Topologie. Sein Buch *Grundzüge der Mengenlehre* aus dem Jahr 1914, siehe [16], ist das erste systematische Lehrbuch der Mengenlehre und kann in seiner Bedeutung für die Verbreitung der Mengenlehre kaum überschätzt werden. In seiner Leipziger Zeit veröffentlicht HAUSDORFF unter dem Pseudonym PAUL MONGRÉ Schriften literarischen und philosophischen Inhalts.

(2) $\{\{x_0\}\} = \{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}$.

Durch Anwendungen von **(Ext)** ergibt sich hieraus $\{x_0\} = \{x_1\}$, also $x_0 = x_1$, sowie $\{x_0\} = \{x_1, y_1\}$, also $x_0 = x_1$ und $x_0 = y_1$. Damit ist $x_0 = x_1$ und $y_0 = y_1$ nachgewiesen.
Fall 2. $x_0 \neq y_0$. Nach **(Ext)** folgen aus (1)

(3) $\{x_0\} = \{x_1\}$ oder $\{x_0\} = \{x_1, y_1\}$.

sowie

(4) $\{x_0, y_0\} = \{x_1\}$ oder $\{x_0, y_0\} = \{x_1, y_1\}$.

Aus jeder der beiden Identitäten von (3) folgt $x_0 = x_1$ wegen **(Ext)**, so daß $x_0 = x_1$ nachgewiesen ist. Betrachte nun (4). Wäre hier die erste Identität wahr, so hätten wir nach **(Ext)** $x_0 = x_1 = y_0$, was der Voraussetzung von Fall 2 widerspricht. Somit ist in (4) die zweite Identität wahr; unter Einbeziehung des für Fall 2 bereits gezeigten ergibt sich dann $\{x_0, y_0\} = \{x_0, y_1\}$. Da nach Annahme $x_0 \neq y_0$ gilt, folgt hieraus nach **(Ext)** $y_0 = y_1$ und Fall 2 ist abgeschlossen. Damit ist alles gezeigt. QED

2.21 Bemerkung Dasselbe Resultat gilt für das Hausdorff-Paar.

Wir verallgemeinern nun die Definition des geordneten Paares auf beliebige n-Tupel.

2.22 Definition Es sei n eine konkret vorgegebene natürliche Zahl. $x_1, \ldots, x_n$ seien n vorgegebene Variablen. Wir definieren das **geordnete n-Tupel** $(x_1, \ldots, x_n)$ wie folgt: Setze $(x_1) :\equiv x_1$ im Fall $n = 1$ und $(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\equiv \big((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n\big)$ im Fall $n > 1$.

2.23 Bemerkung Obige Definition ist wieder eine *metasprachlichen Rekursion*. Wir haben dieses Definitionsverfahren in 2.10 gerechtfertigt.

Das folgende Resultat ist auf den ersten Blick sehr verwirrend und scheint der Erfahrung zu widersprechen.

2.24 Bemerkung Es ist möglich, daß $(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n)$ gilt, obwohl $m \neq n$ ist. Wähle etwa $m = 1$, $n = 2$. Dann ist nach obiger Definition $\big((z,z)\big) = (z,z)$, d.h., das 1-Tupel $\big((z,z)\big)$ stimmt mit dem 2-Tupel (z,z) überein. Dieses Problem kann gegebenenfalls durch eine leichte Modifikation in der Definition des n-Tupels abgefangen werden; wir gehen hierauf aber nicht näher ein.

Worin liegt der tiefere Grund für die eben beobachtete Auffälligkeit? Wenn wir im mathematischen Alltag von einem n-Tupel sprechen, so meinen wir im Prinzip eine Zuordnung, die jeder der n natürlichen Zahlen 0 bis $n-1$ (oder der n Zahlen 1 bis n) ein gewisses Objekt zuweist. Als Beispiel denke man etwa an einen als n-Tupel geschriebenen Vektor des $\mathbb{R}^n$; hier ist jeder der Zahlen 1 bis n die Bewegungsrichtung entlang der entsprechenden Koordinatenachse zugeordnet. Damit sind natürlich zwei Tupel unterschiedlicher Länge verschieden. In der von uns vorgenommenen Definition haben wir aber weder von einer Art „Zuordnung“ gesprochen noch haben wir uns auf natürliche Zahlen *unseres durch die Axiome gegebenen mathematischen Universums V* bezogen.[10] Die von uns gewählte Definition des n-Tupels besteht einfach in einer Iteration der Bildung geordneter Paare und bei deren Definition hat uns einzig und allein der Umstand geleitet, daß wir die Gültigkeit der Grundeigenschaft geordneter Paare sicherstellen wollten.

Die folgende Definition formalisiert eine häufig benutzte Form, um Klassenterme zu charakterisieren.

2.25 Definition Seien ein Klassenterm $t(\vec{x})$ und eine $\in$-Formel $\varphi(\vec{x})$ vorgegeben.
(a) Setze $\big\{t(\vec{x}) \bigm| \varphi(\vec{x})\big\} :\equiv \big\{y \bigm| \exists \vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \wedge y = t(\vec{x}))\big\}$.
(b) Setze $\big(t(\vec{x}) \bigm| \varphi(\vec{x})\big) :\equiv \big\{(\vec{x}, t(\vec{x})) \bigm| \varphi(\vec{x})\big\}$. $\big(t(\vec{x}) \bigm| \varphi(\vec{x})\big)$ heißt **Sequenz** aller $t(\vec{x})$ mit $\varphi(\vec{x})$.

[10] Es ist allein auf der Grundlage von **EML** sogar unmöglich überhaupt zu beweisen, daß in V eine *Menge der natürlichen Zahlen* existiert: es gibt Mengenuniversen V, in denen die Axiome aus **EML** erfüllt sind, in denen es aber nur *endliche* Mengen gibt.

Wir benutzen diese neue Schreibweise aus (a) bei der Definition des kartesischen Produktes von Klassentermen:

2.26 Definition Für n konkret gegebene Klassenterme $A_1, \dots, A_n$ definiere das **kartesische Produkt** $A_1 \times \dots \times A_n$ von $A_1, \dots, A_n$ wie folgt: im Fall $n = 2$ sei $A_1 \times A_2 :\equiv \big\{(x, y) \bigm| x \in A_1 \wedge y \in A_2\big\}$; im Fall $n > 2$ sei $A_1 \times \dots \times A_n :\equiv (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$.

2.27 Bemerkung Im allgemeinen ist das kartesische Produkt nicht assoziativ; zwischen verschieden geklammerten kartesischen Produkten mit den selben Klassen als Faktoren gibt es jedoch leicht angebbare eineindeutige Zuordnungen der Elemente.

2.3 Relationen, Ordnungen und Funktionen.

Der vielleicht wichtigste Begriff der modernen Mathematik ist der Begriff der Relation in seinen drei Ausprägungen „Äquivalenzrelation“, „Ordnung“ und „Funktion“. Zunächst betrachten wir Relationen im allgemeinen.

2.28 Definition Sei R ein Klassenterm. R ist eine **Relation**, falls sämtliche Elemente von R geordnete Paare sind. Formal: $\mathrm{Rel}(R) :\equiv R \subset V \times V$. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir meist Rxy oder auch xRy. Ist A ein Klassenterm und $R \subset A \times A$, so sagen wir, R ist eine **Relation über** A.

Die im folgenden definierten Klassenterme bekommen ihre eigentliche Bedeutung erst in dem Fall, daß R eine Relation ist. Gleichwohl ist es sinnvoll, sie für beliebige Klassenterme zu definieren. Insbesondere die allgemeine Definition des Definitionsbereiches eines Klassentermes R erweist sich bei der Durchführung von „Forcing-Konstruktionen“ als sehr zweckmäßig.

2.29 Definition Seien R, S und A Klassenterme.

(a) $\mathrm{dom}(R) :\equiv \{x \mid \exists y\, xRy\}$ heißt **Definitionsbereich** oder auch **Domain** von R.

(b) $\mathrm{ran}(R) :\equiv \{y \mid \exists x\, xRy\}$ heißt **Wertebereich** oder auch **Range** von R.

(c) $\mathrm{field}(R) :\equiv \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$ heißt **Feld** von R.

(d) $R \restriction A :\equiv \big\{(x, y) \bigm| x \in A \wedge xRy\big\}$ heißt **Einschränkung** von R auf A.

(e) $R[A] :\equiv R''A :\equiv \{y \mid \exists x\, x \in A \wedge xRy\}$ heißt **Bild** von A unter R.

(f) $R^{-1}[A] :\equiv \{x \mid \exists y\, y \in A \wedge xRy\}$ heißt **Urbild** von A unter R.

(g) $S \circ R :\equiv \big\{(x, z) \bigm| \exists y\, xRy \wedge ySz\big\}$ heißt **Komposition** von S und R.[11]

(h) $R^{-1} :\equiv \big\{(y, x) \bigm| xRy\big\}$ heißt **Inverse** oder **Umkehrrelation** von R.

Relationen können verschiedene vom Standpunkt der Mathematik aus interessante Eigenschaften haben. Einige der wichtigsten sind in der nachfolgenden Definition zusammengestellt.

2.30 Definition Sei R ein Klassenterm.

(a) $\mathrm{Ref}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R)\, xRx$ bedeutet, R ist eine **reflexive** Relation.

(b) $\mathrm{Irref}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R)\, \neg xRx$ bedeutet, R ist eine **irreflexive** Relation.

(c) $\mathrm{Sym}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y\, (xRy \to yRx)$ bedeutet, R ist eine **symmetrische** Relation.

(d) $\mathrm{Antisym}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y\, (xRy \wedge yRx \to x = y)$ bedeutet, R ist eine **antisymmetrische** Relation.

(e) $\mathrm{Tra}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y, z\, (xRy \wedge yRz \to xRz)$ bedeutet, R ist eine **transitive** Relation.

(f) $\mathrm{Con}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y\big((x \in \mathrm{field}(R) \wedge y \in \mathrm{field}(R)) \to (xRy \vee yRx \vee x = y)\big)$ bedeutet , R ist eine **konnexe** Relation.

[11] Die Definition ist so gewählt, daß wir in dem Fall, daß S und R Funktionen sind, die übliche Schreibweise für die Komposition von Funktionen erhalten.

Gewisse Arten von Relationen begegnen dem Mathematiker auf Schritt und Tritt. Einer der am häufigsten und in den verschiedensten Zusammenhängen auftretenden Relationstypen ist die Äquivalenzrelation:

2.31 Definition Sei R ein Klassenterm.

(a) $\mathrm{Eq}(R) :\equiv \mathrm{Ref}(R) \wedge \mathrm{Sym}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R)$ bedeutet, R ist eine **Äquivalenzrelation**.

(b) $[y]_R :\equiv \{x \mid xRy\}$ heißt **Äquivalenzklasse** von y bezüglich R.

2.32 Bemerkung Im allgemeinen ist die Äquivalenzklasse einer Menge y bezüglich der Relation R eine echte Klasse. Unter den in 3.1 angegebenen Erweiterungen **ZF** bzw. **ZFC** von **EML** treten Ausnahmen etwa dann auf, wenn $\mathrm{dom}(R) \in V$ gilt. Im Regelfall ist aber $[y]_R$ als echte Klasse anzusehen; wir können deshalb nicht a priori die „Klasse aller Äquivalenzklassen“ bilden, also keine Faktorisierung nach R durchführen, da die Bildung von „Klassen von Klassen“ zu Widersprüchen führen kann. Um dennoch eine adäquate Darstellung der „Familie“ der Äquivalenzklassen zu bekommen, werden wir auf der Basis des oben bereits erwähnten Systems **ZFC** aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten „auswählen“ (hierzu benötigen wir das „Auswahlaxiom“, das wir später ausführlich studieren werden) und dann die Klasse all dieser Repräsentanten bilden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, jede Äquivalenzklasse soweit zu verkleinern, bis sie eine Menge ist (wir werden in 5.14 sehen, daß echte Klassen in gewisser Weise zu groß geratene Mengen sind), und die Klasse all dieser „verkleinerten“ Äquivalenzklassen zu betrachten.

Neben Äquivalenzrelationen sind in der Mathematik die sogenannten „Ordnungen“ die wichtigsten, nicht-funktionalen Relationen. Ordnungen treten in verschiedensten Ausprägungen auf, von den einfachsten „schwachen partiellen Ordnungen“ bis hin zu den „Wohlordnungen“. Im folgenden definieren wir die grundlegenden Begriffe, die mit Ordnungsrelationen in Zusammenhang stehen.

2.33 Definition Sei R ein Klassenterm.

(a) $\mathrm{wPO}(R) :\equiv \mathrm{Ref}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R)$ bedeutet, R ist eine **schwache partielle Ordnung**.

(b) $\mathrm{PO}(R) :\equiv \mathrm{wPO}(R) \wedge \mathrm{Antisym}(R)$ bedeutet, R ist eine **partielle Ordnung**.

(c) $\mathrm{LO}(R) :\equiv \mathrm{PO}(R) \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet, R ist eine **lineare Ordnung**.

(d) Sei A ein Klassenterm. Wir sagen, R ist eine schwache partielle, partielle bzw. lineare Ordnung **auf** A, falls $\mathrm{field}(R) = A$ gilt. Wir setzen dementsprechend
$\mathrm{wPO}(A, R) :\equiv \mathrm{wPO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$,
$\mathrm{PO}(A, R) :\equiv \mathrm{PO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$ und
$\mathrm{LO}(A, R) :\equiv \mathrm{LO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$.

Da in die Definition des Begriffs Wohlordnung weiterreichende mengentheoretische Aspekte einfließen, stellen wir seine Definition noch zurück, siehe 4.10. Statt dessen analysieren wir (schwache) partielle Ordnungen etwas genauer.

2.34 Definition Seien R, A und B Klassenterme, so daß R eine schwache partielle Ordnung auf A ist und $B \subset A$ gilt. Ferner sei $x \in V$.

(a) x heißt **R-minimales Element** von B, falls gilt: $x \in B \wedge \forall b \in B\ (bRx \to b = x)$; x heißt **R-maximales Element** von B, falls gilt: $x \in B \wedge \forall b \in B\ (xRb \to x = b)$.

(b) x heißt **R-kleinstes Element** von B, falls gilt: $x \in B \wedge \forall b \in B\ xRb$. x heißt **R-größtes Element** von B, falls gilt: $x \in B \wedge \forall b \in B\ bRx$.

(c) x heißt **untere R-Schranke** von B, falls gilt $x \in A \wedge \forall b \in B\ xRb$; x heißt **obere R-Schranke** von B, falls gilt $x \in A \wedge \forall b \in B\ bRx$.

(d) x heißt **R-Infimum** von B, falls x R-größtes Element von $\{s \mid s \text{ ist untere } R\text{-Schranke von } B\}$ ist. Wir schreiben dann für x auch $\inf_R B$. x heißt **R-Supremum** von B, falls x R-kleinstes Element von $\{s \mid s \text{ ist obere } R\text{-Schranke von } B\}$ ist. Wir schreiben dann für x auch $\sup_R B$.

Wenn der Bezug zu R aus dem Zusammenhang klar ist, verzichten wir in jedem oben definierten Begriff auf die explizite Nennung von R.

2.35 Bemerkung Beachten Sie den Unterschied zwischen „minimalem“ und „kleinstem“ Element: ein minimales Element ist ein Element, das von keinem anderen untertroffen wird; ein kleinstes Element ist ein Element, das jedes andere untertrifft. Analog ist die Unterscheidung zwischen „maximalem“ und „größtem“ Element.

2.36 Beispiel Wir wählen fünf Elemente von V, die wir der Einfachheit halber mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichnen. Auf $A :\equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definieren wir eine partielle Ordnung wie folgt: für $x, y \in A$ gelte xRy, falls $x = y$ oder falls in dem folgenden Diagramm ein Pfad von x nach y existiert.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 3 & & \\ & & & \searrow & \\ & & \uparrow & & 5 \\ & & & \nearrow & \\ 2 & \longrightarrow & 4 & & \end{array}$$

Dann sind 1 und 2 sämtliche minimalen Elemente, 5 ist maximales Element von A. 5 ist auch das größte Element von A; A hat kein kleinstes Element.

$B_1 :\equiv \{3, 4\}$ hat die unteren Schranken 2 und 4 und die oberen Schranken 3 und 5. Das Infimum von B_1 ist 4; das Supremum von B_1 ist 3. $B_2 :\equiv \{1, 2\}$ hat keine unteren Schranken; die oberen Schranken von B_2 sind 3 und 5. Das Supremum von B_2 ist 3.

2.37 Lemma *Seien R, A und B Klassenterme, R sei eine partielle Ordnung auf A und es gelte $B \subset A$.*

(a) *Ist x ein kleinstes bzw. größtes Element von B, so ist x auch minimales bzw. maximales Element von B.*

(b) *Hat B ein kleinstes bzw. größtes Element, so ist dieses eindeutig bestimmt.*

(c) *Hat B ein Infimum bzw. Supremum, so ist dieses eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es mit* $\inf B$ *bzw.* $\sup B$. *Gilt* $\inf B \in B$, *so nennen wir* $\inf B$ *das* **Minimum** *von B und schreiben hierfür* $\min B$. *Gilt* $\sup B \in B$, *so nennen wir* $\sup B$ *das* **Maximum** *von B und schreiben hierfür* $\max B$.

(d) *Die Begriffe „kleinstes Element von B“ und „Minimum von B“ bzw. „größtes Element von B“ und „Maximum von B“ fallen zusammen. Genauer: x ist genau dann kleinstes Element von B, wenn x Minimum von B ist; x ist genau dann größtes Element von B, wenn x Maximum von B ist.*

Beweis. zu (a). Wir betrachten nur den Fall eines kleinsten Elementes; den Fall eines größten Elementes behandelt man entsprechend. Sei also x kleinstes Element von B, und es sei $b \in B$ mit bRx. Da x kleinstes Element von B ist, gilt auch xRb. Da R antisymmetrisch ist, folgt $x = b$, und dies war zu zeigen.

zu (b). Wir beweisen nur die Aussage für kleinste Elemente. Sind x_1 und x_2 kleinste Elemente von B so gilt $x_1 R x_2$, da x_1 kleinstes Element von B und $x_2 \in B$ ist; ebenso ist $x_2 R x_1$, da x_2 kleinstes Element von B und $x_1 \in B$ ist. Wegen der Antisymmetrie von R ergibt sich dann $x_1 = x_2$.

zu (c). Da Infimum bzw. Supremum bestimmte kleinste bzw. größte Elemente sind, folgt (c) direkt aus (b).

zu (d). Wir zeigen dies für die Begriffe „kleinstes Element“ und „Minimum“.
„$\Rightarrow$“. Sei x kleinstes Element von B. Dann ist $x \in B$ und x ist eine untere Schranke von B. Ist s eine beliebige untere Schranke von B, so ist sRb für alle $b \in B$, speziell sRx. Also ist x größte untere Schranke von B. Wegen $x \in B$ folgt $x = \min B$.
„$\Leftarrow$“. Sei $x = \min B$. Dann ist $x \in B$ und x ist untere Schranke von B. Letzteres impliziert xRb für alle $b \in B$. Also ist x kleinstes Element von B. QED

2.38 Bemerkung Ist R nur schwache partielle Ordnung, so sind i.a. weder kleinstes noch größtes Element eindeutig bestimmt. Das gleiche gilt für Infimum und Supremum. Als „Gegenbeispiel“ betrachte zwei verschiedene Elemente von V, die wir der Einfachheit halber mit 1 und 2 bezeichnen. Setze $A :\equiv \{1, 2\}$ und $R :\equiv A \times A$. Sowohl 1 als auch 2 sind dann kleinstes und größtes Element sowie Infimum und Supremum.

Besonders einfach sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen oben definierten Begriffen im Fall eine linearen Ordnung.

2.39 Lemma *Im Fall einer linearen Ordnung fallen die Begriffe kleinstes Element, minimales Element und Minimum bzw. größtes Element, maximales Element und Maximum zusammen.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall der kleinsten Elemente.
Sei also R eine lineare Ordnung auf A und es sei $B \subset A$. In Anbetracht des bereits für partielle Ordnungen bewiesenen bleibt noch zu zeigen, daß jedes R-minimale Element x von B ein R-kleinstes Element von B ist. Sei also ein $b \in B$ vorgegeben. Wir können $x \neq b$ annehmen. Da x ein minimales Element ist, ist dann $\neg\, bRx$. Aus $x \neq b$ und $\neg\, bRx$ folgt xRb wegen der Konnexität von R. QED

Ist A durch R partiell geordnet, so kann es Teilklassen B von A geben, die durch R sogar linear geordnet werden. Solche Teilklassen nennen wir Ketten:

2.40 Definition Seien A, B und R Klassenterme, R sei eine partielle Ordnung auf A und $B \subset A$. Wir sagen, B ist eine **R-Kette**, falls $\forall x, y\big((x \in B \wedge y \in B) \to (xRy \vee yRx \vee x = y)\big)$. Hat jede R-Kette ein maximales Element, so sagen wir, A ist durch R **induktiv geordnet**.

Manchmal ist bei der Untersuchung von Ordnungen auch der folgende Begriff hilfreich:

2.41 Definition Seien R, A und B Klassenterme, so daß R eine schwache partielle Ordnung auf A ist und $B \subset A$ gilt. Hat die Klasse $\{s \mid s \in A \setminus B \wedge \forall b \in B\; bRs\}$ ein kleinstes Element x, so bezeichnen wir dies mit $\operatorname{lub} B$ und nennen es das **least upper bound** von B.

2.42 Bemerkung $\operatorname{lub} B$ ist also die kleinste, echte obere Schranke von B. Der Begriff least upper bound ist verwandt mit dem Supremumsbegriff, aber nicht mit diesem deckungsgleich. Z.B. ist, wenn man die natürliche Reihenfolge als Ordnung wählt, $\operatorname{lub}\{1, 2\} = 3$ aber $\sup\{1, 2\} = 2$. Andererseits gibt es viele Beispiele, in denen beide Begriffe das selbe Element charakterisieren. Wir werden bei der Untersuchung von Ordinalzahlen wieder auf den Begriff des least upper bound stoßen, siehe 5.27.

Nach unserer Definition sind sämtliche bisher betrachten Ordnungsrelationen reflexiv. Aus dem mathematischen Alltag sind jedoch auch Ordnungen bekannt, die irreflexiv sind, etwa die $<$-Ordnung der reellen Zahlen. Wir definieren deshalb den Begriff „strikte lineare Ordnung“:

2.43 Definition Sei R ein Klassenterm.

(a) $\mathrm{SLO}(R) :\equiv \mathrm{Irref}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R) \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet, R ist **strikte lineare Ordnung**.

(b) Sei A ein Klassenterm. Wir sagen, R ist strikte lineare Ordnung **auf** A, falls R eine strikte lineare Ordnung mit $\mathrm{field}(R) = A$ ist. Dementsprechend setzen wir $\mathrm{SLO}(A, R) :\equiv \mathrm{SLO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$.

2.44 Bemerkung Lineare und strikte lineare Ordnungen hängen wie folgt zusammen:

(a) Ist R eine strikte lineare Ordnung auf A, so ist $R' :\equiv R \cup \big\{(x, x) \bigm| x \in A\big\}$ eine lineare Ordnung auf A. Insbesondere sind hierdurch auch für eine strikte lineare Ordnung Begriffe wie Maximum, obere Schranke, Supremum usw. erklärt.

(b) Ist R eine lineare Ordnung auf A, so ist durch $R' :\equiv \big\{(x, y) \bigm| xRy \wedge x \neq y\big\}$ eine strikte lineare Ordnung auf A gegeben.

Wir wenden uns nun dem vielleicht wichtigsten Begriff der neueren Mathematik zu, dem Begriff der Funktion.

2.45 Definition Sei F ein Klassenterm. $\mathrm{Fun}(F) :\equiv \mathrm{Rel}(F) \wedge \forall x, y_1, y_2\big((xFy_1 \wedge xFy_2) \to y_1 = y_2\big)$ bedeutet, F ist eine **Funktion** oder **funktional**.

Wir definieren folgende, mit Funktionen verbundene Begriffe und Schreibweisen.

2.46 Definition Seien F, A und B Klassenterme.

(a) $F\colon A \to B :\equiv \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{ran}(F) \subset B$ bedeutet, F **bildet** A **in** B **ab**.

(b) $F\colon A \supset\!\!\to B :\equiv \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) \subset A \wedge \mathrm{ran}(F) \subset B$ bedeutet, F ist eine **partielle Funktion** von A in B.

(c) $F\colon A \overset{surj.}{\longrightarrow} B :\equiv F\colon A \to B \wedge \mathrm{ran}(F) = B$ bedeutet, F ist eine **Surjektion** oder auch **surjektive Funktion** von A auf B.

(d) $F\colon A \overset{inj.}{\longrightarrow} B :\equiv F\colon A \to B \wedge \forall x_1, x_2 \in A \forall y\big((x_1Fy \wedge x_2Fy) \to x_1 = x_2\big)$ bedeutet, F ist eine **Injektion** oder auch **injektive Funktion** von A in B.

(e) $F\colon A \leftrightarrow B :\equiv F\colon A \overset{bij.}{\longrightarrow} B :\equiv F\colon A \overset{inj.}{\longrightarrow} B \wedge F\colon A \overset{surj.}{\longrightarrow} B$ bedeutet, F ist eine **Bijektion** oder auch **bijektive Funktion** von A in B.

(f) ${}^{A}B :\equiv \{f \mid f\colon A \to B\}$ ist die Klasse aller Funktionen von A nach B, die Mengen sind.

2.47 Bemerkung Wir werden sehen, daß ${}^{A}B = \emptyset$ gelten kann.

2.48 Lemma *Seien F, G, A, B und C Klassenterme. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $F\colon A \to B \longrightarrow F\colon A \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{ran}(F)$.

(b) $F\colon A \overset{inj.}{\longrightarrow} B \longrightarrow F^{-1}\colon \mathrm{ran}(F) \overset{bij.}{\longrightarrow} A$.

(c) $F\colon A \to B \wedge G\colon B \to C \longrightarrow G \circ F\colon A \to C$.

Beweis. Die einfachen Beweise verbleiben dem Leser als Übung. QED

2.49 Definition Sei F ein Klassenterm und x eine Variable. Wir definieren den Klassenterm $F(x)$ durch

$$F(x) :\equiv \big\{z \bigm| \forall y_0\big(((x, y_0) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \to y_0 = y_1)) \longrightarrow z \in y_0\big)\big\}.$$

$F(x)$ ist genau das, was man erwartet:

2.50 Lemma *Seien F und A Klassenterme und sei $F\colon A \to V$. Dann gilt:*

$$\forall x \in A \forall y\big((x, y) \in F \longleftrightarrow y = F(x)\big).$$

Wir nennen deshalb $F(x)$ auch den **Funktionswert von F an der Stelle** x.

Beweis. „$\Rightarrow$". Sei $(x, y) \in F$; es ist $y = F(x)$ zu zeigen.
zu $\subset$. Sei $z \in y$. Dann gilt $((x, y) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \to y = y_1)) \longrightarrow z \in y$. Für $y_0 \neq y$ gilt ebenfalls $((x, y_0) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \to y_0 = y_1)) \longrightarrow z \in y_0$, da die Prämisse (nämlich $(x, y_0) \in F$) falsch ist. Also erfüllt z die definierende Bedingung von $F(x)$.
zu $\supset$. Sei $z \in F(x)$. Dann erfüllt z die definierende Bedingung des Termes $F(x)$, also gilt speziell $((x, y) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \to y = y_1)) \longrightarrow z \in y$. Wegen $\mathrm{Fun}(F)$ und $(x, y) \in F$ ist hier die Prämisse wahr, so daß in der Tat $z \in y$ ist.

„$\Leftarrow$". Wegen $F\colon A \to V$ und $x \in A$ existiert genau ein $\tilde{y}$ mit $(x, \tilde{y}) \in F$. Nach dem bereits bewiesenen ist dann $\tilde{y} = F(x)$. Da nach Voraussetzung auch $y = F(x)$ ist, folgt $y = \tilde{y}$, also $(x, y) \in F$. QED

2.51 Bemerkung Ist F an der Stelle x nicht eindeutig, d.h., gibt es y_1 und y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in F$ sowie $(x, y_2) \in F$, so ist $F(x) = V$. „V“ steht also hier für „undefiniert“.

Beweis. In diesem Fall ist für jedes y_0 die Aussage $\forall y_1((x, y_1) \in F \to y_0 = y_1)$ falsch, so daß $\forall y_0\big(((x, y_0) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \to y_0 = y_1)) \longrightarrow z \in y_0\big)$ aufgrund falscher Prämisse gilt. Also erfüllt jedes $z \in V$ die definierende Bedingung von $F(x)$, d.h., $F(x) = V$. QED

Mit Hilfe des Termes $F(x)$ kann man Funktionen F als Sequenzen darstellen:

2.52 Lemma *Ist $F\colon A \to V$, so gilt $F = (F(x)|x \in A)$.*

Beweis. Nach Definition der Sequenz $(F(x)|x \in A)$ gilt $(F(x)|x \in A) \equiv \big\{(x, F(x)) \bigm| x \in A\big\}$. Nach 2.50 soeben bewiesenen stimmt diese Klasse mit F überein. QED

Wir vereinbaren noch einige nützliche Schreibweisen:

2.53 Definition Seien F und I Klassenterme und es gelte $F\colon I \to V$.

(a) $\big(F(i)\big)_{i \in I} :\equiv \big(F(i) \bigm| i \in I\big)$.

(b) $\bigcup_{i \in I} F(i) :\equiv \bigcup \mathrm{ran}(F)$.

(c) $\bigcap_{i \in I} F(i) :\equiv \bigcap \mathrm{ran}(F)$.

(d) $\times_{i \in I} F(i) :\equiv \big\{f \bigm| f\colon I \to V \wedge \forall i \in I \; f(i) \in F(i)\big\}$.

2.54 Bemerkung Oft treten obige Schreibweisen in der Form $\big(x_i\big)_{i \in I}$, $\bigcup_{i \in I} x_i$, $\bigcap_{i \in I} x_i$ und $\times_{i \in I} x_i$ auf, wobei dann $F = \big\{(i, x_i) \bigm| i \in I\big\}$ ist. Wenn wir in V eine Menge ω der natürlichen Zahlen (von V!) definiert haben, so ist für $I \in \omega$ die Sequenz $\big(x_i \bigm| i \in I)$ (bzw. $\big(x_i\big)_{i \in I}$) gerade das „geordnete I-Tupel“ der Elemente x_i $(i \in I)$ von V.

Wie weit haben wir die Mathematik bis zu dieser Stelle entwickelt? Wir wissen, wann Mengen gleich sind (**(Ext)**!), können aus Mengen durch Paarmengenbildung oder Vereinigungsmengenbildung zu weiteren Mengen übergehen und wissen last but not least, daß es zumindest eine Menge, nämlich $\emptyset$, gibt. Hiermit konnten wir z.B. die Begriffe „Relation“ und „Funktion“ definieren und einfache Eigenschaften derselben nachweisen. Wir können sogar bereits algebraische Strukturen formalisieren: ein Dreiertupel $(G, \cdot, e)$ ist eine *Gruppe*, falls gilt

(i) $G \in V$, $\cdot\colon G \times G \to G$, $e \in G$.

(ii) $\forall x, y, z \;\; \cdot\big(\cdot(x, y), z\big) = \cdot\big(x, \cdot(y, z)\big)$.

(iii) $\forall x \;\; \cdot(e, x) = \cdot(x, e) = x$.

(iv) $\forall x \exists y \;\; \cdot(x, y) = e$.

Gleichwohl ist unsere mathematische Welt zum jetzigen Zeitpunkt noch recht arm. Wir wissen zum Beispiel nicht, ob es unendliche Mengen gibt, ob der Schnitt von zwei Mengen wieder eine Menge ist oder ob die Klasse aller Teilmengen einer Menge wieder eine Menge ist. Wenn wir eine Funktion F vorliegen haben, deren Definitionsbereich eine Menge a ist, so würden wir vermuten, daß der Wertebereich von F, also $F[a]$, wieder eine Menge sein muß, da er in gewisser Weise nur eine „Verzerrung“ von a ist; ob dies aber wirklich so ist, können wir allein auf der Grundlage von **EML** nicht positiv beantworten. Es ist also höchste Zeit, unser Axiomensystem „vernünftig“ zu erweitern. Dies geschieht im nächsten Kapitel.

3 Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome.

Am Ende des letzten Kapitels haben wir gesehen, daß es notwendig ist, unser Axiomensystem **EML** zu erweitern, damit unser mathematisches Universum V genügend reichhaltig wird, um die gesamte klassische Mathematik darin durchführen zu können. Insbesondere benötigen wir Existenzaussagen, die sicherstellen, daß gewisse Mengen in V vorhanden sind und gewisse auf Mengen angewendete Konstruktionsprinzipien bzw. Transformationen wieder zu Mengen führen. Hierbei dürfen wir jedoch nicht zu sorglos vorgehen und versuchen, das mathematische Universum V zu groß zu machen. Ein warnendes Beispiel aus den Anfängen der Mengenlehre liefert hier die RUSSELL*sche Antinomie.* Sie rührt her von einer zu allgemeinen gefaßten Mengenbildungsoperation: da man nach CANTOR als Menge auffaßte „jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen", siehe Seite 9, ging man davon aus, für jede Eigenschaft $\mathcal{E}$ eine Menge zu erhalten, die genau diejenigen Elemente enthält (aussondert), die der Eigenschaft $\mathcal{E}$ genügen; m.a.W., $\{x \mid x \text{ erfüllt } \mathcal{E}\}$ ist eine Menge. BERTRAND RUSSELL[12] erkannte hierbei folgendes Problem: es kann keine Menge geben, die all diejenigen Mengen enthält, die sich nicht selbst als Element enthalten, d.h., $\{x \mid x \notin x\}$ ist keine Menge! Wäre nämlich $\{x \mid x \notin x\}$ eine Menge y, so ließe sich untersuchen, ob $y \in y$ gilt oder nicht. Wenn wir $y \in y$ annehmen, so muß y die definierende Bedingung von y erfüllen, d.h., $y \notin y$, ein Widerspruch; nehmen wir aber das Gegenteil an, also $y \notin y$, so erfüllt y die definierende Bedingung von y, so daß doch $y \in y$ sein muß. Sämtliche möglichen Fälle führen also auf einen Widerspruch! Die Annahme, daß $\{x \mid x \notin x\}$ eine Menge ist, muß somit falsch sein. (**Russellsche Antinomie**) Bei der Bildung neuer Mengen muß man also vorsichtig vorgehen.

3.1 Die Systeme ZF und ZFC.

Unser jetzt anzugebendes Axiomensystem trägt diesem Umstand Rechnung. Es geht zurück auf ERNST ZERMLEO[13], der 1908 ein Teilsystem von sieben Axiomen unseres Axiomensystems veröffentlicht. Anstelle des allgemeinen Aussonderungsprinzips[14] wählt er ein eingeschränktes: für jede Menge a und jede „definite" Eigenschaft $\mathcal{E}$ gibt es eine Menge , die genau diejenigen Elemente *aus a* enthält, die $\mathcal{E}$ erfüllen. Der unscharfe Begriff „definit" wird 1922 durch SKOLEM[15] präzisiert: eine definite Eigenschaft ist nach Skolem eine Eigenschaft, die durch eine – wie wir sie nennen – $\in$-Formel ausgedrückt werden kann. Weitere Ergänzungen zu ZERMELOs System stammen von FRAENKEL[16] (1922) und MIRIMANOFF[17] (1917). Dieses System wird heute i.a. mit **ZFC** bezeichnet. Verzichtet man auf das „Auswahlaxiom", so erhält man das System **ZF**. Das Auswahlaxiom ist ein relativ altes Mengenbildungsprinzip, das bereits CANTOR implizit

[12] BERTRAND ARTHUR WILLIAM EARL OF RUSSELL (18.5.1872, Ravenscroft bei Trelleck (Monmouthshire/England)–2.2.1970, Plas Penrhyn bei Penrhyndeudraeth (Merionetshire/Wales)) Studium in Cambridge (Mathematik und Sozialwissenschaften); 1910–1916 Dozent am Trinity College in Cambridge, später Gastdozent u.a. in Oxford, London, an der Harvard University, in Chicago, Los Angeles und Peking; 1950 Nobelpreis für Literatur. RUSSELL war Mathematiker und Philosoph, wobei seine Beschäftigung mit der Mathematik etwa in das erste Drittel seines Lebens fällt. Hierbei arbeitet er im Bereich der Grundlagenmathematik, sein wichtigstes Werk sind die in den Jahren 1910 bis 1913 in Zusammenarbeit mit seinem Lehrer ALFRED NORTH WHITEHEAD (15.2.1861, Ramsgate (England)–30.12.1947, Cambridge (Mass.)) erschienenen *Principia Mathematica*. Zum Aufbau einer Mengenlehre ohne Antinomien entwickelt RUSSELL die *Typentheorie*.

[13] ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (27.7.1871, Berlin–21.5.1953, Freiburg/Br.) 1889–1894 Studium in Berlin, Halle und Freiburg/Br.; 1894 Promotion in Berlin; 1899 Habilitation in Göttingen; 1905 Titularprofessor an der Universität Göttingen; 1910 ordentlicher Professor in Zürich; 1926–1935 und ab 1946 Honorarprofessor der Universität Freiburg. 1904 gelingt ZERMELO der erste Beweis des *Wohlordnungssatzes*, siehe 8.1, 1908 veröffentlicht er ein Axiomensystem der Mengenlehre, das unserem zugrunde liegt. 1930 besorgt ZERMELO die Gesamtausgabe der Werke GEORG CANTORS.

[14] „zu jeder Eigenschaft $\mathcal{E}$ existiert eine Menge, die genau die Elemente enthält, die $\mathcal{E}$ erfüllen"

[15] ALBERT THORALF SKOLEM (23.5.1887, Sandsvaer (Südnorwegen)–23.3.1963, Oslo) 1905–1913 Studium an der Universität Kristiania (=Oslo), hier dann Assistent und ab 1918 Dozent; 1926 Promotion an der Universität Oslo; 1930 Forschungsprofessor am Institut Christian Michelsen in Bergen; 1938–1957 ordentlicher Professor in Oslo. SKOLEM beschäftigt sich neben Verbandstheorie und Zahlentheorie (diophantische Gleichungen) hauptsächlich mit Fragen der mathematischen Logik und der Grundlagenforschung.

[16] ABRAHAM HALEVI FRAENKEL (17.2.1891, München–15.10.1965, Jerusalem) Studium in München, Marburg, Berlin und Breslau; 1914 Promotion, 1916 Habilitation in Marburg, dann hier Privatdozent, ab 1922 außerordentlicher Professor; 1928–1933 ordentlicher Professor an der Universität Kiel, außerdem 1929–1931 und ab 1933 bis zu seiner Emeritierung 1959 an der Universität Jerusalem; 1938–1940 Rektor der Universität Jerusalem. Nach Arbeiten über abstrakte Gruppen wendet sich FRAENKEL rasch der Mengenlehre zu. Er veröffentlicht mehrere Bücher über Mengenlehre, für die von ZERMELO herausgegebenen gesammelten Werke CANTORS verfaßt FRAENKEL eine Biographie CANTORS.

[17] DIMITRY MIRIMANOFF (13.9.1861, Perejaslavl Zalesski–5.1.1945, Genf) Studium 1880–1881 in Montpellier, 1883–1884 in Paris und 1897–1899 in Genf; hier 1900 Habilitation; danach zunächst Lehrtätigkeit an der Universität Genf; 1920 außerordentlicher Professor an der Universität Fribourg, 1922 an der Universität Lausanne; 1922–1936 ordentlicher Professor an der Universität Genf, ab 1936 Honorarprofessor an der Universität Lausanne. Neben der Grundlagenmathematik beschäftigt sich MIRIMANOFF mit Fragen der Maßtheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

benutzt; PEANO[18] weist 1890 in einer Arbeit über Differentialgleichungen auf dieses Prinzip hin; ZERMELO formuliert es explizit im Jahre 1904, als er aus dem Auswahlaxiom die Existenz einer Wohlordnung für jede Menge herleitet (Wohlordnungssatz) und nimmt es 1908 in sein Axiomensystem auf. Gleichwohl wird das Auswahlaxiom lange Zeit nicht allgemein akzeptiert. Auf die Gründe hierfür gehen wir später[19] ein. Heute ist **ZFC** eine weithin akzeptierte Erweiterung von **EML** zu einem Axiomensystem, in dessen Rahmen die gesamte „klassische“ Mathematik durchgeführt werden kann. Die mathematische Erfahrung gibt zu der Hoffnung Anlaß, daß die Systeme **ZF** bzw. **ZFC** *konsistent* sind, d.h., daß sich aus ihnen keine sich widersprechenden Aussagen ableiten lassen. *Wissen* können wir dies aber nicht: Wir werden in 21.11 zeigen, daß man nicht mathematisch *beweisen* kann, daß **ZF** bzw. **ZFC** konsistent sind. Wir werden auch sehen, daß diese Axiomensysteme weit davon entfernt sind, *jedes* im Rahmen der Mathematik stellbare Problem positiv oder negativ zu entscheiden: so ist es etwa – wie man aufgrund von Resultaten von GÖDEL[20] (1938) und COHEN[21] (1963) weiß – auf der Grundlage dieses Systems nicht zu beweisen und nicht zu widerlegen, daß es eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gibt, die „eine größere Anzahl“ an Elementen enthält als die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen aber „eine kleinere Anzahl“ an Elementen als $\mathbb{R}$ selbst. CANTOR vermutet, daß eine solche Menge nicht existiert. Diese Vermutung ist als *Kontinuumshypothese* bekannt. Auf sie werden wir im Bereich der Kardinalzahlarithmetik noch ausführlich eingehen, siehe Seite 83.

Wenn wir im folgenden die **ZFC**-Axiome angeben, formulieren wir sie als schlichte $\in$-Formeln; insbesondere verzichten wir auf die Verwendung jedweder Klassenterme. Dadurch haben die Axiome einerseits eine sehr „elementare“ Form und können ohne Kontextinformationen gelesen werden: es müssen keine Kenntnisse über benutzte definierte Terme und Formeln vorhanden sein, um die Axiome verstehen und anwenden zu können. Andererseits ist die Formulierung der Axiome auf diese Art sehr umständlich, da nur eine sehr primitive Sprache zur Verfügung steht. Um sich in dem “Formelgestrüpp“ nicht zu verfangen, sollten Sie sich beim ersten Lesen der folgenden Definition zunächst die Verbalisierungen, die jedem Axiom außer den bereits bekannten Axiomen von **EML** (siehe 2.11) beigegeben sind, klarmachen. Danach sollten Sie gegebenenfalls direkt die an die Definition sich anschließende Kommentierung der Axiome durcharbeiten. Erst wenn sie eine gute Intuition davon haben, was das jeweilige Axiom *bedeutet*, sollten Sie die entsprechende $\in$-Formel durchforsten.

3.1 Definition Das **Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem ZF** besteht folgenden Axiomen:

(Ex) $\exists v_0 \forall v_1 \neg v_1 \in v_0$.

(Ext) $\forall v_0 \forall v_1 \big(\forall v_2 (v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1\big)$.

(Paar) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 \big(v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 = v_0 \lor v_3 = v_1)\big)$.

($\bigcup$-Ax) $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 (v_3 \in v_0 \land v_2 \in v_3)\big)$.

[18] GIUSEPPE PEANO (27.8.1858, Spinetta bei Cuneo (Piemont)–20.4.1932, Turin) 1876–1880 Studium an der Universität Turin, hier 1890 außerordentlicher und von 1895 bis zu seinem Tode ordentlicher Professor, 1887–1901 auch an der Militärakademie. PEANO beschäftigt sich mit Problemen der Sprache und der formalen Logik, aber auch mit Fragen der Analysis („PEANO-Kurven“; Existenzsatz für Lösungen von Differentialgleichungen). Auf PEANO gehen die nach ihm benannten Axiome zur Charakterisierung der Menge der natürlichen Zahlen zurück, siehe 4.28. Er führt auch die heute noch gebräuchlichen Schreibweisen für die Elementbeziehung ($x \in y$) und die Teilmengenbeziehung ($x \subset y$) in die Mathematik ein.

[19] vgl. die Ausführungen auf Seite 33

[20] KURT GÖDEL (28.4.1906, Brünn–14.1.1978, Princeton (N.J.)) 1924–1929 Studium in Wien; 1930 Promotion (Beweis des später so bezeichneten GÖDEL*schen Vollständigkeitssatzes*), siehe 17.28; 1933 Habilitation (Beweis der später so bezeichneten GÖDEL*schen Unvollständigkeitssätze*), siehe 21.10 und 21.11; bis 1938 Privatdozent in Wien; 1939 Emigration in die USA, danach Professor am Institute for Advanced Study in Princeton. GÖDEL beschäftigt sich zunächst mit Fragen der mathematischen Logik. Hier findet er die oben erwähnten nach ihm benannten Sätze; die Implikationen der Unvollständigkeitssätze für die Mengenlehre haben wir im Haupttext soeben skizziert. Ab 1937 wendet sich GÖDEL der Mengenlehre zu und liefert hier erste wichtige Beiträge zur Lösung des *Kontinuumproblems.*

[21] PAUL JOSEPH COHEN (geb. 2.4.1934, Long Branch (N.J.)) Mathematikstudium in Chicago; 1958 Promotion; ab 1961 an der Stanford Universität, seit 1964 als ordentlicher Professor. Der wichtigste Beitrag COHENs zur Mathematik liegt im Beweis der Unabhängigkeit der **ZFC**-Axiome von der Kontinuumshypothese. Hierzu entwickelt COHEN die sog. *forcing*-Methode, die heute eines der wichtigsten Werkzeuge im Bereich der Mengenlehre ist.

(Aus) Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ die Aussage
$\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \exists v_{n+2} \forall v_0 \big(v_0 \in v_{n+2} \leftrightarrow (v_0 \in v_{n+1} \wedge \varphi)\big)$.
In Worten: zu jeder Menge a und jeder mathematischen Eigenschaft φ existiert eine Menge b, die genau diejenigen Elemente von a enthält, die der Eigenschaft φ genügen.
Aussonderungsschema

(Pot) $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \forall v_3 (v_3 \in v_2 \to v_3 \in v_0)\big)$.
In Worten: zu jeder Menge a existiert eine Menge b, deren Elemente gerade die Teilmengen von a sind.
Potenzmengenaxiom

(Inf) $\exists v_0 \big(\exists v_1 (v_1 \in v_0 \wedge \forall v_2 \neg v_2 \in v_1) \wedge$
$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 \in v_0 \longrightarrow (v_2 \in v_0 \wedge \forall v_3 (v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 \in v_1 \vee v_3 = v_1))))\big)$.
In Worten: es gibt eine Menge, die eine Menge ohne Element enthält und unter der Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$ abgeschlossen ist.
Unendlichkeitsaxiom

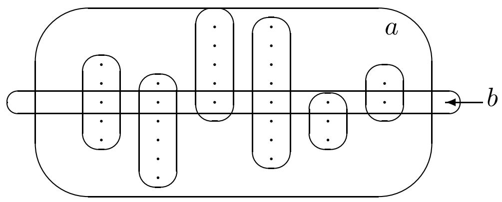
(Ers) Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$, in der die Variablen v_{n+2} und v_{n+3} nicht vorkommen, die Aussage
$\forall v_2 \ldots \forall v_{n+1} \big(\forall v_0 \forall v_{n+2} \forall v_{n+3} ((\varphi \frac{v_{n+2}}{v_1} \wedge \varphi \frac{v_{n+3}}{v_1}) \to v_{n+2} = v_{n+3})$
$\longrightarrow \forall v_{n+2} \exists v_{n+3} \forall v_1 (v_1 \in v_{n+3} \leftrightarrow \exists v_0 (v_0 \in v_{n+2} \wedge \varphi))\big)$.
In Worten: ersetzt man die Elemente einer Menge a durch ihre Bilder unter einer funktionalen Zuordnung (diese ist hier durch die $\in$-Formel φ gegeben), so erhält man erneut eine Menge.
Ersetzungsschema

(Fund) Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, in der die Variable v_{n+1} nicht vorkommt, die Aussage
$\forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\exists v_0 \varphi \to \exists v_0 \big(\varphi \wedge \forall v_{n+1} (v_{n+1} \in v_0 \to \neg \varphi \frac{v_{n+1}}{v_0})\big)\big)$.
In Worten: trifft eine mathematische Eigenschaft φ auf mindestens eine Menge zu, so trifft sie auch auf eine Menge zu, auf deren Elemente sie nicht zutrifft (es gibt einen minimalen Zeugen für φ).
Fundierungsschema

Das System $\mathbf{ZF}^-$ enthält genau die obigen Axiome und Schemata bis auf das Potenzmengenaxiom: $\mathbf{ZF}^- :\equiv \mathbf{ZF} - (\mathbf{Pot})$.

Das **Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem mit Auswahlaxiom ZFC** besteht aus den Axiomen von **ZF** und dem folgenden Axiom

(AC) $\forall v_0 \exists v_1 \big(\big(\forall v_2 (v_2 \in v_0 \to \exists v_3\, v_3 \in v_2) \wedge$
$\forall v_4 \forall v_5 ((v_4 \in v_0 \wedge v_5 \in v_0 \wedge \neg v_4 = v_5) \to \neg \exists v_3 (v_3 \in v_4 \wedge v_3 \in v_5))\big)$
$\longrightarrow \forall v_2 \big(v_2 \in v_0 \to \exists v_3 (v_3 \in v_2 \wedge v_3 \in v_1 \wedge \forall v_4 ((v_4 \in v_2 \wedge v_4 \in v_1) \to v_4 = v_3))\big)\big)$.
In Worten: zu jeder Menge a nicht-leerer, disjunkter Mengen gibt es eine Menge b, die jede dieser Mengen in genau einem Punkt trifft.



Auswahlaxiom, Axiom of Choice

3.2 Bemerkung (a) Die Zusatzvoraussetzungen an die $\in$-Formel φ im Ersetzungsschema und im Fundierungsschema sind nur technischer Natur; sie sind nötig, um Variablenkollisionen zu vermeiden, und stellen keine Einschränkungen dar, da wir gegebenenfalls die Variablen von φ austauschen können.

(b) Bei **(Aus)**, **(Ers)** und **(Fund)** handelt es sich nicht um einzelne Axiome sondern um unendliche Schemata von Axiomen. Für jede konkret vorgegebene $\in$-Formel φ ergibt sich konstruktiv eine Instanz des Schemas. Wir werden in 23.8 sehen, daß **ZF** nicht endlich axiomatisierbar ist, d.h., daß man die obige unendliche Liste von Axiomen nicht durch endlich viele Axiome ersetzen kann.

Wir betrachten im folgenden die einzelnen **ZFC**-Axiome etwas genauer. Dabei können wir von den ersten vier Axiomen der obigen Liste absehen, da wir uns mit ihnen bereits im vorigen Kapitel ausführlich beschäftigt haben.

3.2 Das Aussonderungsschema.

Das Aussonderungsschema, das zusammen mit den Axiomen **(Ext)**, **(Ex)**, **(Paar)**, **($\bigcup$-Ax)**, **(Pot)**, **(Inf)** und **(AC)** ZERMELOs System von 1908 bildet,[22] ermöglicht es, aus jeder Menge die Elemente auszusondern und in einer Menge zusammen zu fassen, die alle einer vorgelegten mathematischen Eigenschaft genügen. Da nach der von uns gewählten Definition mathematische Eigenschaften zu Klassentermen korrespondieren, ergibt sich leicht das folgende Resultat, dessen Beweis dem Leser überlassen bleibt.

3.3 Lemma *Die folgenden drei Schemata sind äquivalent:*

(i) **(Aus)**.

(ii) *Für jede $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ die Aussage* $\forall \vec{w} \forall a \, \{x \mid x \in a \wedge \varphi(x, \vec{w})\} \in V$.

(iii) *Für jeden Klassenterm $A = \{x \mid \varphi(x, \vec{w})\}$ die Aussage* $\forall \vec{w} \forall a \; A \cap a \in V$.

Beachten Sie, daß sich in unserer Formulierung des Aussonderungsschemas die RUSSELLsche Antinomie (zumindest ad hoc) nicht wiederholen läßt: **(Aus)** sagt nämlich *nicht* aus, daß für eine vorgelegte Eigenschaft φ die Klasse $\{x \mid \varphi\}$ eine Menge ist; erst, wenn man diese Klasse mit einer Menge a schneidet (also *aus* a aussondert), sichert **(Aus)**, daß die entstehende Klasse sogar eine Menge ist.

Ein ähnlicher Ansatz wie der, welcher zur RUSSELLschen Antinomie geführt hat, ergibt im Kontext von **EML** + (**Aus**), daß es keine „Allmenge“ gibt, d.h., es gibt keine Menge, die alle Mengen als Elemente enthält. Formaler:

3.4 Satz *Auf der Basis der Axiome* **EML** + (**Aus**) *gilt:* $\neg \exists a \forall x \; x \in a$.

BEWEIS. Wir zeigen $\forall a \exists x \; x \notin a$. Zu vorgegebenem a ist nach **(Aus)** durch $x :\equiv \{y \mid y \in a \wedge y \notin y\}$ eine Menge definiert. Es ist $x \notin x$: wäre nämlich $x \in x$, so würde x die definierende Bedingung von x erfüllen, speziell: $x \notin x$. Also gilt in der Tat $x \notin x$. Dann erfüllt x *nicht* die definierende Bedingung von x. Dies bedeutet $x \notin a \vee x \in x$. Den zweiten Teil dieser Disjunktion haben wir soeben als falsch nachgewiesen. Also muß der erste gelten, d.h., $x \notin a$. QED

3.5 Corollar *Auf der Basis von* **EML** + (**Aus**) *gilt:* $V \notin V$.

BEWEIS. Aus den jeweiligen Definitionen und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Formeln der Art $y = y$ stets gültig sind, folgt leicht die Korrektheit der folgenden Äquivalenzen:

$$V \notin V \iff \neg \exists a \, (a = V \wedge a \in V) \iff \neg \exists a \big(\forall x (x \in a \leftrightarrow x = x) \wedge a = a \big) \iff \neg \exists a \forall x \; x \in a.$$

Diese letzte Aussage ist nach dem letzten Satz auf der Basis von **EML**+**(Aus)** gültig. QED

Wir können auf der Basis von **EML** + (**Aus**) zeigen, daß Schnitte von nicht-leeren Mengen Mengen sind. Mehr noch, auch der Schnitt einer nicht-leeren Klasse ist eine Menge.

3.6 Lemma *Sei X ein Klassenterm. Dann folgt aus* **EML** + (**Aus**)*: $X \neq \emptyset \longrightarrow \bigcap X \in V$ Speziell: für $x, y \in V$ ist $x \cap y \in V$ und, falls $x \neq \emptyset$ gilt, $\bigcap x \in V$.*

[22] ZERMELO formuliert sieben Axiome, er faßt Existenzaxiom und Paarmengenaxiom zu einem einzigen Axiom, dem *Axiom der Elementarmengen* zusammen.

Beweis. Fixiere $a \in X$. Sei A der Klassenterm $\bigcap X$, also $A :\equiv \{z \mid \forall y\ y \in X \to z \in y\}$. Dann gilt $A = A \cap a$, also $A \in V$ nach **(Aus)**.
Die Spezialfälle ergeben sich für $X :\equiv \{x, y\}$ bzw. $X :\equiv \{z \mid z \in x\}$. QED

3.3 Das Potenzmengenaxiom.

Das folgende Resultat kann der Leser leicht verifizieren; die Argumentationsweise entspricht der im Beweis von 3.5.

3.7 Lemma (**Pot**) $\iff \forall a\ \mathrm{Pot}(a) \in V$.

3.4 Das Unendlichkeitsaxiom.

Von den bisher betrachteten Axiomen hat **(Inf)** die komplizierteste Formulierung. Wir geben deshalb zunächst eine unter **EML** äquivalente, einfachere Darstellung von **(Inf)** an.

3.8 Lemma *Auf der Basis von* **EML** *gilt:* (**Inf**) $\longleftrightarrow \exists a\big(\emptyset \in a \wedge \forall x(x \in a \to x \cup \{x\} \in a)\big)$.

Beweis. Unter **EML** gelten die in der folgenden Formulierung von **(Inf)** angedeuteten Äquivalenzen:

$$\exists a\big(\exists x(x \in a \wedge \underbrace{\forall y\ y \notin x}_{\iff x=\emptyset}) \wedge \forall x \exists y(x \in a \longrightarrow (y \in a \wedge \underbrace{\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \vee z = x))}_{\iff y=x\cup\{x\}})))\big).$$

Hieraus folgt leicht die Behauptung. QED

Warum nehmen wir **(Inf)** in unser Axiomensystem auf? Man macht sich leicht intuitiv klar, daß jedes der anderen **ZFC**-Axiome bereits in dem Bereich der endlichen Mengen gilt. (Wir werden später auch einen formalen Beweis für diese Tatsache angeben, siehe 22.10.) **(Inf)** kann in Verbindung mit **EML** aber nur in einem Rahmen gelten, der (mindestens) eine Menge enthält, die (in naivem Sinn) unendlich ist. Ist a die Menge, deren Existenz in **(Inf)** gefordert wird, so gilt $\emptyset \in a$ und a ist unter der Operation $z \mapsto z \cup \{z\}$ abgeschlossen. a enthält also für jede konkret gegebene natürliche Zahl $n > 0$ die Menge $\tilde{n}$. Wir zeigen, daß diese Mengen paarweise verschieden sind. Hierzu definieren wir für jede konkret vorgegebene natürliche Zahl eine $\in$-Formel φ_n durch

$$\varphi_0(x) :\equiv \neg\, \exists y\, y \in x$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) :\equiv \exists x_0, \ldots, x_{n-1} \in x\ \big(&x_0 \neq x_1 \wedge x_0 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_0 \neq x_{n-1} \wedge \\ &x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_{n-1} \wedge \ldots \wedge x_{n-2} \neq x_{n-1} \wedge \\ &\forall y \in x\ (y = x_0 \vee y = x_1 \vee \ldots\ y = x_{n-1})\big),\end{aligned}$$

falls $n > 0$. $\varphi_n(x)$ besagt inhaltlich, daß x genau n verschiedene Elemente hat. Mit Hilfe von **(Ext)** verifiziert man leicht:

(1) $\varphi_m(x) \longrightarrow \neg\, \varphi_n(x)$, falls $m > n$.

Dies impliziert

(2) Sind m und n zwei verschiedene, konkret gegebene natürliche Zahlen, und gilt $\varphi_m(x)$ sowie $\varphi_n(x')$, so ist $x \neq x'$.

Wir zeigen:

(3) Ist n eine konkret vorgegebene natürliche Zahl, so gilt $\varphi_n(\tilde{n})$.

Beweis. Wir führen eine metasprachliche Induktion nach n durch.

$n = 0$. Es ist $\tilde{0} = \emptyset$ und $\varphi_0(\emptyset)$ gilt nach Definition von $\emptyset$.

$n = m + 1$. Setze $x_0 :\equiv \tilde{0}, \ldots, x_{n-1} :\equiv \widetilde{n-1}$. Dann gilt offenbar

$$\forall y \in \tilde{n}\ (y = x_0 \vee y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_{n-1}).$$

Sind ferner $k, l < n$ verschiedene natürliche Zahlen, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $\varphi_k(\tilde{k})$ und $\varphi_l(\tilde{l})$. Nach (2) ist $\tilde{k} \neq \tilde{l}$; also gilt $x_k \neq x_l$. qed(3)

Aus (2) und (3) ergibt sich nun, daß die Mengen $\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \ldots$ paarweise verschieden sind.

Wir weisen hier noch auf folgendes hin: es ist allein auf der Grundlage der bisher besprochenen Axiome *nicht* zu zeigen, daß $x \notin x$, also speziell $x \neq x \cup \{x\}$ für *jede* Menge $x \neq \emptyset$ gilt. In der Formulierung des Unendlichkeitsaxioms ist also die Forderung $\emptyset \in a$ wesentlich, um tatsächlich eine unendliche Menge zu erhalten.

Wir werden später sehen, daß **(Inf)** die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen in unserem Mengenuniversum V sicherstellt.

3.5 Das Ersetzungsschema.

Das auf Fraenkel (1922) zurückgehende Ersetzungsschema stellt sicher, daß das Bild einer jeden Menge unter einer Funktion wieder eine Menge ist. Dies wird besonders deutlich in der in 3.10 bewiesenen äquivalenten Charakterisierung des Ersetzungsschemas. Zunächst formulieren wir **(Ers)** unter Verwendung von Klassentermen. Der Beweis des nachfolgenden Resultates verbleibt dem Leser.

3.9 Lemma *Äquivalent sind:*

(i) **(Ers)**.

(ii) Für jede $\in$-Formel $\varphi(x, y, \vec{w})$ gilt die Aussage
$\forall \vec{w}\big(\forall x, y_1, y_2(\varphi(x, y_1, \vec{w}) \wedge \varphi(x, y_2, \vec{w}) \rightarrow y_1 = y_2) \longrightarrow \forall a\{y \mid \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y, \vec{w}))\} \in V\big)$.

3.10 Lemma *Auf der Basis von* **EML** *sind die folgenden beiden Schemata gleichwertig:*

(i) **(Ers)**.

(ii) Für jeden Klassenterm $F \equiv \{z \mid \psi(z, \vec{w})\}$ gilt die Aussage $\forall \vec{w} \forall a\big(\mathrm{Fun}(F) \rightarrow F[a] \in V\big)$.

Beweis. Es gelte **EML**.

„(i)⇒(ii)“. Sei F wie in (ii). Wir machen die freien Variablen $\vec{w}$ von F explizit, indem wir $F_{\vec{w}}$ schreiben. Definiere $\varphi(x, y, \vec{w}) :\equiv \big(y = F_{\vec{w}}(x)\big)$. (Im vorigen Kapitel haben wir definiert, welche $\in$-Formel hierunter exakt zu verstehen ist.) Seien dann Mengen $\vec{w}$ und a vorgegeben. Es gelte Fun $(F_{\vec{w}})$. Wende **(Ers)** auf φ sowie die Parameter $\vec{w}$ und a an. Da F funktional ist, ist die Prämisse der Aussage in **(Ers)** erfüllt, so daß $\{y \mid \exists x\ x \in a \wedge \varphi(x, y, \vec{w})\} \in V$ ist. Wegen $\{y \mid \exists x\ x \in a \wedge \varphi(x, y, \vec{w})\} = F[a]$ ist damit alles gezeigt.

„(ii)⇒(i)“. Sei $\varphi(x, y, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien Mengen $\vec{w}$ und a vorgegeben, und es gelte

(1) $\forall x, y_1, y_2(\varphi(x, y_1, \vec{w}) \wedge \varphi(x, y_2, \vec{w}) \rightarrow y_1 = y_2)$.

Definiere einen Klassenterm F durch

$$F :\equiv \big\{z \mid \exists x, y(z = (x, y) \wedge \varphi(x, y, \vec{w}))\big\}.$$

Aus (1) folgt Fun(F). Nach Voraussetzung ist $F[a] \in V$. Es ist leicht zu sehen, daß

$$\big\{y \mid \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y, \vec{w}))\big\} = F[a]$$

gilt. Damit ist alles bewiesen. QED

Das Ersetzungsschema kann das Aussonderungsschema ersetzen:

3.11 Satz *Das Aussonderungsschema folgt aus dem Ersetzungsschema.*

BEWEIS. Es gelte **(Ers)**. Sei $\varphi(x, \vec{w})$ wie im Aussonderungsschema. Setze $\psi(x, y, \vec{w}) :\equiv (x = y \wedge \varphi(x, \vec{w}))$. Dann erfüllt ψ die Voraussetzungen des Ersetzungsschemas. Also existiert zu a und Parametern $\vec{w}$ ein b mit

$$\forall y\big(y \in b \longleftrightarrow \underbrace{\exists x(x \in a \wedge \psi(x, y, \vec{w}))}_{\iff (y \in a \wedge \varphi(y, \vec{w}))}\big).$$

Also gilt **(Aus)**. QED

Warum nehmen wir zu unserem Axiomensystem sowohl **(Ers)** als auch **(Aus)** auf, wenn doch das letztere aus dem ersteren folgt? Zum einen gibt es hierfür historische Gründe. Viel wichtiger sind jedoch praktische Gründe: muß für ein gewisses „Universum" gezeigt werden, daß in ihm die **ZF**- oder **ZFC**-Axiome gelten, so weist man im allgemeinen zunächst die einfacheren Axiome nach. Mit jedem nachgewiesenen Axiom wächst die Kenntnis der Struktur dieses Universums. Dieses Wissen kann ggf. beim Nachweis der komplizierteren Axiome angewendet werden und diese Nachweise vereinfachen. Gelingt es zum Beispiel, das Aussonderungsschema „früh" zu beweisen, so genügt es danach zum Nachweis, daß irgendein Klassenterm A im betreffenden Universum als Mengen interpretiert wird, zu zeigen, daß dieser Klassenterm Teilklasse einer Menge a dieses Universums ist. (Dann ist nämlich $A = A \cap a$, also A nach **(Aus)** eine Menge.) Ein solcher Nachweis ist zum Beispiel beim Beweis der Gültigkeit von **(Ers)** zu erbringen.

Wir bemerken nebenbei, daß unter den bisher behandelten Axiomen auch **(Ex)** „überflüssig" ist, die Existenz einer leeren Menge folgt nämlich aus **(Inf)** (in seiner ursprünglichen Formulierung). Wir verzichten aber nicht auf **(Ex)**, da uns dieses Axiom einerseits erlaubt, die grundlegende Theorie **EML** zu formulieren und uns andererseits ermöglicht, in einer Umformulierung von **(Inf)** bereits von der leeren Menge sprechen zu können.

Von nun an setzen wir bis zum Abschluß unserer Analyse des Ersetzungsaxioms – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – die Axiome EML, (Aus), und (Ers) voraus. Auf der Basis dieser Axiome können wir bereits viele Klassenterme als Mengen identifizieren.

3.12 Lemma *Für $x, y \in V$ ist $x \times y \in V$.*

BEWEIS. Wir zeigen:

(1) Für $z \in V$ gilt $x \times \{z\} \in V$.

Dann ist nämlich, wie man leicht sieht, $G :\equiv \big\{(x, x \times \{z\}) \bigm| z \in V\big\}$ funktional und

$$x \times y = \bigcup\big\{x \times \{z\} \mid z \in y\big\} = \bigcup G[y] \in V$$

nach **(Ers)** und **($\bigcup$-Ax)**.

BEWEIS von (1). Es ist $x \times \{z\} = F[x]$ mit $F :\equiv \big\{\big(u, (u, z)\big) \bigm| u \in V\big\}$. Da $\mathrm{Fun}(F)$ gilt, folgt (1) aus **(Ers)**. qed(1)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

3.13 Corollar *Seien $r, s \in V$ und A ein Klassenterm. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{dom}(r) \in V$.

(b) $\mathrm{ran}(r) \in V$.

(c) $\mathrm{field}(r) \in V$.

(d) $r \restriction A \in V$.

(e) $r[A] \in V$.

(f) $r \circ s \in V$.

(g) $r^{-1} \in V$.

Beweis. zu (a). Wegen **(Aus)** genügt es zu zeigen, daß der Klassenterm $\mathrm{dom}(r)$ Teilklasse eines Elementes a von V ist. Da aus $(x,y) \in r$, also $\big\{\{x\},\{x,y\}\big\} \in r$, folgt $x, y \in \bigcup\bigcup r$, ergibt sich zunächst $\mathrm{dom}(r) = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in r\} \subset \bigcup\bigcup r$. Zweimaliges Anwenden von **($\bigcup$-Ax)** liefert $\bigcup\bigcup r \in V$, so daß wir (a) bewiesen haben.

zu (b). Dies beweist man analog zu (a).

zu (c). Dies folgt aus **($\bigcup$-Ax)** sowie (a) und (b).

zu (d). Es ist $r \restriction A \subset r$, so daß **(Aus)** (d) beweist.

zu (e). Dies folgt wegen (b) mit **(Aus)** aus $r[A] \subset \mathrm{ran}(r)$.

zu (f). Für den Klassenterm $r \circ s$ gilt $r \circ s \subset \mathrm{dom}(s) \times \mathrm{ran}(r)$. Da das kartesische Produkt zweier Mengen wiederum eine Menge ist, folgt jetzt (f) wegen (a) und (b) aus **(Aus)**.

zu (g). $r^{-1} \subset \mathrm{ran}(r) \times \mathrm{dom}(r)$. QED

Jede Klasse von Relationen, deren Felder alle in einer fest gewählten Menge x liegen, ist eine Menge. Als Beispiele für diese Tatsache halten wir fest:

3.14 Lemma *Gelte zusätzlich* **(Pot)**. *Dann gilt:*

(a) $\big\{r \mid \mathrm{Rel}(r) \wedge \mathrm{field}(r) \subset x\big\} \in V$.

(b) $\{r \mid r$ *ist Äquivalenzrelation auf* $x\} \in V$.

(c) $\{r \mid r$ *ist lineare Ordnung auf* $x\} \in V$.

Beweis. (a) folgt wegen

$$\big\{r \mid \mathrm{Rel}(r) \wedge \mathrm{field}(r) \subset x\big\} \subset \mathrm{Pot}(x \times x) \in V$$

aus **(Aus)**. Die Klassen in (b) und (c) sind Teilklassen der Menge aus (a). QED

In Gegenwart von **(Ers)** können wir Aussagen über Funktionenklassen treffen.

3.15 Lemma *Seien A und B Klassenterme. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $A \notin V$ *impliziert* ${}^{A}B = \emptyset$.

(b) ${}^{\emptyset}B = \{\emptyset\}$.

(c) Ist $A \in V$, $A \neq \emptyset$ *und ist* $B \notin V$, *so ist* ${}^{A}B \notin V$.

(d) Es gelte zusätzlich **(Pot)**. *Wenn* $A \in V$ *und* $B \in V$ *sind, so ist* ${}^{A}B \in V$.

Beweis. zu (a). Angenommen, ${}^{A}B \neq \emptyset$. Sei $f\colon A \to B$. Dann ist $A = \mathrm{dom}(f) \in V$ nach 3.13. Also gilt (a).

zu (b). Dies folgt aus $\mathrm{Fun}(\emptyset)$ und $\emptyset \times B = \emptyset$.

zu (c). Sei $\emptyset \neq A \in V$ und $B \notin V$. Angenommen, ${}^{A}B \in V$. Setze

$$C :\equiv \left\{ y \;\middle|\; \exists f \Big(f \in {}^{A}B \wedge y = \mathrm{ran}(f) \Big) \right\}.$$

Dann gilt $C \in V$ nach **(Ers)** und somit $\bigcup C \in V$. Wir zeigen:

(1) $B \subset \bigcup C$.

Nach **(Aus)** ist dann $B \in V$, was der Voraussetzung widerspricht.

Beweis von (1). Sei $b \in B$ beliebig. Wegen $A \in V$, $A \neq \emptyset$ ist durch $F :\equiv A \times \{b\}$ eine Funktion mit $F \in V$ und $b \in \mathrm{ran}(F)$ definiert. Also gilt $b \in \mathrm{ran}(F) \in C$, also $b \in \bigcup C$. qed(1)

zu (d). Dies folgt aus ${}^{A}B \subset \mathrm{Pot}(A \times B) \in V$. QED

Eine funktionale Klasse, deren Definitionsbereich eine Menge ist, ist eine Menge:

3.16 Lemma *Sei $x \in V$ und F ein Klassenterm mit $F\colon x \to V$. Dann ist $F \in V$. Gilt* **(Pot)**, *so ist auch $\times_{i\in x} F(i) \in V$.*

Beweis. Wegen $F = \{(i, F(i)) \mid i \in x\} = G[x]$, wobei

$$G :\equiv \{(i,(i,F(i))) \mid i \in x\} \cup \{(i,i) \mid i \in V \setminus x\}$$

funktional ist, folgt $F \in V$ aus **(Ers)**. Insbesondere ist dann auch $\mathrm{ran}(F) \in V$ nach 3.13. Da

$$\underset{i\in x}{\times} F(i) = \{f \mid f\colon x \to V \wedge \forall i \in x\; f(i) \in F(i)\} \subset {}^{x}\big(\mathrm{ran}(F)\big)$$

und der ganz rechts stehende Klassenterm nach 3.15 in V ist, folgt $\times_{i\in x} F(i) \in V$ aus **(Aus)**. QED

Hiermit beschließen wir unsere Analyse des Ersetzungsschemas und seiner Folgerungen und wenden uns dem Fundierungsschema zu.

3.6 Das Fundierungsschema.

Das Fundierungsschema geht auf Mirimanoff (1917) zurück. Es ist unter allen **ZFC**-Axiomen vielleicht dasjenige, das im mathematischen Alltag am wenigsten verwendet wird. Gleichwohl hat es sehr weitreichende und wichtige Konsequenzen, auf die wir im folgenden kurz eingehen wollen. Zuerst geben wir unter Verwendung der Klassentermschreibweise eine bzgl. **EML** äquivalente Charakterisierung von **(Fund)** an; der Beweis dieser Äquivalenz verbleibt dem Leser zur Übung.

3.17 Lemma *Unter* **EML** *sind äquivalent:*

(i) **(Fund)**.

(ii) Für jeden Klassenterm $A \equiv \{x \mid \varphi(x, \vec{w})\}$ gilt die Aussage $\forall \vec{w}\big(A \neq \emptyset \to \exists x(x \in A \wedge A \cap x = \emptyset)\big)$.

Was bewirkt das Fundierungsschema? Wir haben bei der Analyse des Unendlichkeitsaxioms bemerkt, daß wir auf der Basis der Axiome **EML**, **(Aus)**, **(Pot)** und **(Inf)** nicht zeigen können, daß $x \notin x$ für jede Menge x gilt. Auch **(Ers)** hilft hierbei nicht weiter. Gleichwohl scheint uns intuitiv der Fall $x \in x$ „pathologisch". **(Fund)** trägt unserer Intuition und Erfahrung in soweit Rechnung, als es keine Mengen zuläßt, die sich selbst als Element enthalten. Wir haben sogar noch ein schärferes Resultat:

3.18 Satz *Unter* **EML** + **(Fund)** *gilt: $\in$ hat keine Zykel. D.h., sind $x_1, \dots, x_n$ n konkret vorgegebene Variablen, so gilt $\neg(x_1 \in x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \in x_n \wedge x_n \in x_1)$, speziell ($n = 1$): $x_1 \notin x_1$.*

Beweis. Angenommen,

(1) $\quad x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$.

Durch $A :\equiv \{x_1, \dots, x_n\}$ wird ein Klassenterm A gegeben und es ist $A \neq \emptyset$. Sei gemäß **(Fund)** x mit $x \in A$ und $A \cap x = \emptyset$ gewählt. Dann ist $x = x_k$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$. Im Fall $k > 1$ ist aber $x_{k-1} \in A \cap x$ und im Fall $k = 1$ ist $x_n \in A \cap x$. Also in jedem Fall $A \cap x \neq \emptyset$. Der sich ergebende Widerspruch zeigt, daß (1) falsch sein muß, und der Satz ist bewiesen. QED

Wir werden später in den Bereichen „Induktion" und „Rekursion" noch weitere Anwendungen des Fundierungsschemas kennen lernen.

3.7 Das Auswahlaxiom.

(AC) gehört, wie bereits erwähnt, zu ZERMELOs 1908 aufgestellten Axiomensystem. Bevor wir seine Bedeutung und Stellung in der Mathematik kommentieren, beweisen wir zunächst drei äquivalente Darstellungen. (In 8.1 werden wir weitere Äquivalenzen formulieren und beweisen.) Die erste Charakterisierung vereinfacht die Formulierung von **(AC)** mit Hilfe der Klassentermschreibweise. Ihr Beweis verbleibt dem Leser zur Übung.

3.19 Lemma *Unter* **EML** *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) $\forall a \exists b \big((\emptyset \notin a \wedge \forall x_1, x_2 ((x_1 \in a \wedge x_2 \in a \wedge x_1 \neq x_2) \to x_1 \cap x_2 = \emptyset)\big) \longrightarrow \forall x \big(x \in a \to \exists y\, b \cap x = \{y\}\big)\big)$.

Tiefliegender ist der im folgenden Satz aufgezeigte Zusammenhang:

3.20 Satz *Unter* **ZF** *sind äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) $\forall r \exists b \left(\mathrm{Eq}(r) \longrightarrow \big(\forall x, y \big((x \in b \wedge y \in b \wedge x \neq y) \to \neg\, xry\big) \wedge \forall x \exists y \big(x \in \mathrm{field}(r) \to (y \in b \wedge xry)\big)\big)\right)$.
In Worten: jede Äquivalenzrelation hat ein vollständiges Repräsentantensystem.

(iii) $\forall f, x \left(\big(f : x \to V \wedge \forall i\, (i \in x \to f(i) \neq \emptyset)\big) \longrightarrow \times_{i \in x} f(i) \neq \emptyset \right)$.
In Worten: das Produkt nicht-leerer Mengen ist nicht leer.

BEWEIS. „(i)⇒(iii)". Seien $f, x \in V$ mit $f : x \to V$ und $f(i) \neq \emptyset$ für alle $i \in x$. Es ist ein $g : x \to V$ mit $g(i) \in f(i)$ für alle $i \in x$ zu finden. Hierzu „machen" wir die Mengen $f(i)$ disjunkt und wählen mit **(AC)** aus jedem der $f(i)$ ein Element $g(i)$ aus. Formal geschieht das wie folgt: durch $\big\{\{i\} \times f(i) \bigm| i \in x\big\}$ ist nach **(Ers)** eine Menge a definiert; die Elemente von a sind nicht-leer und paarweise disjunkt. Nach **(AC)** existiert eine Menge $b \in V$, die jedes Element von a in genau einem Punkt trifft. Aus **ZF** folgt, daß durch $\bigcup\big\{b \cap (\{i\} \times f(i)) \bigm| i \in x\big\}$ eine Menge g definiert ist. Man sieht leicht, daß $g : x \to V$ gilt und die Elemente von g von der Form $\big(i, g(i)\big)$ mit $i \in x$ und $g(i) \in f(i)$ sind. g ist also wie benötigt.

„(iii)⇒(ii)". Sei r wie in (ii). Durch $\big\{[x]_r \bigm| x \in \mathrm{field}(r)\big\}$ ist eine Menge a definiert. $\big\{(y, y) \bigm| y \in a\big\}$ ist eine funktionale Menge $f : a \to a$, die identische Abbildung von a. Wegen $x \in [x]_r$ ist $\emptyset \notin a$ und somit $f(y) \neq \emptyset$ für jedes $y \in a$. Nach (iii) existiert ein $g \in \times_{y \in a} f(y)$. Dann ist $g([x]_r) \in [x]_r$ (also $g([x]_r) r x$) und $g([x]_r) \neq g([x']_r)$ impliziert $[x]_r \neq [x']_r$, d.h., $\neg\, xrx'$ und somit $\neg\, g([x]_r) r g([x']_r)$. $\mathrm{ran}(g)$ ist also eine Menge b, die ein vollständiges Repräsentantensystem für r ist, d.h., die so ist, wie für (ii) benötigt.

„(ii)⇒(i)". Sei a eine Menge nicht-leerer, paarweise disjunkter Mengen. Wir fassen a als Partition von $\bigcup a$ auf und definieren die zu dieser Partition gehörende Äquivalenzrelation[23] r. Ein vollständiges Repräsentantensystem von r trifft jedes Element von a in genau einem Punkt. Formal geschieht dies wie folgt: Durch $\bigcup\{u \times u \mid u \in a\}$ ist eine relationale Menge r gegeben. Man sieht leicht, daß r eine Äquivalenzrelation ist und $a = \big\{[x]_r \bigm| x \in \bigcup a\big\}$ gilt. Wähle gemäß (ii) für r ein vollständiges Repräsentantensystem $b \in V$. Dann trifft b jede Äquivalenzklasse von r (d.h., jedes Element von a) in genau einem Punkt, ist also wie für (i) benötigt. QED

Das Auswahlaxiom scheint uns kaum weniger einsichtig als die bereits behandelten Axiome und Schemata. Von ihm wird nahezu in jedem Teilgebiet der Mathematik Gebrauch gemacht. So kann man z.B. *nicht* zeigen, daß jeder Vektorraum eine Basis hat oder daß jeder Körper einen algebraischen Abschluß hat, wenn man nicht das Auswahlaxiom voraussetzt. Auch an vielen „unscheinbaren" Stellen findet **(AC)** Anwendung: will man z.B. indirekt beweisen, daß aus der Folgenstetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ die durch Epsilontik definierte Stetigkeit an dieser Stelle folgt, so nimmt man an, daß es $\varepsilon > 0$ gibt, so daß es für alle $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\big|x - x_0\big| < \delta$ und $\big|f(x) - f(x_0)\big| \geq \varepsilon$. Dann setzt man sukzessive für δ die Werte $\frac{1}{n}$, wobei $n \geq 1$ die natürlichen Zahlen durchläuft, und *wählt* ein x_n

[23] Zwei Elemente von $\bigcup a$ sind genau dann äquivalent, wenn sie in derselben Teilmenge der Partition liegen.

mit $\left|x_n - x_0\right| < \frac{1}{n}$ sowie $\left|f(x_n) - f(x_0)\right| \geq \varepsilon$. (Dann gilt $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Folgenstetigkeit.) In mengentheoretischer Sprechweise entspricht die Auswahl der „Gegenbeispielfolge“ $\left(x_n \mid n \geq 1\right)$ der Existenz eines Elementes in

$$\bigtimes_{n\geq 1}\left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \left|x - x_0\right| < \frac{1}{n} \wedge \left|f(x) - f(x_0)\right| \geq \varepsilon\right\}.$$

Diese Existenz wird gerade durch **(AC)** gewährleistet.

Trotz dieser Nützlichkeit stehen einige Mathematiker dem Auswahlaxiom mit Ressentiments gegenüber. Diese haben ihren Grund in der Tatsache, daß **(AC)** keinen konstruktiven Charakter hat: **(AC)** macht keine Aussagen darüber, wie die Auswahlmenge, deren Existenz **(AC)** sichert, aussieht, oder auf welche Weise sie aus den vorgelegten Parametern gewonnen werden kann. Am Ende des letzten Jahrhunderts lassen einflußreiche Kreise der Mathematik, unter ihnen Kronecker[24] als herausragender Kopf, solcherart gewonnene Existenzen nicht gelten. Für sie ist *Existenz* gleichbedeutend mit *Konstruierbarkeit*, so daß sie **(AC)** ablehnen. Aus dieser Grundhaltung entwickelt sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts der *Intuitionismus*: er lehnt das *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten*[25] für unendliche Mengen ab, so daß die Existenz einer unendlichen Menge nicht dadurch bewiesen werden kann, daß man aus der Annahme ihrer Nichtexistenz einen Widerspruch ableitet, mithin also eine Konstruktion dieser Menge durchgeführt werden muß. Cantor und die ihm anhängenden und nachfolgenden Mathematiker vertreten einen schwächeren Existenzbegriff, den Hilbert[26] durch die Formel „Existenz=Widerspruchsfreiheit“ charakterisiert: die Existenz eines Objektes kann schon dann angenommen werden, wenn diese Annahme auf keinen Widerspruch führt. (Dieser Streit mündet in den sogenannten Grundlagenstreit der Mathematik, der im ersten Drittel unseres Jahrhunderts von einigen Mathematikern z.T. erbittert geführt wird.) Wir sind hier Anhänger der Cantorschen Auffassung, vertreten den schwachen Existenzbegriff und akzeptieren Existenzaussagen, die m.H. von **(AC)** bewiesen werden. In 24.10 werden wir sehen, daß es vom logischen Standpunkt her keine Gründe für die Ablehnung von **(AC)** gibt: wenn **ZF** konsistent ist, so ist auch **ZFC** konsistent. Wer aber partout auf das Auswahlaxiom verzichten und um ganz sicher zu gehen die Negation des Auswahlaxioms in sein Axiomensystem aufnehmen will, kann auch dies unbeschadet tun. Ist nämlich **ZF** konsistent, so ist auch **ZF** + ¬ **(AC)** konsistent, wie wir in 32.7 beweisen werden. Mit anderen Worten: **(AC)** ist von den Axiomen **ZF** *unabhängig.*

Hiermit beschließen wir unsere erste Analyse und Kommentierung der **ZFC**-Axiome. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß es unmöglich ist, formal zu beweisen, daß **ZFC** auf keine Widersprüche führt. Da aber die Axiome aus der mathematischen Erfahrung abgeleitet sind, besteht Grund zur Annahme, daß **ZFC** widerspruchsfrei ist. *Sicher* können wir uns dessen aber nicht sein. Henri Poincaré[27] hat

[24]Leopold Kronecker (7.12.1823, Liegnitz–29.12.1891, Berlin) 1841–1845 Studium in Berlin, Breslau und Bonn; 1845 Promotion bei Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805, Düren–5.5.1859, Göttingen) später Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften und Dozent in Berlin; ab 1883 ordentlicher Professor in Berlin (Nachfolge von Ernst-Eduard Kummer (29.1.1810, Sorau–14.5.1893, Berlin)). Kroneckers Hauptarbeitsgebiet sind Bereiche der Algebra und Zahlentheorie. Er ist ein erbitterter Gegner der aufkommenden Mengenlehre und scheut auch vor persönliche Angriffen auf Cantor nicht zurück, den er als einen „Verderber der Jugend“ beschimpft.

[25]Tertium non datur: eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

[26]David Hilbert (23.1.1862, Königsberg–14.2.1943, Göttingen) 1880–1885 Studium in Königsberg und Heidelberg (ein Semester); 1885 Promotion bei Carl Louis Ferdinand von Lindemann (12.4.1852, Hannover–6.3.1939, München); 1886 Habilitation; 1893 ordentlicher Professor (Nachfolge von Lindemann), ab 1895 in Göttingen. Hilberts Arbeitsgebiete in der Mathematik reichen von der Zahlentheorie über Geometrie und Analysis bis hin zu Grundlagenfragen der Mathematik. Hilbert ist ein eifriger Verfechter der axiomatischen Methode. In seinen 1899 erschienenen *Grundlagen der Geometrie* etwa stellt er die Geometrie auf eine neue, axiomatische Grundlage, die ganz von der Anschauung absieht. Berühmt sind heute noch seine am 8.8.1900 in einem Vortrag während des Internationalen Mathematikerkongresses in Paris formulierten dreiundzwanzig, damals ungelösten mathematischen Probleme.

[27]Jules-Henri Poincaré (29.4.1854, Nancy–17.7.1912, Paris) 1873–1875 Studium an der École Polytechnique, ab 1875 an der École des Mines, die er 1877 als Ingenieur für Bergbau abschließt; 1879 Promotion bei Jean Gaston Darboux (13.8.1842, Nîmes–23.2.1917, Paris), 1879 Professor für mathematische Analysis in Caen, ab 1881 außerordentlicher Professor an der Sorbonne in Paris. Poincaré, der ursprünglich Bergwerksingenieur werden wollte, leistet wichtige Beiträge zu vielen Bereichen sowohl der Reinen als auch der Angewandten Mathematik. Der Cantorschen Mengenlehre steht er skeptisch gegenüber, insbesondere leugnet er die Evidenz des Zermeloschen Axiomensystems für unendliche Mengen.

dieses einmal wie folgt charakterisiert: „Wir haben einen Zaun errichtet, um die Herde vor den Wölfen zu schützen, aber wir wissen nicht, ob sich nicht bereits einige Wölfe innerhalb des Zaunes befinden.“

3.8 Einige einführende, metamathematische Betrachtungen über ZFC.

Die **ZFC**-Axiome sind ein „formales System“, die gültigen Aussagen der Theorie **ZFC** ergeben sich durch logische Ableitungen (=Beweise) aus den Axiomen. Bereiche, in denen die **ZFC**-Axiome gelten, haben die Form (B, E), wobei B ein „Universum“ und E eine zweistellige Relation auf B ist, die die $\in$-Relation in B darstellt (interpretiert). Ein **ZFC**-Axiom φ gilt in (B, E), wenn man durch Interpretation von $\in$ durch E aus φ eine für die Objekte von B gültige Aussage erhält. Wir schreiben dann auch $(B, E) \models \varphi$ und sagen, „(B, E) ist ein *Modell* von φ“. Bezeichnet etwa $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $<$ die kanonische Ordnung von $\mathbb{N}$, so gilt $(\mathbb{N}, <) \models$ (**Pot**): hierzu müssen wir zeigen, daß die aus **(Pot)**, also der Aussage

$$\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \forall v_3 (v_3 \in v_2 \to v_3 \in v_0)\big),$$

nach Ersetzung von $\in$ durch $<$ eine Aussage entsteht, die im Bereich der natürlichen Zahlen gilt. Die auf diese Weise entstehende Aussage ist

$$(*) \qquad \forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 < v_1 \leftrightarrow \forall v_3 (v_3 < v_2 \to v_3 < v_0)\big).$$

Ist eine natürliche Zahl v_0 beliebig vorgegeben, so setze $v_1 :\equiv v_0 + 1$. Dann gilt für jede natürliche Zahl v_2: $v_2 < v_1 \leftrightarrow \forall v_3 (v_3 < v_2 \to v_3 < v_0)$. Also gilt $(*)$. Im Abschnitt Mathematische Logik werden wir die hier angerissenen Begriffe exakt definieren; im Abschnitt Axiomatische Mengenlehre werden wir **ZFC** einer metamathematischen Analyse unterziehen.

Zum Abschluß dieses Kapitels weisen wir darauf hin, daß es neben der von uns gewählten Axiomatisierung noch andere Axiomensysteme für die Mengenlehre gibt, etwa das System von VON NEUMANN[28], BERNAYS[29] und GÖDEL (**NBG**), siehe Kapitel 20. Man kann zeigen, daß in **ZFC** und **NBG** dieselben Aussagen über Mengen beweisbar sind.

4 Ordinalzahlen.

In diesem Kapitel setzen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – das System ZF$^-$ voraus.

Wir haben bereits die uns intuitiv gegebenen natürlichen Zahlen in V formalisiert, indem wir für jede natürliche Zahl n den Klassenterm $\tilde{n}$ definiert haben, siehe 2.9. Auf der Basis von **EML** konnten wir zeigen, daß $\tilde{n} \in V$ ist. Wir haben $\tilde{0} = \emptyset$ und $\tilde{n} = \left\{\tilde{0}, \tilde{1}, \ldots, \widetilde{n-1}\right\}$ im Fall $n > 0$. Außerdem machen wir die folgenden Beobachtungen:

(a) Die $<$-Relation der natürlichen Zahlen wird dargestellt durch die $\in$-Relation. D.h., $m < n$ bedeutet $\tilde{m} \in \tilde{n}$.

[28] JOHANN VON NEUMANN (8.12.1903, Budapest–8.2.1957, Washington) 1921–1925 Studium in Berlin und Budapest (Mathematik) sowie in Zürich (Chemie); 1926 Promotion bei LEOPOLD FEJÉR (9.2.1880, Pécs–15.10.1959, Budapest); fast gleichzeitig Diplomprüfung für Physik und Chemie in Zürich; 1928 Habilitation, danach Dozent in Berlin und Princeton, dort später Professor am Institute for Advanced Study. VON NEUMANNs Arbeitsgebiet ist die mathematische Grundlagenforschung, aber auch Fragen der Physik und der mathematischen Praxis gehört zu seinem Interesse. Er untersucht die Axiomatisierbarkeit der Mengenlehre und gibt hierbei eine mengentheoretische Formalisierung der Ordinalzahlen an (siehe 4.2), was CANTOR noch nicht gelungen war. Pionierarbeit leistet VON NEUMANN auch auf dem Gebiet der Computertechnik: er ist an der Konstruktion der ersten elektronischen Großrechenanlagen an führender Stelle beteiligt.

[29] ISAAK PAUL BERNAYS (17.10.1888, London–18.9.1977, Zürich) 1912 Promotion bei EDMUND LANDAU (14.2.1877, Berlin–19.2.1938, Berlin) in Göttingen und Habilitation in Zürich; 1918 Assistent HILBERTS in Göttingen, erneute Habilitation; 1922 außerordentlicher Professor in Göttingen; nach der Entlassung 1934 zunächst Privatdozent, dann 1945–1959 außerordentlicher Professor an der Eidgenössischen TH in Zürich. BERNAYS Hauptarbeitsgebiet ist die mathematische Grundlagenforschung und die Mengenlehre.

(b) Jedes Element eines $\tilde{n}$ ist auch Teilmenge von $\tilde{n}$, d.h., $\tilde{n}$ ist unter $\in$-Vorgängern abgeschlossen. („$\tilde{n}$ ist transitiv“)

(c) $\tilde{n}$ wird durch $\in$ strikt linear geordnet.

(d) Die Nachfolgerbildung der natürlichen Zahlen wird in V formalisiert durch die Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$: $\widetilde{n+1} = \tilde{n} \cup \{\tilde{n}\}$.

(e) Sei ω ein Klassenterm, der $\tilde{0}$ enthält und unter der Nachfolgerbildung in V (also der Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$) abgeschlossen ist in dem Sinn, daß jedes Element $y \neq \tilde{0}$ von ω von der Form $y = x \cup \{x\}$ mit $x \in \omega$ ist. (Wir geben hier noch keine präzise Definition von ω; dies wird erst im Laufe dieses Kapitels geschehen, siehe 4.23) Dann ist $\tilde{n} \in \omega$ für jede natürliche Zahl n und offenbar wird ω durch $\in$ strikt linear geordnet. ω hat also im Prinzip dieselben Eigenschaften wie ein $\tilde{n}$ bis auf die Tatsache, daß ω größer als jedes solche $\tilde{n}$ ist (wobei wir $\tilde{n} \in \omega$ als $\tilde{n} < \omega$ interpretieren, da, wie gesehen, $\in$ auf ω sich wie eine strikte lineare Ordnung verhält). Wenn nun $\omega \in V$ gilt – und wir werden sehen, daß dem so ist (siehe 4.24) –, so können wir die Nachfolgerbildung an der Stelle ω erneut starten und kommen zu $\omega + \tilde{1} = \omega \cup \{\omega\} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2} \ldots, \omega\}$, $\omega + \tilde{2} = (\omega + \tilde{1}) \cup \{\omega + \tilde{1}\} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2} \ldots, \omega, \omega + \tilde{1}\}$ usw. ω ist dann die erste Zahl $\neq \tilde{0}$, die nicht durch Nachfolgerbildung sondern durch „Supremumsbildung“ über sämtliche Vorgänger erhalten wird. (Solche Zahlen werden wir *Limesordinalzahlen* nennen.) Führen wir unseren Zählprozeß fort, erhalten wir auf analoge Weise erneut eine Limeszahl, und dies setzt sich ohne Ende fort.[30]

Dieses Kapitel ist der Präzisierung der oben skizzierten Sachverhalte gewidmet.

4.1 Die Klasse On der Ordinalzahlen.

Wir definieren (endliche und unendliche) Ordinalzahlen und studieren ihre grundlegenden Eigenschaften. Unsere Definition der Ordinalzahlen geht auf Johann von Neumann (1923) zurück.

4.1 Definition Seien A und R Klassenterme.

(a) $\mathrm{Trans}(A) :\equiv \forall x, y\big((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A\big)$
D.h., A ist **transitiv** genau dann, wenn A unter $\in$-Vorgängern abgeschlossen ist, also jedes Element von A auch Teilmenge von A ist.

(b) $\in\restriction A :\equiv \big\{(x,y) \bigm| x \in A \wedge y \in A \wedge x \in y\big\}$ ist die auf A eingeschränkte $\in$-Relation.

4.2 Definition (a) $\mathrm{On} :\equiv \big\{x \bigm| \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}\big(x, \in\restriction x\big)\big\}$ ist die Klasse der **Ordinalzahlen**.

(b) x ist eine Ordinalzahl $:\equiv x \in \mathrm{On}$.

(c) Für $x, y \in \mathrm{On}$ setzen wir $x < y :\equiv x \in y$ und $x \leq y :\equiv x < y \vee x = y$.

Zur Notation: Wir verwenden kleine griechische Buchstaben als Variablen für Ordinalzahlen. Eine Formel wie $\forall\alpha\,\varphi$ ist zu lesen als $\forall\alpha\,(\alpha \in \mathrm{On} \to \varphi)$ und eine Formel der Art $\exists\alpha\,\varphi$ ist zu lesen als $\exists\alpha\,(\alpha \in \mathrm{On} \wedge \varphi)$.

4.3 Bemerkung Für jede natürliche Zahl n ist $\tilde{n} \in \mathrm{On}$, wie man leicht verifiziert.

Die nächsten beiden Sätze zeigen, daß die Klasse On die definierende Bedingung von On erfüllt.

4.4 Satz Trans(On).

Beweis. Sei $x \in \alpha$ und $\alpha \in \mathrm{On}$. Es ist zu zeigen, daß x in On liegt, also die definierende Bedingung des Klassentermes On erfüllt.

(1) Es gilt $\mathrm{Trans}(x)$.

[30] Eine kleine Warnung die Menge ω betreffend: ω kann durchaus Elemente enthalten, die *nicht* von der Form $\tilde{n}$ sind, vgl. 4.31.

Beweis. Sei $u \in v \in x$. Es ist $u \in x$ zu zeigen. Aus $v \in x \in \alpha$ und der Transitivität von α folgt $v \subset \alpha$, so daß wir speziell $u \in \alpha$ haben. Aus $x, u \in \alpha$ und aus der Tatsache, daß α durch $<$ strikt linear geordnet wird, ergibt sich, daß genau eine der Aussagen $x \in u$ bzw. $x = u$ bzw. $u \in x$ erfüllt ist. Wäre $x \in u$, so hätten wir $x \in u \in v \in x$; wäre $x = u$, so hätten wir $x = u \in v \in x$. Da $\in$ keine Zykel hat, siehe 3.18, kann keine der beiden Aussagen richtig sein. Also muß $u \in x$ gelten. qed(1)

(2) x wird durch $\in\restriction x$ strikt linear geordnet.

Beweis. Da α transitiv ist, ist $x \subset \alpha$, und da α strikt linear von $\in\restriction \alpha$ geordnet wird, folgt sofort die Behauptung (beachte, daß in SLO nur Allquantoren vorkommen). qed(2)

(1) und (2) implizieren $x \in \mathrm{On}$. QED

4.5 Corollar $\forall\alpha\ \alpha = \{\gamma \mid \gamma < \alpha\}$*; speziell:* $\forall\alpha, \beta\ \big(\alpha = \beta \longleftrightarrow \forall\gamma(\gamma < \alpha \leftrightarrow \gamma < \beta)\big)$

Beweis. Da $\alpha \in \mathrm{On}$ und On transitiv ist, ist jedes Element von α eine Ordinalzahl $\gamma < \alpha$. QED

4.6 Satz $\mathrm{SLO}(\mathrm{On}, <)$.

Beweis. Nach Definition gilt $< \subset \mathrm{On} \times \mathrm{On}$; da $\in$ keine Zykel hat, gilt $\alpha \not< \alpha$.

(1) $<$ ist transitiv auf On.

Beweis. $\alpha < \beta < \gamma$ bedeutet $\alpha \in \beta \in \gamma$, was wegen der Transitivität von γ auf $\alpha \in \gamma$, also $\alpha < \gamma$ führt. qed(1)

(2) Je zwei Elemente von On sind bzgl. $<$ vergleichbar.

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein α, das die Eigenschaft

$$\varphi :\equiv \alpha \in \mathrm{On} \wedge \exists\beta\big(\beta \in \mathrm{On} \wedge \neg(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha)\big)$$

erfüllt. Nach **(Fund)** (angewendet auf φ) existiert dann ein $<$-minimales α, das mit einem gewissen β $<$-unvergleichbar ist. Erneute Anwendung von **(Fund)**, diesmal auf die Formel

$$\psi :\equiv \beta \in \mathrm{On} \wedge \neg(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha)),$$

liefert ein $<$-minimales $\beta \neq \alpha$, das zu α $<$-unvergleichbar ist. Wir zeigen $\alpha = \beta$ und erhalten so einen Widerspruch.

zu „$\subset$“. Ist $\gamma < \alpha$, so ist (wegen der Minimalität von α) γ mit β noch $<$-vergleichbar. D.h., es gilt entweder $\beta < \gamma$ oder $\beta = \gamma$ oder $\gamma < \beta$. Im ersten Fall wäre $\beta < \gamma < \alpha$, wegen der Transitivität von $<$ also $\beta < \alpha$; im zweiten Fall wäre ebenfalls $\beta < \alpha$. Dies widerspricht aber der $<$-Unvergleichbarkeit von α und β. Also können diese beiden Fälle nicht eintreten, d.h., es gilt $\gamma < \beta$.

zu „$\supset$“. Ist $\gamma < \beta$, so ist (wegen der Minimalität von β) γ noch mit α $<$-vergleichbar. Also $\alpha < \gamma$ oder $\alpha = \gamma$ oder $\gamma < \alpha$. Analog zum „$\subset$“-Beweis erhält man in den beiden ersten Fällen einen Widerspruch, so daß in der Tat $\gamma < \alpha$ gilt. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

4.7 Satz On *ist eine echte Klasse:* $\mathrm{On} \notin V$.

Beweis. Angenommen, $\mathrm{On} \in V$. Da On transitiv ist und von $<$ strikt linear geordnet wird, wäre $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. Da $\in$ keine Zykel hat, ergibt sich ein Widerspruch. QED

4.8 Bemerkung Die Tatsache, daß On die definierende Bedingung von On erfüllt (siehe 4.4 und 4.6) aber dennoch kein Element von On ist, wird manchmal als das **Paradoxon von** BURALI-FORTI[31] bezeichnet. BURALI-FORTI veröffentlicht im Jahr 1897 seine Entdeckung, daß die Bildung der Menge aller Ordinalzahlen zu einem Widerspruch führt. Dieses Resultat hat unabhängig von BURALI-FORTI auch CANTOR im Jahre 1895 gefunden.

4.2 Wohlordnungen.

Im folgenden analysieren wir genauer die Struktur von On und der $<$-Relation der Ordinalzahlen. Wir beginnen mit einem nützlichen Resultat über transitive Teilklassen von On.

4.9 Lemma *Sei A ein Klassenterm, $A \subset \mathrm{On}$ und A sei transitiv. Dann ist entweder $A = \alpha \in \mathrm{On}$ oder es ist $A = \mathrm{On}$. Speziell: die transitiven Teilmengen von* On *sind gerade die Ordinalzahlen.*

BEWEIS. Angenommen, $A \neq \mathrm{On}$; es ist $A \in \mathrm{On}$ zu verifizieren. Wähle hierzu $\beta \in \mathrm{On} \setminus A$. Nach **(Aus)** ist $A \cap \beta \in V$. Mehr noch, es ist $A \cap \beta \in \mathrm{On}$, denn $A \cap \beta$ ist transitiv aufgrund der Transitivität von A, β, und als Teilmenge von On durch $<$ strikt linear geordnet. Also genügt es, $A \cap \beta = A$ zu zeigen. Sei also $\gamma \in A$. Hätten wir $\gamma \not< \beta$, so wäre (wegen $\mathrm{SLO}(\mathrm{On}, <)$) $\beta \leq \gamma$. Aus der Transitivität von A und aus $\gamma \in A$ folgt dann $\beta \in A$, was der Wahl von β widerspricht. Also ist $\gamma < \beta$, d.h., $\gamma \in A \cap \beta$. QED

Die $<$-Ordnung von On erfüllt eine wesentlich stärkere Eigenschaft als die, strikt linear zu sein. Sie ist nämlich eine starke Wohlordnung, d.h. eine strikte lineare Ordnung, bezüglich der jede nicht-leere Teilklasse von On ein kleinstes Element und jedes Element nur mengenviele Vorgänger hat. Bevor wir dies beweisen, definieren und analysieren wir die Begriffe „Wohlordnung“ und „starke Wohlordnung“. Wir beginnen mit:

4.10 Definition Seien A und R Klassenterme.

(a) R heißt **Wohlordnung** auf A, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:
  (i) $\mathrm{SLO}(A, R)$.
  (ii) Für jeden Klassenterm B gilt die Aussage $B \neq \emptyset \wedge B \subset A \longrightarrow \exists x\big(x \in B \wedge \forall y(yRx \to y \notin B)\big)$. D.h., jede nicht-leere Teilklasse von A hat ein R-minimales Element.

  Wir schreiben in diesem Falle auch $\mathrm{WO}(A, R)$ und sagen, A wird durch R wohlgeordnet.

(b) R heißt **starke Wohlordnung** auf A, falls zusätzlich gilt: $\forall x(x \in A \to \{y \mid y \in A \wedge yRx\} \in V)$. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathrm{SWO}(A, R)$ und sagen, A wird durch R stark wohlgeordnet.

Im Fall, daß A sogar eine Menge ist, vereinfacht sich obige Definition:

4.11 Lemma *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{WO}(a, r)$.
(ii) $\mathrm{SLO}(a, r) \wedge \forall b\big((b \subset a \wedge b \neq \emptyset) \to \exists x\big(x \in b \wedge \forall y(yrx \to y \notin b)\big)\big)$.
(iii) $\mathrm{SWO}(a, r)$.

BEWEIS. „(i)$\Rightarrow$(ii)“. Dies ist klar, da b mit dem Klassenterm $B :\equiv \{x \mid x \in b\}$ übereinstimmt.

„(ii)$\Rightarrow$(iii)“. Nach **(Aus)** ist jeder Klassenterm $B \subset a$ eine Menge b, so daß sich sofort die Existenz eines r-minimalen Elementes in jeder nicht-leeren Teilklasse B von a ergibt. Nach **(Aus)** ist außerdem $\{y \mid y \in a \wedge yrx\} \in V$ für jedes $x \in a$.

„(iii)$\Rightarrow$(i)“. Dies ist klar. QED

[31] CESARE BURALI-FORTI (13.8.1861, Arezzo–21.1.1931, Turin) 1884 Promotion in Mathematik an der Universität Pisa; ab 1887 an der Militärakademie, ab 1906 als ordentlicher Professor; daneben 1894–1896 als Assistent von PEANO an der Universität Turin. Hauptarbeitsgebiet von BURALI-FORTI ist die Vektoranalysis sowie die Theorie der linearen Transformationen und deren Anwendungen u.a. auf physikalische Fragestellungen. Seine Beschäftigung mit der Grundlagenmathematik fällt in die erste Hälfte seines Lebens; hierbei versucht er, PEANOs Beiträge zu diesem Gebiet zu popularisieren.

4.12 Bemerkung Die Bedeutung des letzten Lemmas liegt zum einen in der Tatsache, daß bei Mengen die Begriffe „starke Wohlordnung" und „Wohlordnung" zusammenfallen, und zum anderen darin, daß wir im Mengenfall die Wohlordnungseigenschaft in V definieren können durch die in Punkt (ii) des Lemmas auftauchende $\in$-Formel. Beachten Sie, daß die Definition von $\mathrm{WO}(A,R)$ ein Schema, also nicht in V durchführbar ist, da auf alle Klassenterme B Bezug genommen wird. Wir werden die Charakterisierung (ii) im folgenden als Definition des Begriffes Wohlordnung im Mengenfall verwenden.

Das folgende Lemma zeigt, daß der Begriff der starken Wohlordnung auch im Klassenfall durch eine $\in$-Formel definiert werden kann.

4.13 Lemma *Seien A und R Klassenterme. Dann sind äquivalent:*

(i) *A wird durch R stark wohlgeordnet.*

(ii) $\mathrm{SLO}(A,R) \wedge \forall b\big((b \subset A \wedge b \neq \emptyset) \to \exists x\big(x \in b \wedge \forall y\,(yRx \to y \notin b)\big)\big) \wedge \forall x\big(x \in A \to \{y \,|\, yRx\} \in V\big)$.

Beweis. „(i)⇒(ii)". Dies ist klar.

„(ii)⇒(i)". Sei B ein Klassenterm und es sei $B \neq \emptyset$ und $B \subset A$. Fixiere $x \in B$. Da nach Voraussetzung

$$\{y \,|\, y \in A \,\wedge\, yRx\} = \{y \,|\, yRx\} \in V$$

ist, ist nach **(Aus)** durch den Klassenterm $\{y \,|\, y \in A \,\wedge\, yRx\} \cap B$ eine Menge $b \in V$ gegeben. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $b = \emptyset$. In diesem Fall ist x ein R-minimales Element von B. Aus yRx und $y \in B$ würde nämlich $y \in b$ folgen.
Fall 2. $b \neq \emptyset$. In diesem Fall existiert nach Voraussetzung ein R-minimales Element $x' \in b$. Dann ist $x' \in B$ und $\{y \,|\, y \in A \,\wedge\, yRx'\} \cap B$ ist eine Menge b', die die Voraussetzung von Fall 1 erfüllt. Nach Fall 1 ist dann x' R-minimales Element von B. QED

Wir kehren nun zu den Ordinalzahlen zurück und beweisen das folgende wichtige Resultat:

4.14 Satz On *wird durch* $<$ *stark wohlgeordnet.*

Beweis. Nach 4.6 gilt $\mathrm{SLO}(\mathrm{On},<)$. Da außerdem für $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt $\{\gamma \,|\, \gamma < \alpha\} = \alpha \in V$, bleibt nur noch die Existenz eines kleinsten Elementes in $B \subset \mathrm{On}$, $B \neq \emptyset$ zu verifizieren. Wende hierzu **(Fund)** an auf die Formel $\varphi :\equiv x \in B$. (Da $B \neq \emptyset$ ist, existiert ein Zeuge für φ.) Sei x ein $\in$-minimaler Zeuge für φ. Dann ist $x = \alpha \in B$. Ist $\beta \in B$ ein beliebiges Element, so kann wegen der $\in$-Minimalität von α nicht $\beta < \alpha$ sein, d.h., α ist $<$-minimales Element von B. QED

Der letzte Satz sichert uns für jede Teilklasse $A \subset \mathrm{On}$ die Existenz eines kleinsten Elementes dieser Klasse. Das nächste Resultat zeigt unter anderem, wie dieses kleinste Element „berechnet" werden kann.

4.15 Satz *Sei $A \subset \mathrm{On}$, $A \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) $\bigcap A \in A$ *und* $\bigcap A$ *ist das kleinste Element von A:* $\min(A) = \bigcap A$.

(b) *Ist $A \in V$, so ist* $\bigcup A \in \mathrm{On}$ *und* $\bigcup A$ *ist das Supremum von A:* $\sup(A) = \bigcup A$. *Insbesondere hat A genau dann ein gößtes Element, wenn $\bigcup A \in A$; in diesem Fall ist* $\max(A) = \bigcup A$.

(c) *Ist $A \notin V$, so ist* $\bigcup A = \mathrm{On}$.

Beweis. Die elementaren Beweise verbleiben dem Leser zur Übung. QED

4.3 Eigenschaften von Ordinalzahlen.

Wir definieren die Bildung des Nachfolgers einer Ordinalzahl, also die Operation, die wir bei den natürlichen Zahlen mit Hilfe der +1-Bildung erhalten. Ordinalzahlen, die keine Nachfolgerordinalzahlen und von $\emptyset$ verschieden sind, werden wir Limesordinalzahlen nennen. Es wird sich zeigen, daß es – anders als unter den natürlichen Zahlen – solche Limeszahlen in On gibt.

4.16 Definition $x + 1 :\equiv x \cup \{x\}$. Im Fall $x = \alpha \in \mathrm{On}$ heißt $\alpha + 1$ **direkter ordinaler Nachfolger** von α.

4.17 Bemerkung $x+1 = \bigcup\big\{x, \{x\}\big\} \in V$ wegen **(Paar)** und **($\bigcup$-Ax)**. Außerdem ist die +1-Operation injektiv: wäre nämlich $x + 1 = y + 1$ und $x \neq y$ so wäre $x \in y$ wegen $x \in y \cup \{y\}$ und $y \in x$ wegen $y \in x \cup \{x\}$ im Widerspruch dazu, daß $\in$ keine Zykel hat.

4.18 Satz *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$. *Dann gilt:*
(a) $\alpha + 1 \in \mathrm{On}$.
(b) $\alpha < \alpha + 1$.
(c) $\forall\beta(\beta > \alpha \to \beta \geq \alpha + 1)$.
Aus (a) bis (c) folgt, daß $\alpha + 1$ *die kleinste Ordinalzahl ist, die größer ist als* α. *Die Bezeichnung von* $\alpha + 1$ *als direkter ordinaler Nachfolger von* α *ist also gerechtfertigt.*

Beweis. zu (a). Da $\alpha + 1$ eine Teilmenge von On ist, genügt es, $\mathrm{Trans}(\alpha + 1)$ zu verifizieren, vgl. 4.9. Gelte also $x \in y \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Dann ist entweder $y \in \alpha$, und es gilt $x \in \alpha$ wegen der Transitivität von α; oder es ist $y = \alpha$, und wieder folgt $x \in \alpha$. Wegen $\alpha \subset \alpha + 1$ folgt in beiden Fällen $x \in \alpha + 1$. Dies war zu zeigen.
zu (b). Dies ist klar.
zu (c). Sei $\beta < \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Dann ist $\beta \in \alpha$ oder $\beta = \alpha$, also $\beta \leq \alpha$. QED

4.19 Bemerkung Auf den $\tilde{n}$ stimmt die oben definierte Nachfolgerbildung mit der üblichen Nachfolgerbildung überein. Genauer: für jede konkret gegebene natürliche Zahl n ist $\widetilde{n+1} = \tilde{n} + 1$.

4.20 Definition (a) $\mathrm{Succ}(x) :\equiv x \in \mathrm{On} \wedge \big(x = \emptyset \vee \exists y\,(x = y + 1)\big)$
(x ist eine **Nachfolgerordinalzahl** oder kurz: ein **Nachfolger**.)
(b) $\mathrm{Lim}(x) :\equiv x \in \mathrm{On} \wedge \neg\, \mathrm{Succ}(x)$
(x ist eine **Limesordinalzahl** oder kurz: ein **Limes**.)
(c) $\mathrm{Ind}(x) :\equiv \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y + 1 \in x)$
(x ist **induktiv**.)

4.21 Bemerkung (a) Einige eher technische Gründe veranlassen uns dazu, $\emptyset$ als Nachfolger aufzufassen. Manche Autoren ziehen es dagegen vor, $\emptyset$ als Limes anzusehen. Welche Auffassung man sich zu eigen macht ist im Prinzip Geschmackssache.
(b) Ist $\beta \neq \emptyset$ und ein Nachfolger, so gibt es genau ein x mit $\beta = x + 1$, und es ist $x \in \mathrm{On}$.
(c) Unter $\mathbf{ZF}^- - (\mathbf{Inf})$ ist **(Inf)** äquivalent zu der Aussage $\exists x\, \mathrm{Ind}(x)$, wie man leicht verifiziert.

Das nächste Kriterium für Limesordinalzahlen werden wir im folgenden ohne Erwähnung häufig benutzen.

4.22 Lemma $\mathrm{Lim}(x) \iff x \in \mathrm{On} \wedge \mathrm{Ind}(x)$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Gelte $\mathrm{Lim}(x)$. D.h., es ist $x \in \mathrm{On}$ und kein Nachfolger. Da x kein Nachfolger ist, ergibt sich zunächst $x \neq \emptyset$. Wegen der Konnexität von $<$ muß dann $\emptyset < x$ sein. Ist schließlich $y \in x$ beliebig vorgegeben, so gilt $y < x$ nach 4.5. Dann ist aber $y + 1 \leq x$, und da x kein Nachfolger ist, ergibt sich $y + 1 < x$. Damit ist $\mathrm{Ind}(x)$ gezeigt.

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in \mathrm{On}$ und es gelte $\mathrm{Ind}(x)$. Es ist zu verifizieren, daß x kein Nachfolger ist. Hierzu bemerke zunächst, daß $x \neq \emptyset$ gilt wegen $\emptyset \in x$. Gäbe es schließlich ein y mit $x = y+1$, so wäre $y \in x$, so daß wegen der Induktivität von x auch $y+1 \in x$ gelten müßte. Wir hätten damit $x \in x$ im Widerspruch dazu, daß $\in$ keine Zykel hat. x kann also kein Nachfolger sein. QED

4.4 Die Menge ω der natürlichen Zahlen.

(Inf) liefert uns die Existenz einer induktiven *Menge*. Bis jetzt ist es aber noch nicht klar, ob es eine Limesordinalzahl gibt, also eine induktive *Ordinalzahl*. Wir werden nun einen Klassenterm angeben, der eine solche Limeszahl darstellt. Dabei geben wir die präzise Definition der in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochenen Menge ω.

4.23 Definition $\omega :\equiv \bigcap\{x \mid \mathrm{Ind}(x)\}$.[32]

4.24 Satz *Es gilt* $\omega \in \mathrm{On}$ *und* $\mathrm{Ind}(\omega)$.

Beweis. Nach **(Inf)** existiert eine induktive Menge a. Nach Definition des Klassentermes ω ist $\omega \subset a$. **(Aus)** liefert deshalb

(1) $\omega \in V$.

$\mathrm{Ind}(\omega)$ folgt daraus, daß der Schnitt von induktiven Mengen wieder induktiv ist. Als nächstes zeigen wir:

(2) $\omega \subset \mathrm{On}$.

Beweis. Da ω eine induktive Menge ist, folgt mit **(Aus)**, daß $\omega \cap \mathrm{On}$ ebenfalls eine induktive Menge ist. Aus der Definition von ω ergibt sich dann $\omega \subset \omega \cap \mathrm{On}$, was (2) beweist. qed(2)

Um zu zeigen, daß $\omega \in \mathrm{On}$ gilt, setze $A :\equiv \mathrm{On} \setminus \omega$. Da ω eine Menge ist, muß $A \neq \emptyset$ gelten. Da $<$ eine Wohlordnung von On ist, existiert ein kleinstes Element α von A. Wir zeigen:

(3) $\omega = \alpha$.

Beweis. „$\subset$“ Wir verifizieren, daß α induktiv ist. Da $\emptyset$ Element einer jeden induktiven Menge ist, ergibt sich $\emptyset \in \omega$. Also ist $\emptyset \notin A$, was wegen der Minimalität von α auf $\emptyset < \alpha$ führt. Ist $\beta < \alpha$, dann gilt $\beta \notin A$ aufgrund der Minimalität von α. Also ist $\beta \in \omega$, was wegen der Induktivität von ω zu $\beta + 1 \in \omega$ führt. Aus $\beta + 1 \leq \alpha \in A = \mathrm{On} \setminus \omega$ folgt somit $\beta + 1 < \alpha$. Also ist α induktiv, und dies war zu zeigen.
„$\supset$“ Für $\beta < \alpha$ folgt aus der Minimalität von α sofort $\beta \notin A$, d.h., $\beta \in \omega$. qed(3)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

4.25 Corollar *ω ist eine Limesordinalzahl. Mehr noch: ω ist die kleinste Limesordinalzahl.*

Beweis. $\mathrm{Lim}(\omega)$ folgt aus dem Satz, die Minimalität aus $\omega = \bigcap\{x \mid \mathrm{Ind}(x)\} \subset \bigcap\{\alpha \mid \mathrm{Lim}(\alpha)\}$. QED

Wir verweisen noch auf eine andere Möglichkeit, ω zu charakterisieren, die mehr dem in der Einleitung zu diesem Kapitel eingeschlagenen Weg entspricht. Der Beweis des folgenden Lemmas verbleibt dem Leser zur Übung.

4.26 Lemma *Definiere* $\mathrm{Nat}(x) :\equiv \big(\mathrm{Succ}(x) \wedge \forall y\,(y \in x \to \mathrm{Succ}(y))\big)$ *(d.h., x ist eine natürliche Zahl). Dann gilt* $\omega = \{n \mid \mathrm{Nat}(n)\}$.

[32] Die Bezeichnung geht zurück auf Cantor, siehe [3], p.195

Aus der Darstellung im letzten Lemma folgt durch metasprachliche Induktion leicht, daß ω die $\tilde{n}$ enthält und sogar mit diesen „beginnt“:

4.27 Lemma *Für jede konkret gegebene natürliche Zahl n ist $\tilde{n} \in \omega$. Ferner ist $\tilde{0} = \min(\omega)$ und $\tilde{n} = \min\left(\omega \setminus \left\{\tilde{0}, \ldots, \widetilde{n-1}\right\}\right)$ im Fall $n > 0$.*

In Hinblick auf obiges Lemma identifizieren wir von nun an n mit $\tilde{n}$. Insbesondere identifizieren wir dann 0 mit $\emptyset$. Dieses Vorgehen ist auch in soweit gerechtfertigt, als wir nun zeigen, daß ω die Formalisierung der Menge der natürlichen Zahlen in V ist. Dies folgt aus:

4.28 Satz *Sei $S\colon \omega \to \omega$ die* **Nachfolgerfunktion**, *d.h, $S(n) = n+1$ für alle $n \in \omega$. Dann gelten die* Peano-*Axiome:*

(P1) $S\colon \omega \xrightarrow{inj.} \omega$.

(P2) $0 \notin \mathrm{ran}(S)$.

(P3) $\forall a\big((a \subset \omega \wedge 0 \in a \wedge \forall x\,(x \in a \to S(x) \in a)) \longrightarrow a = \omega\big)$.

Beweis. Die Gültigkeit von (P1) folgt aus der Injektivität der $+1$-Operation auf V, (P2) ist evident. Zu (P3) bemerke, daß ein a mit $0 \in a$ und $x \in a \to x+1 \in a$ induktiv ist, so daß nach Definition von ω gilt $\omega \subset a$. QED

4.29 Bemerkung Wir werden später sehen, daß ω durch die o.a. Peano-Axiome „eindeutig“ festgelegt ist. Was genau hierunter zu verstehen ist, wird ebenfalls später präzisiert, siehe 7.1.

4.30 Definition Wir nennen ω die **Menge der natürlichen Zahlen**. Die Elemente von ω heißen **natürliche Zahlen**.

4.31 Bemerkung Wir haben gesehen, daß ω für jede *konkret* gegebene natürliche Zahl n ein Element enthält, das diese Zahl in V formalisiert. Dieses Element hatten wir mit $\tilde{n}$ bezeichnet. Wir haben auch gesehen, daß ω mit diesen Elementen „beginnt“. Gleichwohl kann ω auch Elemente enthalten, die *nicht* von der Form $\tilde{n}$ sind. Wenn wir *von außerhalb* V auf $\omega \in V$ blicken, so könnte sich für uns ω in folgender Form darstellen:

$$\underbrace{\tilde{0} \in \tilde{1} \in \tilde{2} \in \cdots \in \tilde{n} \in \cdots}_{\substack{\text{unendlich viele aufsteigende}\\ \text{Elemente, eines für jede kon-}\\ \text{kret gegebene natürliche Zahl}}} \quad \underbrace{\cdots \in x_{-n} \in \cdots \in x_{-2} \in x_{-1} \in x_0}_{\substack{\text{unendlich viele absteigende}\\ \text{Elemente, eines für jede kon-}\\ \text{kret gegebene natürliche Zahl}}} \quad \underbrace{\in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in \cdots}_{\substack{\text{unendlich viele aufsteigende}\\ \text{Elemente, eines für jede kon-}\\ \text{kret gegebene natürliche Zahl}}},$$

wobei die x_i *Bezeichnungen* für gewisse Elemente von V sind. Aber Widerspricht dies nicht der Tatsache, daß ω durch $\in$ wohlgeordnet wird: die x_i haben doch offenbar kein kleinstes Element? Die Antwort auf diese Frage ist: die Wohlordnungseigenschaft sagt, daß jede Teil*klasse* von ω ein kleinstes Element hat; es gibt aber keine Möglichkeit, die x_i zu einer Klasse zusammenzufassen, da die Indizierung der x_i nicht über ein Element von V sondern über unsere konkret gegebenen, metasprachlichen, sich *außerhalb* von V befindlichen natürlichen Zahlen läuft.
Die Tatsache, daß ω mehr enthalten kann als die Elemente der Form $\tilde{n}$ darf uns auch nicht verwirren: in dem Universum, in dem *wir* leben, haben wir gewisse natürliche Zahlen, die wir in diesem Text als *konkret gegebene* natürliche Zahlen bezeichnet haben; in dem von uns durch die $\mathbf{ZF}^-$-Axiome geschaffenen Mengenuniversum V finden wir ebenfalls gewisse natürliche Zahlen vor, nämlich die Elemente von ω. Es besteht kein Anlaß anzunehmen, daß beide in irgendeiner Form „deckungsgleich“ sind, denn beide sind an *verschiedene* Welten angepaßt. Für einen hypothetischen Menschen, der in dem von uns geschaffenen Mengenuniversum V lebt, sind die Elemente von ω *seine* konkret gegebenen natürlichen Zahlen; auf *unsere* konkret gegebenen natürlichen Zahlen kann er nicht zurückgreifen, da sie nicht zu *seiner* Welt gehören. Wir als außerhalb von V stehende haben immerhin die Möglichkeit, *unsere* natürlichen Zahlen

in V wiederzufinden. (Andererseits mag es außerhalb *unseres* Universums ein Wesen geben, daß mit *unseren* natürlichen Zahlen nicht zufrieden ist, und uns zurufen möchte: „Das sind doch viel zu wenige!" Vielleicht sollte man den Papst zu diesem Thema einmal befragen.)

Wir wenden uns nun einem Beweis- und einem Konstruktionsprinzip zu, die beide eng mit natürlichen Zahlen bzw. Ordinalzahlen verbunden sind.

5 Induktion und Rekursion.

In diesem Kapitel setzen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – das System ZF$^-$ voraus.

Induktion ist (in seiner einfachsten Form) ein Beweisprinzip für Aussagen über Ordinalzahlen. Es besagt, daß eine mathematische Eigenschaft φ für jede Ordinalzahl gilt, wenn man für jede Ordinalzahl α aus der Gültigkeit von φ für alle Vorgänger von α auf die Gültigkeit von φ für α selbst schließen kann.

Rekursion ist (in seiner einfachsten Form) ein Konstruktionsprinzip für funktionale Klassen $F\colon \mathrm{On} \to V$. Es besagt, daß F dann wohl- und eindeutig definiert ist, wenn es eine funktionale Klasse G gibt, die für jedes α aus den bereits berechneten Werten $(F(\beta)|\beta < \alpha)$ und der aktuellen Stelle α den Wert $F(\alpha)$ berechnet.

5.1 Ordinalzahlinduktion.

5.1 Satz *Sei C ein Klassenterm.*

(a) Gilt $C \subset \mathrm{On}$ und $\forall\alpha(\alpha \subset C \to \alpha \in C)$, so ist $C = \mathrm{On}$.

(b) Gelten $C \subset \mathrm{On}$ sowie $0 \in C$, $\forall\alpha(\alpha \in C \to \alpha+1 \in C)$ und $\forall\alpha\big((\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge \alpha \subset C) \longrightarrow \alpha \in C\big)$, so ist $C = \mathrm{On}$.

Beweis. zu (a). Wäre $C \neq \mathrm{On}$, so gäbe es, da On wohlgeordnet ist, in $A :\equiv \mathrm{On} \setminus C$ ein kleinstes Element α. Aus der Minimalität von α folgt $\alpha \subset C$, so daß nach Voraussetzung $\alpha \in C$ gilt. Dies widerspricht $\alpha \in A = \mathrm{On} \setminus C$. Also ist $C = \mathrm{On}$.

zu (b). Wir zeigen, daß die Voraussetzungen aus (a) erfüllt sind, so daß (b) aus (a) folgt. Sei also $\alpha \subset C$. Ist $\alpha = 0$, so ist nach Annahme in (b) $\alpha \in C$. Ist $\alpha \neq 0$ ein Nachfolger, so ist $\alpha = \beta + 1$ wobei $\beta \in C$ gilt wegen $\alpha \subset C$; nach Annahme in (b) ist dann $\beta + 1 \in C$, also $\alpha \in C$. Gilt $\mathrm{Lim}(\alpha)$, so liefert die Annahme in (b) unmittelbar $\alpha \in C$. QED

Da jeder Klassenterm $C \subset \mathrm{On}$ von der Form $C = \big\{\alpha \bigm| \varphi(\alpha, \vec{w})\big\}$ ist, liefert dieser Satz sofort die Richtigkeit des oben formulierten Induktionsschemas. Genauer haben wir:

5.2 Satz (Induktionsschema für On) *Sei $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Dann gilt:*

(a) $\forall\alpha \in \mathrm{On}\ \big(\forall\beta < \alpha\ \varphi(\beta, \vec{w}) \to \varphi(\alpha, \vec{w})\big) \longrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \varphi(\alpha, \vec{w})$

(b) $\Big(\varphi(0, \vec{w}) \wedge \forall\alpha\big(\varphi(\alpha, \vec{w}) \to \varphi(\alpha+1, \vec{w})\big) \wedge \forall\alpha\big(\mathrm{Lim}(\alpha) \to (\forall\beta < \alpha\ \varphi(\beta, \vec{w}) \to \varphi(\alpha, \vec{w}))\big)\Big)$
$\longrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \varphi(\alpha, \vec{w})$

Wir formulieren die Aussage des letzten Satzes weniger formal. Es sei eine mathematische Eigenschaft φ vorgelegt. Es soll gezeigt werden, daß φ auf alle Ordinalzahlen zutrifft. Um dies durchzuführen, stehen zwei Strategien zur Verfügung:

Strategie 1. Betrachte eine beliebige Ordinalzahl α und nimm an, daß φ auf alle Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ zutrifft; zeige, daß dann φ auf α zutrifft.

Strategie 2. Zeige zunächst, daß φ auf 0 zutrifft. Betrachte dann eine beliebige Ordinalzahl $\alpha > 0$ und unterscheide die Fälle $\alpha = \beta + 1$ und $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Im Fall $\alpha = \beta + 1$ nimm an, daß φ auf β zutrifft und zeige, daß φ auf α zutrifft; im Fall $\mathrm{Lim}(\alpha)$ nimm an, daß φ auf alle $\beta < \alpha$ zutrifft und zeige, daß φ auf α zutrifft.

Wir können Induktion auch benutzen, um Aussagen über Anfangsstücke von On zu beweisen: es seien eine mathematische Eigenschaft φ und eine Ordinalzahl γ vorgelegt; es soll gezeigt werden, daß φ auf alle $\alpha < \gamma$ zutrifft. Den Beweis kann man führen, indem man eine der oben angegebenen Strategien verfolgt, wobei man jeweils die Zusatzannahme $\alpha < \gamma$ hinzufügt. Diese Vorgehensweise ist korrekt: es wird hierdurch nämlich bewiesen, daß die mathematische Eigenschaft

$$\psi(x, \vec{w}) :\equiv (x < \gamma \to \varphi(x, \vec{w}))$$

auf alle $\alpha \in \mathrm{On}$ zutrifft, was sofort die Gültigkeit von φ für jedes $\alpha < \gamma$ impliziert. Unter diese „Anfangsstück-Induktionen" fallen z.B. die bekannten Induktionen über natürliche Zahlen ($\gamma = \omega$).

5.2 Ordinalzahlrekursion.

Wir wenden uns dem eingangs skizzierten Konstruktionsprinzip zu.

5.3 Satz (Rekursionsschema für On) *Sei G ein Klassenterm. Dann gibt es einen effektiv angebbaren Klassenterm F, so daß unter* $\mathbf{ZF}^-$ *folgendes gilt:*

(a) $G\colon V \to V \longrightarrow \big(F\colon \mathrm{On} \to V \wedge \forall\alpha\, F(\alpha) = G\,(F \restriction \alpha)\big)$

(b) Ist F' ein weiterer Klassenterm, dann gilt:
$\big(G\colon V \to V \wedge F'\colon \mathrm{On} \to V \wedge \forall\alpha\, F'(\alpha) = G\,(F' \restriction \alpha)\big) \longrightarrow F = F'$

F heißt **der durch $<$-Rekursion auf** On **und die Rekursionsvorschrift G bestimmte kanonische Term**. *Falls $G\colon V \to V$ gilt, bezeichnen wir F auch als* **die durch $<$-Rekursion auf** On **und die Rekursionsvorschrift G bestimmte Funktion**.

Beweis. Die Idee des Beweises ist es, F durch Funktionen f zu approximieren, deren Definitionsbereich Ordinalzahlen sind, und die sich auf ihrem Definitionsbereich gemäß der Rekursionsvorschrift G verhalten. Wir verifizieren, daß je zwei solcher Approximationen *kompatibel* sind, d.h., auf dem gemeinsamen Teil ihres Definitionsbereiches übereinstimmen. Dann zeigen wir, daß jede Ordinalzahl als Definitionsbereich einer Approximation in Frage kommt. F erhalten wir durch Vereinigung all dieser Approximationen.

Definiere also

$$\mathrm{App}(f, G) :\equiv f\colon \mathrm{dom}(f) \to V \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On} \wedge \forall\alpha \in \mathrm{dom}(f)\ f(\alpha) = G\,(f \restriction \alpha)$$

und setze $F :\equiv \bigcup\{f \mid \mathrm{App}(f, G)\}$. Hiermit haben wir F effektiv angegeben. Es gelte nun $\mathbf{ZF}^-$.

zu (a). Sei $G\colon V \to V$

(1) Je zwei Approximationen sind kompatibel:
$\mathrm{App}(f, G) \wedge \mathrm{App}(g, G) \wedge \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g) \longrightarrow g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$.

Beweis. Wäre $g \restriction \mathrm{dom}(f) \neq f$, so gäbe es ein kleinstes $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ mit $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Wegen der Minimalität von α ist $f \restriction \alpha = g \restriction \alpha$ und damit, weil G funktional ist, auch $G(f \restriction \alpha) = G(g \restriction \alpha)$. Wegen $\mathrm{App}(f, G)$ und $\mathrm{App}(g, G)$ haben wir aber andererseits $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$ und $g(\alpha) = G(g \restriction \alpha)$, so daß doch $f(\alpha) = g(\alpha)$ sein muß. Dies widerspricht der Wahl von α. qed(1)

(2) $\forall\alpha \in \mathrm{On}\ \exists f\ (\mathrm{App}(f, G) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha)$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis durch.

$\alpha = 0$. Für $f :\equiv \emptyset$ gilt $f\colon 0 \to V$ und $\mathrm{App}(f, G)$.

$\alpha = \beta + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $g\colon \beta \to V$ mit $\mathrm{App}(g, G)$. Setze $f :\equiv g \cup \big\{(\beta, G(g))\big\}$. Dann gilt $f\colon \alpha \to V$, und man verifiziert leicht $\mathrm{App}(f, G)$. Beachte hierbei, daß für $\gamma \leq \beta$ gilt $f \restriction \gamma = g \restriction \gamma$.

$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für jedes $\beta < \alpha$ ein $f_\beta\colon \beta \to V$ mit $\mathrm{App}\,(f_\beta, G)$. Da Approximationen paarweise kompatibel sind, ist durch $f :\equiv \bigcup\big\{f_\beta \mid \beta < \alpha\big\}$ eine Funktion $f\colon \alpha \to V$ gegeben (beachte, daß $\big\{f_\beta \mid \beta < \alpha\big\}$ nach **(Ers)** eine Menge ist, also wegen **($\bigcup$-Ax)** $f \in V$ gilt). Für

$\beta < \alpha$ hat man außerdem $f \restriction \beta = f_{\beta+1} \restriction \beta$. Wegen $\mathrm{App}(f_{\beta+1}, G)$ folgt hieraus $f(\beta) = f_{\beta+1}(\beta) = G(f_{\beta+1} \restriction \beta) = G(f \restriction \beta)$. Somit gilt $\mathrm{App}(f, G)$. qed(2)

Aus (1), (2) und der Definition von F ergibt sich sofort $F\colon \mathrm{On} \to V$. Analog zu der parallelen Stelle im Induktionsbeweis von (2) für den Limesfall sieht man, daß F die Rekursionsgleichung $\forall\beta\, F(\beta) = G(F \restriction \beta)$ erfüllt. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Der Beweis verläuft genau so wie der Beweis der Kompatibilität zweier Approximationen, siehe (1). QED

5.4 Bemerkung Der kanonische Term F im Rekursionsschema ist G eindeutig zugeordnet; seine Definition ist dem obigen Beweis zu entnehmen. Der Term F ist auch dann definiert, wenn G nicht funktional ist. In diesem Fall macht das Rekursionsschema jedoch keine Aussage über die Eigenschaften von F.

Das Rekursionsschema wird oft in der folgenden Form angewendet: für die zu definierende Funktion $F\colon \mathrm{On} \to V$ wird folgendes vorgegeben:

(i) der Funktionswert an der Stelle 0,

(ii) eine m.H. eines Klassentermes formulierbare „Vorschrift“, wie aus dem Funktionswert an einer Stelle α der Funktionswert an der Stelle $\alpha + 1$ ausgerechnet werden kann,

(iii) eine ebensolche „Vorschrift“, wie an Limesstellen α aus den Funktionswerten an den kleineren Stellen der Funktionswert an der Stelle α bestimmt werden kann.

Formal bedeutet dies, daß ein $x_0 \in V$ sowie Klassenterme G_{succ} und G_{lim} mit $G_{succ}, G_{lim}\colon V \to V$ vorgegeben sind, und daß gelten soll:

(i) $F(0) = x_0$,

(ii) $F(\alpha + 1) = G_{succ}(F(\alpha))$,

(iii) $F(\alpha) = G_{lim}(F \restriction \alpha)$, falls $\mathrm{Lim}(\alpha)$.

Das Rekursionsschema liefert uns die Existenz der gewünschten Funktion F, wenn wir die Fallunterscheidungen auflösen, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} G :\equiv\ & \big\{ (f, x_0) \,\big|\, f\colon 0 \to V \big\} \cup \\ & \big\{ (f, y) \big| \exists\alpha\, f\colon \alpha + 1 \to V \ \wedge\ y = G_{succ}\big(f(\alpha)\big) \big\} \cup \\ & \big\{ (f, G_{lim}(f)) \,\big|\, \exists\alpha\ \mathrm{Lim}(\alpha) \ \wedge\ f\colon \alpha \to V \big\} \cup \\ & \big\{ (f, 0) \big| \neg(\exists\alpha\, f\colon \alpha \to V) \big\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $G\colon V \to V$ und die obigen Aussagen (i)–(iii) sind gleichwertig mit $\forall\alpha\, F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$, wie für das Rekursionsschema benötigt. (Beachten Sie, daß die als letztes zu G hinzugenommene Klasse keine für die Konstruktion von F benötigte Information enthält; sie mußte nur hinzu genommen werden, um G zu einer auf ganz V definierten Funktion zu machen.)

Wir stellen nun einige Beispiele vor, in denen wir mathematische Objekte mit Hilfe von Rekursion konstruieren.

5.3 Ordinalzahlarithmetik.

Wir übertragen die intuitiv für die natürlichen Zahlen gegebenen Operationen Addition, Multiplikation und Exponentiation auf die gesamten Ordinalzahlen.

5.5 Definition Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\alpha+ : \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\alpha + 0 :\equiv \alpha$,

(ii) $\alpha + (\beta + 1) :\equiv (\alpha + \beta) + 1$,

(iii) $\alpha + \delta :\equiv \bigcup\{\alpha + \beta \mid \beta < \delta\} \big(= \sup_{\beta<\delta} \alpha + \beta\big)$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

$+$ heißt **Ordinalzahladdition**.

Der nächste Satz zeigt, daß die Ordinalzahladdition nicht aus On herausführt (es ist nicht a priori klar, daß für Ordinalzahlen α, β ihre ordinale Summe $\alpha + \beta$ erneut eine Ordinalzahl ist!) und stellt einige Regeln für die Ordinalzahladdition zusammen.

5.6 Satz *(a)* $\forall \alpha, \beta\ \alpha + \beta \in \mathrm{On}$.
(b) $\beta < \gamma$ *impliziert* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$
(c) Die Ordinalzahladdition ist assoziativ: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
(d) Die Ordinalzahladdition ist i.a. ***nicht*** *kommutativ.*

Beweis. (a)–(c) beweist man leicht durch $<$-Induktion. Zum Beispiel zeigt man (a) durch Induktion über β bei fixiertem α. Für (d) geben wir ein Gegenbeispiel an: Fixiere n mit $0 < n < \omega$. Dann gilt $n + \omega = \sup_{m<\omega} n + m = \omega < \omega + n$. QED

5.7 Satz *Jede Ordinalzahl* α *ist eindeutig darstellbar in der Form* $\alpha = \delta + n$*, wobei* $n < \omega$ *und* $\delta = 0$ *oder* $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen, es wäre $\alpha = \delta_1 + n_1 = \delta_2 + n_2$. Dann gilt

(1) $\delta_1 = \delta_2\ (\equiv: \delta)$.

Beweis. Angenommen $\delta_1 < \delta_2$. Durch Induktion nach n zeigen wir $\delta_1 + n < \delta_2$ für alle $n < \omega$:

$n = 0$. klar wegen $\delta_1 + 0 = \delta_1$.
$n = m + 1$. Es gelte $\delta_1 + m < \delta_2$. Dann ist zunächst $\delta_1 + n = (\delta_1 + m) + 1 \leq \delta_2$, und da δ_2 ein Limes ist, muß sogar $\delta_1 + n < \delta_2$ sein.

Speziell ergibt sich nun $\delta_1 + n_1 < \delta_2 \leq \delta_2 + n_2$, im Widerspruch dazu, daß die außenstehenden Terme der Ungleichungskette mit α übereinstimmen. qed(1)

Wäre schließlich etwa $n_1 < n_2$, so hätten wir $\delta + n_1 < \delta + n_2$ im Widerspruch dazu, daß beide Werte mit α übereinstimmen. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung nachgewiesen.

Die Existenz der gewünschten Darstellung zeigen wir durch Induktion nach α:

$\alpha = 0$. Es ist $\alpha = 0 + 0$.
$\alpha = \beta + 1$. β habe die Darstellung $\beta = \delta + n$. Dann hat α die Darstellung $\alpha = (\delta + n) + 1 = \delta + (n + 1)$.
$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Es ist $\alpha = \alpha + 0$.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

5.8 Definition Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\alpha\cdot : \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\alpha \cdot 0 :\equiv 0$,
(ii) $\alpha \cdot (\beta + 1) :\equiv (\alpha \cdot \beta) + \alpha$,
(iii) $\alpha \cdot \delta :\equiv \bigcup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \delta\} \big(= \sup_{\beta<\delta} \alpha \cdot \beta\big)$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

$\cdot$ heißt **Ordinalzahlmultiplikation**.

5.9 Satz *(a)* $\forall \alpha, \beta\ \alpha \cdot \beta \in \mathrm{On}$.
(b) $\beta < \gamma$ *und* $\alpha \neq 0$ *impliziert* $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.
(c) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
(d) Es gilt das folgende Distributivgesetz: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
(e) Die Ordinalzahlmultiplikation ist assoziativ: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
(f) Die Ordinalzahlmultiplikation ist i.a. ***nicht*** *kommutativ.*

Beweis. Wir geben hier nur ein Gegenbeispiel für (f) an: Fixiere n mit $1 < n < \omega$. Dann gilt $n \cdot \omega = \sup_{m<\omega} n \cdot m = \omega < \omega \cdot n$. QED

Wir beschließen unseren kurzen Ausflug in die Ordinalzahlarithmetik mit der Definition der ordinalen Exponentiation.

5.10 Definition Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\exp(\alpha, \cdot) \colon \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\exp(\alpha, 0) :\equiv 1$,

(ii) $\exp(\alpha, \beta + 1) :\equiv \exp(\alpha, \beta) \cdot \alpha$,

(iii) $\exp(\alpha, \delta) :\equiv \bigcup\{\exp(\alpha, \beta) \mid \beta < \delta\} \big(= \sup_{\beta<\delta} \exp(\alpha, \beta)\big)$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

exp heißt **Ordinalzahlexponentiation**. Wir schreiben meist α^β statt $\exp(\alpha, \beta)$.

5.4 Die von Neumann – Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$.

Mit Hilfe des Rekursionsschemas definieren wir die von Neumann-Hierarchie, eine – wie wir sehen werden – echt aufsteigende Folge von Mengen, die das gesamte Mengenuniversum „ausschöpft“. **Hierzu setzen wir von nun an ZF voraus.**

5.11 Definition Definiere die **von Neumann-Hierarchie** $(V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On})$ durch $<$-Rekursion auf On wie folgt:

(i) $V_0 :\equiv \emptyset$.

(ii) $V_{\alpha+1} :\equiv \mathrm{Pot}(V_\alpha)$.

(iii) $V_\delta :\equiv \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$ für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Der folgende Satz enthält erste, sehr wichtige Eigenschaften der von Neumann-Hierarchie.

5.12 Satz *(a)* V_α *ist transitiv.*

(b) $\beta < \alpha \longrightarrow V_\beta \in V_\alpha$.

(c) $\beta \leq \alpha \longrightarrow V_\beta \subset V_\alpha$.

(d) $V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$. *Speziell* $\alpha \in V_{\alpha+1}$.

Beweis. zu (a). Wir führen eine Induktion über α durch:
$\alpha = 0$. $V_0 = \emptyset$ ist transitiv.
$\alpha = \beta + 1$. Sei $x \in y \in V_\alpha$. Nach Definition von V_α im Nachfolgerfall ist $V_\alpha = \mathrm{Pot}(V_\beta)$. $y \in V_\alpha$ impliziert also $y \subset V_\beta$, und somit ist $x \in V_\beta$. Da V_β nach Induktionsvoraussetzung transitiv ist, ergibt sich $x \subset V_\beta$, also $x \in V_{\beta+1}$.
$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Als Vereinigung transitiver Mengen ist V_α transitiv.

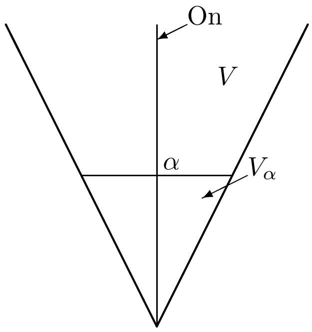
zu (b). Durch Induktion nach α verifiziert man leicht $\forall \beta < \alpha\ V_\beta \in V_\alpha$.

zu (c). Dies folgt unmittelbar aus (a) und (b).

zu (d). Wir führen eine Induktion nach α durch.
$\alpha = 0$. $V_0 \cap \mathrm{On} = \emptyset$ ist klar wegen $V_0 = \emptyset$.
$\alpha = \beta + 1$. Es gelte $V_\beta \cap \mathrm{On} = \beta$. Es ist $V_{\beta+1} \cap \mathrm{On} = \beta + 1$ zu zeigen.
zu „$\subset$“. Ist $\gamma \in V_{\beta+1}$, so gilt $\gamma \subset V_\beta$ nach Definition von $V_{\beta+1}$. Indem man die Induktionsvoraussetzung anwendet, folgt dann $\gamma \subset \beta$, d.h., $\gamma \in \beta + 1$.
zu „$\supset$“. Sei $\gamma < \beta + 1$. Ist $\gamma < \beta$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\gamma \in V_\beta$, also $\gamma \in V_{\beta+1}$. Da schließlich die Induktionsvoraussetzung und die Definition von $V_{\beta+1}$ implizieren, daß $\beta \in V_{\beta+1}$ gilt, folgt $\gamma \in V_{\beta+1}$ auch im Fall $\gamma = \beta$.
Damit ist der Nachfolgerfall abgehandelt.

$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Ist $\gamma \in V_\alpha$, so ist nach Definition von V_α schon $\gamma \in V_\beta$ für ein $\beta < \alpha$; nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\gamma < \beta$, also $\gamma < \alpha$. Ist andererseits $\gamma < \alpha$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\gamma \in V_{\gamma+1}$, wegen $V_{\gamma+1} \subset V_\alpha$ also $\gamma \in V_\alpha$. Damit ist auch der Limesfall abgehandelt, und (d) ist bewiesen. QED

Im letzten Satz wurde gezeigt, daß die Mengen $V_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{On})$ eine im Sinne der Inklusion von Mengen aufsteigende Folge bilden, und daß V_α in der Klasse On gerade bis zur Zahl α reicht (man sagt, V_α hat *ordinale Höhe* α). Der nächste Satz zeigt, daß jede Menge aus V „schließlich", d.h., für hinreichend großes α in V_α liegt. Die VON NEUMANN-Hierarchie gliedert also unser Mengenuniversum in sich erweiternde Stufen, wobei die „obere Grenze" der α-ten Stufe V_α gerade „in Höhe" der Ordinalzahl α liegt:



Die V_α können somit in gewisser Weise als „Anfangsstücke" des Mengenuniversums aufgefaßt werden.

5.13 Satz $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$.

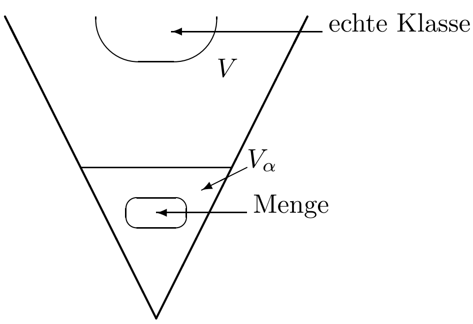
BEWEIS. Angenommen $V \neq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Dann existiert $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Nach **(Fund)** gibt es ein $\in$-minimales x mit dieser Eigenschaft. Wegen der Minimalität von x ist $x \subset \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$; also ist durch

$$y \mapsto f(y) \;:\equiv\; \min\{\alpha \mid y \in V_\alpha\}$$

eine Funktion $f\colon x \to \mathrm{On}$ definiert. Nach **(Ers)** gilt $f[x] \in V$; also ist $\alpha :\equiv \bigcup f[x] \in \mathrm{On}$. Aus der Definition von f folgt $x \subset V_\alpha$. Dann gilt aber $x \in V_{\alpha+1}$, und dies widerspricht der Wahl von x. QED

Mit Hilfe der V_α können wir anschaulich charakterisieren, wann ein Klassenterm A eine echte Klasse definiert:

5.14 Satz *Sei A ein Klassenterm. Dann gilt:*
(a) $A \notin V \longleftrightarrow \forall\alpha\exists\beta\big(\beta > \alpha \wedge A \cap (V_\beta \setminus V_\alpha) \neq \emptyset\big)$.
(b) $A \in V \longleftrightarrow \exists\alpha\, A \subset V_\alpha$.
M.a.W.: echte Klassen reichen „bis an den oberen Rand" des Mengenuniversums V heran, ihre ordinale Höhe ist nicht beschränkt, wohingegen jede Menge schon Teil eines Anfangsstücks von V ist:



Beweis. Da V von den V_α aufsteigend ausgeschöpft wird, folgt (a) leicht aus (b). Ist nun $A \in V$, so ist $A \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in$ On. Wegen der Transitivität von V_α folgt $A \subset V_\alpha$. Ist umgekehrt $A \subset V_\alpha$, so ist $A \in V$ wegen **(Aus)**. QED

Wir schließen hiermit unsere Untersuchungen der $<$-Induktion und $<$-Rekursion ab.

5.5 Stark fundierte Relationen.

Wir streben nun eine Verallgemeinerung von Induktion und Rekursion auf „geeignete" Relationen R auf einem Klassenterm A an. Wir werden sehen, daß eine Relation $R \subset A \times A$ „geeignet" ist, wenn sie *stark fundiert* ist. **Von nun an setzen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – ZF$^-$ voraus.**

5.15 Definition Seien R und A Klassenterme. R heißt **stark fundiert auf** A, falls folgende drei Aussagen gelten:

(SF1) $R \subset A \times A$.

(SF2) $\forall u\big(u \neq \emptyset \longrightarrow \exists x\,\big(x \in u \wedge \forall y(y \in u \to \neg\, yRx)\big)\big)$.
D.h., jede nicht-leere Menge hat ein R-minimales Element.

(SF3) $\forall x \exists y\big(x \in y \wedge \forall z_0, z_1\big((z_0 R z_1 \wedge z_1 \in y) \to z_0 \in y\big)\big)$.
D.h., jede Menge x ist Element einer Menge, die alle R-Vorgänger ihrer Elemente enthält.

Mit SF(A, R) bezeichnen wir die Konjunktion der Aussagen (SF1) bis (SF3).

Wir wollen zunächst die obige Definition genauer analysieren, indem wir für (SF3) und (SF2) unter **ZF$^-$** bzw. **ZFC** $-$ (**Pot**) äquivalente Formulierungen angeben. Unter Anwendung von $<$-Rekursion können wir für (SF3) eine anschaulichere Charakterisierung beweisen:

5.16 Lemma *Auf der Basis von* **ZF$^-$** *ist (SF3) gleichwertig mit*
(SF3') $\forall x \{z \mid zRx\} \in V$.

Beweis. zu „$\Rightarrow$". Zu x wähle y mit $x \in y$, das unter den R-Vorgängern seiner Elemente abgeschlossen ist. Dann ist $\{z \mid zRx\} \subset y$, also $\{z \mid zRx\} \in V$ nach **(Aus)**.

zu „$\Leftarrow$". Definiere durch $<$-Rekursion auf ω eine Abbildung $f\colon \omega \to V$ mit

$$f(0) = \{z \mid zRx\} \cup \{x\} \text{ und } f(n+1) = f(n) \cup \bigcup \big\{\{z_0 \mid z_0 R z_1\} \big| z_1 \in f(n)\big\}.$$

Beachte, daß die jeweils rechts stehenden Klassenterme aufgrund der Voraussetzung sowie **(Ers)** und **($\bigcup$-Ax)** Mengen definieren. Nach **(Ers)** ist nun $f[\omega] \in V$, also auch $y :\equiv \bigcup f[\omega] \in V$ nach **($\bigcup$-Ax)**. y leistet das in (SF3) verlangte: wegen $x \in f(0)$ ist $x \in y$; ist $z_1 \in y$, $z_0 R z_1$, so ist $z_1 \in f(n)$ für ein $n < \omega$ und somit $z_0 \in f(n+1)$, also $z_0 \in y$. QED

Wenn wir zusätzlich **(AC)** voraussetzen, können wir zeigen, daß (SF2) äquvalent ist zu der Aussage, daß es keine unendlich lange, absteigende R-Kette gibt. Formal:

5.17 Lemma *Auf der Basis von* **ZFC** $-$ (**Pot**) *ist (SF2) äquivalent zu*
(SF2') $\neg \exists f(f\colon \omega \to V \wedge \forall n < \omega\; f(n+1) R f(n))$.

Beweis. zu „$\Rightarrow$". Angenommen es existiert ein $f\colon \omega \to V$ mit $f(n+1)Rf(n)$ für alle $n < \omega$. $u :\equiv f[\omega]$ ist dann nach **(Ers)** eine Menge und $u \neq \emptyset$. Nach (SF2) hat u ein R-minimales Element x. Wähle $n < \omega$ mit $x = f(n)$. Dann gilt $f(n+1)Rx$ im Widerspruch zur Minimalität von x. Es kann also keine derartige Funktion f geben.

zu „$\Leftarrow$". Angenommen es gäbe ein $u \neq \emptyset$, das kein R-minimales Element enthält, d.h.,

(1) $\forall x \in u \exists y \in u\; yRx$.

Es ist eine Funktion $f{:}\,\omega \to V$ anzugeben mit $f(0) \in u$ beliebig und $f(n+1) \in \{y \mid y \in u \wedge yRf(n)\}$. Hierzu setze $z :\equiv \{f \mid \exists n < \omega\ f{:}\,n \to u\}$ und definiere $H{:}\,z \to V$ durch $H(\emptyset) :\equiv u$ und $H(f) :\equiv \{y \in u \mid yRf(n)\}$, falls $\mathrm{dom}(f) = n+1$. Wegen (1) ist $H(f) \neq \emptyset$ für alle $f \in z$. Nach **(AC)** existiert $G \in \times_{x \in z} H(x)$. Sei F die durch $<$-Rekursion und Rekursionsvorschrift G bestimmte Funktion $F{:}\,\omega \to V$. Nach 3.16 gilt $F \in V$; ferner ist $F(0) = G(F \restriction 0) \in H(\emptyset) = u$ und

$$F(n+1) = G(F \restriction n+1) \in H(F \restriction n+1) = \{y \in u \mid yRF(n)\}.$$

$f :\equiv F$ leistet also das Verlangte. QED

Welche stark fundierten Relationen kennen wir bereits? Ein Blick auf die Definition und die äquivalente Formulierung (SF3') von (SF3) zeigt, daß $\in$ – d.h., die durch $R_\in :\equiv \{(x,y) \mid x \in y\}$ definierte Relation – stark fundiert auf V und $<$ – d.h., die durch $R_< :\equiv \{(x,y) \mid x \in \mathrm{On} \wedge y \in \mathrm{On} \wedge x \in y\}$ definierte Relation – stark fundiert auf On ist. Wir wollen im folgenden diese Tatsachen elementar beweisen, d.h., ohne Rückgriff auf das Rekursionsschema für On, das in den Beweis von 5.16 und 5.17 involviert ist. Wir werden dabei sehen, daß für $\in$ ebenfalls ein Induktionsschema bewiesen werden kann. Der Beweis kann überdies nahezu wortwörtlich für den Beweis eines Induktionsschemas für beliebige stark fundierte Relationen übernommen werden. Die Vermeidung des Rekursionsschemas für On beim Nachweis der starken Fundiertheit von $<$ macht es außerdem möglich, aus dem später zu zeigenden allgemeinen Rekursionsschema für stark fundierte Relationen das Rekursionsschema für On als Spezialfall abzuleiten, so daß wir zwei unabhängige Wege zum Rekursionsschema für On aufgezeigt haben.

5.18 Satz (Induktionsschema für $\in$) *Sei $\varphi(x,\vec{w})$ eine $\in$-Formel. Dann gilt*

$$\forall x\big(\forall y \in x\ \varphi(y,\vec{w}) \ \to \varphi(x,\vec{w})\big) \longrightarrow \forall x \varphi(x,\vec{w}).$$

In Worten: Folgt für jede Menge x aus der Gültigkeit der mathematischen Eigenschaft φ für alle Elemente von x stets die Gültigkeit von φ für x selbst, so trifft φ auf alle Mengen zu.

Beweis. Seien $\vec{w} \in V$ beliebig. Wenn φ nicht auf alle Mengen x zutrifft, gibt es ein x mit $\neg\varphi(x,\vec{w})$. Nach **(Fund)** existiert ein $\in$-minimales x mit $\neg\varphi(x,\vec{w})$. Dann gilt aber $\varphi(y,\vec{w})$ für alle $y \in x$. Nach Voraussetzung des Induktionsschemas folgt hieraus $\varphi(x,\vec{w})$, was der Wahl von x widerspricht. QED

Wir konstruieren nun zu jedem x eine kleinste transitive Obermenge, die transitive Hülle von x:

5.19 Satz *Sei $x \in V$. Dann ist durch* $\mathrm{TC}(x) :\equiv \bigcap\{z \mid x \subset z \wedge \mathrm{Trans}(z)\}$ *eine Menge definiert.* $\mathrm{TC}(x)$ *ist die kleinste transitive Obermenge von x und heißt* **transitive Hülle** *von x.*

Beweis. Wenn $\mathrm{TC}(x) \in V$ gezeigt ist, ergeben sich die Transitivität und die Minimalität von $\mathrm{TC}(x)$ unmittelbar aus der Tatsache, daß der Schnitt transitiver Mengen wiederum transitiv ist, und aus der Definition von $\mathrm{TC}(x)$. Wir zeigen nun durch $\in$-Induktion:

(1) $\mathrm{TC}(x) \in V$.

Beweis. Es gelte $\mathrm{TC}(y) \in V$ für alle $y \in x$. Da nach 3.6 der Schnitt einer nicht-leeren Klasse eine Menge ist, genügt es, die Existenz einer transitiven Menge $z \supset x$ zu zeigen. Definiere $z :\equiv \bigcup\{\mathrm{TC}(y) \mid y \in x\} \cup x$. Man sieht leicht, daß $z \in V$ gilt. z ist transitiv: sei $u \in v \in z$. Ist $v \in x$, so folgt $u \in v \subset \mathrm{TC}(v) \subset z$, also $u \in z$; ist $v \in \mathrm{TC}(y)$ für ein $y \in x$, so folgt $u \in \mathrm{TC}(y) \subset z$ aus der vorausgesetzten Transitivität von $\mathrm{TC}(y)$. Also gilt auch in diesem Fall $u \in z$. qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

5.20 Satz *(a) $\in$ ist stark fundiert auf V.*
(b) $<$ ist stark fundiert auf On.
Hierbei identifizieren wir $\in$ mit $\{(x,y) \mid x \in y\}$ und $<$ mit $\{(x,y) \mid x \in \mathrm{On} \wedge y \in \mathrm{On} \wedge x \in y\}$.

Beweis. zu (a). Die Existenz eines $\in$-minimalen Elementes in $u \neq \emptyset$ folgt durch Anwendung von **(Fund)** auf die $\in$-Formel $\varphi :\equiv x \in u$. Ist schließlich $x \in V$ beliebig, so setze $y :\equiv \mathrm{TC}(\{x\})$; dann ist $x \in y$ und falls z_0 ein $\in$-Vorgänger von z_1 ist, wobei $z_1 \in y$, so gilt $z_0 \in y$ aufgrund der Transitivität von y. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Ist $u \neq \emptyset$ so ist im Fall $u \cap \mathrm{On} = \emptyset$ jedes beliebige Element von u $<$-minimales Element von u (wegen $u \neq \emptyset$ existiert ein Element in u); im Fall $u \cap \mathrm{On} \neq \emptyset$ ist $\min(u \cap \mathrm{On})$ $<$-minimales Element von u. Ist schließlich $x \in V$ beliebig, so ist wie oben gesehen $y :\equiv \mathrm{TC}(\{x\})$ gegen $\in$-Vorgängern und damit auch gegen $<$-Vorgänger seiner Elemente abgeschlossen. Damit ist (b) gezeigt. QED

Nachdem wir zwei elementare Beispiele für stark fundierte Relationen kennengelernt haben, wenden wir uns wieder der allgemeinen Theorie der stark fundierten Relationen zu. Unser erstes Resultat ist das Pendant des Fundierungsaxioms im Bereich der stark fundierten Relationen.

5.21 Satz (Fundierungsschema für stark fundierte Relationen) *Es seien A und R Klassenterme und $\varphi(x,\vec{w})$ sei eine $\in$-Formel. R sei stark fundiert auf A. Dann gilt*

$$\exists x_0\big(x_0 \in A \wedge \varphi(x_0,\vec{w})\big) \longrightarrow \exists x\big(x \in A \wedge \varphi(x,\vec{w}) \wedge \forall y(yRx \to \neg\varphi(y,\vec{w}))\big).$$

In Worten: Trifft eine mathematische Eigenschaft φ auf ein Element von A zu, so gibt es unter allen Mengen aus A, auf die φ zutrifft, eine R-minimale.

Beweis. Wir führen das Problem der Wahl eines R-minimalen Elementes in einer Klasse auf das Problem der Wahl eines R-minimalen Elementes in einer nicht-leeren Menge u zurück.
Seien $\vec{w} \in V$ beliebig. Wähle ein $x_0 \in A$ mit $\varphi(x_0,\vec{w})$. Wähle nach (SF3) ein $y \in V$ mit $x_0 \in y$, so daß y alle R-Vorgänger seiner Elemente enthält. Dann ist $u :\equiv y \cap \{x \,|\, x \in A \wedge \varphi(x,\vec{w})\}$ eine nicht-leere Menge ($x_0 \in u$) und hat somit nach (SF2) ein R-minimales Element x. Da jeder R-Vorgänger x' von x wegen $R \subset A \times A$ in A liegt und wegen $x \in y$ zu y gehört, würde $\varphi(x',\vec{w})$ auf $x' \in u$ führen, was der Minimalität von x widerspricht. Also ist x wie gewünscht. QED

Wie im Fall $R = \in$ leiten wir nun aus dem Fundierungsschema ein Induktionsschema her, indem wir ein R-minimales „Gegenbeispiel“ analysieren.

5.22 Satz (Induktionsschema für stark fundierte Relationen) *Seien A und R Klassenterme und $\varphi(x,\vec{w})$ sei eine $\in$-Formel. R sei stark fundiert auf A. Dann gilt*

$$\forall x \in A\ \big(\forall y\,(yRx \to \varphi(y,\vec{w})) \to \varphi(x,\vec{w})\big) \longrightarrow \forall x \in A\ \varphi(x,\vec{w}).$$

In Worten: Überträgt sich die Gültigkeit einer mathematischen Eigenschaft φ von allen R-Vorgängern einer jeden Menge $x \in A$ stets auf x selbst, so trifft diese Eigenschaft auf alle Elemente von A zu.

Beweis. Seien $\vec{w} \in V$. Wäre die Aussage des Satzes falsch, gäbe es nach 5.21 ein R-minimales $x \in A$ mit $\neg\varphi(x,\vec{w})$. Für jeden R-Vorgänger y von x muß dann $\varphi(y,\vec{w})$ gelten. Hieraus folgt aber nach Voraussetzung $\varphi(x,\vec{w})$ im Widerspruch zu $\neg\varphi(x,\vec{w})$. Also muß die Aussage des Satzes doch richtig sein. QED

Wir formulieren und beweisen nun die Verallgemeinerung des Rekursionsschemas für On auf stark fundierte Relationen.

5.23 Satz (Rekursionsschema für stark fundierte Relationen) *Es seien A, R und G Klassenterme. Dann kann man effektiv einen Klassenterm F angeben, so daß unter* $\mathbf{ZF}^-$ *folgendes gilt:*

(a) *Falls R stark fundiert auf A und $G\colon A \times V \to V$ ist, so ist $F\colon A \to V$ und es gilt die* **Rekursionsgleichung** $\forall x \in A\ F(x) = G\big(x, (F(z)|zRx)\big)$.

(b) *(Eindeutigkeit) Unter den Voraussetzungen von (a) gilt: Ist F' ein Klassenterm, so daß $F'\colon A \to V$ gilt, und erfüllt F' ebenfalls die Rekursionsgleichung $\forall x \in A\ F'(x) = G\big(x, (F'(z)|zRx)\big)$, so ist $F = F'$.*

F heißt **kanonischer Term, der durch R-Rekursion auf A durch Rekursionsvorschrift G bestimmt ist**.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Rekursionssatzes für On (5.3): Wir betrachten (A, R, G)-Approximationen f. Das sind Abbildungen $f: u \to V$, wobei $u \subset A$ gilt und f auf u der Rekursionsgleichung genügt, d.h., $\forall x \in u\ f(x) = G\big(x, (f(z)|zRx)\big)$. (Wir müssen hierbei natürlich voraussetzen, daß u alle R-Vorgänger seiner Elemente enthält, da sonst für $x \in u$ eventuell $(f(z)|zRx)$ nicht definiert ist.) Wir zeigen dann, daß je zwei solcher Approximationen kompatibel sind, und verifizieren, daß ganz A von Approximationen „überdeckt" wird, d.h., daß jedes $x \in A$ im Definitionsbereich einer Approximation liegt. F erhalten wir als Vereinigung aller Approximationen.
Wir setzen also

$$\mathrm{App}(f, G) :\equiv \exists u\big(u \subset A \wedge \forall x \in u \forall y(yRx \to y \in u) \wedge f: u \to V \wedge \forall x \in u\ f(x) = G(x, (f(y)|yRx))\big)$$

und nennen f mit $\mathrm{App}(f, G)$ eine (A, R, G)-Approximation. Wir definieren einen Klassenterm F durch $F :\equiv \bigcup\big\{f \bigm| \mathrm{App}(f, G)\big\}$. Damit ist F effektiv angegeben. Es gelte nun $\mathbf{ZF}^-$.
Wir nehmen an, R sei stark fundiert auf A und $G: A \times V \to V$.

(1) Je zwei Approximationen sind kompatibel.

Beweis. Seien $f: u \to V$ und $g: v \to V$ mit $\mathrm{App}(f, G)$ und $\mathrm{App}(g, G)$ vorgelegt. Sei $w :\equiv u \cap v$. Gilt $f \restriction w \neq g \restriction w$, so existiert nach dem Fundierungsschema für stark fundierte Relationen (5.21) ein R-minimales $x \in w$ mit $f(x) \neq g(x)$. Dann gilt für jedes zRx noch $f(z) = g(z)$; da G funktional ist, folgt hieraus $G\big(x, (f(z)|zRx)\big) = G\big(x, (g(z)|zRx)\big)$, was wegen $\mathrm{App}(f, G)$ und $\mathrm{App}(g, G)$ zu $f(x) = g(x)$ führt. Dies widerspricht der Wahl von x. qed(1)

(2) $\forall x \in A\, \exists f\, \big(\mathrm{App}(f, G) \wedge x \in \mathrm{dom}(f)\big)$.

Beweis. Wir führen gemäß 5.22 eine R-Induktion durch. Sei also $x \in A$ und jedes zRx liege im Definitionsbereich einer Approximation. Es ist f zu konstruieren mit $\mathrm{App}(f, G)$ und $x \in \mathrm{dom}(f)$. Für zRx ist aufgrund von (1) und der Induktionsvoraussetzung durch $f_z :\equiv \bigcap\big\{f \bigm| \mathrm{App}(f, G) \wedge z \in \mathrm{dom}(f)\big\}$ eine Approximation definiert, da über eine nicht-leere Klasse kompatibler Approximationen geschnitten wird. Ferner gilt $z \in \mathrm{dom}(f_z)$.[33] Setze nun $f :\equiv \bigcup\big\{f_z \,|\, zRx\big\} \cup \big\{\big(x, G(x, (f_z(z) \,|\, zRx))\big)\big\}$. Dann ist $f \in V$ aufgrund von **($\bigcup$-Ax)** sowie **(Ers)** (da R stark fundiert ist, ist $\{z \,|\, zRx\} \in V$; wende dann **(Ers)** an auf diese Menge und die Zuordnung $z \mapsto f_z$). Unter Benutzung von (1) folgt nun leicht, daß f eine Approximation und $x \in \mathrm{dom}(f)$ ist. qed(2)

Aus (1) und (2) folgt nun unmittelbar, daß F das in (a) Verlangte leistet
(b) beweist man ganz analog zu (1). QED

5.24 Bemerkung Der kanonische Term F im Rekursionsschema ist G eindeutig zugeordnet; seine Definition ist dem obigen Beweis zu entnehmen. Der Term F ist auch dann definiert, wenn G nicht funktional ist. In diesem Fall macht das Rekursionsschema jedoch keine Aussage über die Eigenschaften von F.

5.25 Corollar *Aus dem Rekursionssatz für stark fundierte Relationen folgt der Rekursionssatz für* On.

Beweis. Es seien die Voraussetzungen von 5.3 erfüllt. Wende 5.23 an mit $A :\equiv \mathrm{On}$, $R :\equiv \big\{(x, y) \bigm| x \in \mathrm{On} \wedge y \in \mathrm{On} \wedge x \in y\big\}$ und $G' :\equiv \big\{((x, f), G(f)) \bigm| x \in \mathrm{On} \wedge f \in V\big\}$. Beachte, daß R nach dem in 5.20 (ohne Benutzung von 5.3!) Bewiesenen stark fundiert auf A ist. QED

Es ist kein „Zufall", daß der Rekursionssatz für die starke Wohlordnung $<$ gilt. Wie das nächste Lemma sofort impliziert, ist die Aussage des Rekursionssatzes für stark fundierte Relationen stets dann gültig, wenn die betrachtete Relation R eine starke Wohlordnung ist.

[33] Die umständliche Wahl von f_z erklärt sich dadurch, daß wir bei der Konstruktion von f auf das Auswahlaxiom verzichten wollen, und wir deshalb nicht ohne weiteres eine Approximation f_z „herausgreifen" können.

5.26 Lemma *Seien A und R Klassenterme. Dann gilt:* $\mathrm{SWO}(A,R) \leftrightarrow \mathrm{SLO}(A,R) \wedge \mathrm{SF}(A,R)$.
Speziell: Ist R starke Wohlordnung auf A, so ist R stark fundiert auf A.

Beweis. zu „$\Rightarrow$". Offenbar gilt (SF1). Um die Gültigkeit von (SF2) einzusehen, setze für $u \neq \emptyset$ $b :\equiv u \cap A$. Ist $b = \emptyset$, so ist jedes Element x von u wie in (SF2) verlangt; ist $b \neq \emptyset$, so ist das aufgrund der Wohlordnungseigenschaft existierende R-minimale Element x von b wie in (SF2) verlangt. Die Gültigkeit von (SF3') folgt aus

$$\{z \mid zRx\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } x \notin A; \\ \{z \mid z \in A \wedge zRx\}, & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Da R eine starke Wohlordnung ist, ist die unten stehende Klasse eine Menge.

zu „$\Leftarrow$". Es ist evident, daß aus $\mathrm{SLO}(A,R)$ sowie (SF2) und (SF3') die Eigenschaften einer starken Wohlordnung folgen. QED

5.6 Der Rang.

Als Beispiel für die Anwendung des Rekursionssatzes auf eine Relation R, die keine Wohlordnung ist, ordnen wir nun jeder Menge x durch $\in$-Rekursion eine Ordinalzahl $\mathrm{rg}(x)$ zu, die in gewisser Weise die maximale „Klammerungstiefe" der Mengenklammern $\{\ldots\}$ in x angibt. $\mathrm{rg}(x)$ heißt *Rang* von x. Wir werden sehen, daß der Rang in enger Relation zu den von Neumann-Stufen steht, indem er das früheste Auftauchen von x in der von Neumann-Hierarchie explizit macht.

5.27 Definition Definiere durch $\in$-Rekursion eine Funktion $\mathrm{rg}\colon V \to \mathrm{On}$ durch

$$\mathrm{rg}(x) :\equiv \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}(y) \mid y \in x\}.[34]$$

$\mathrm{rg}(x)$ heißt **Rang** von x.

5.28 Bemerkung Obige Definition zeigt eine kleine Ungenauigkeit in der Formulierung: durch Anwendung des Rekursionssatzes erhalten wir eine Funktion, deren Wertebereich nicht genauer spezifiziert ist; in der Definition haben wir allerdings sofort On als Wertebereich angegeben und in der Festlegung von $\mathrm{rg}(x)$ den Term „lub" benutzt, der dort ebenfalls nur Sinn macht, wenn wir bereits wissen, daß die Werte $\mathrm{rg}(y)$ für $y \in x$ in On liegen. Formal korrekt müßten wir wie folgt vorgehen:

Wir definieren $\mathrm{rg}\colon V \to V$ über $\in$-Rekursion durch $\mathrm{rg}(x) :\equiv \bigcup\big\{\mathrm{rg}(y) \cup \{\mathrm{rg}(y)\} \bigm| y \in x\big\}$ und zeigen durch $\in$-Induktion, daß $\mathrm{rg}(x) \in \mathrm{On}$ gilt für alle $x \in V$. Dann ist $\mathrm{rg}(y) \cup \{\mathrm{rg}(y)\} = \mathrm{rg}(y) + 1$, und weil für $A \subset \mathrm{On}$ gilt $\mathrm{lub}(A) = \bigcup\{\alpha + 1 \mid \alpha \in A\}$, haben wir die in obiger Definition charakterisierte Funktion gefunden.

Gleichwohl werden wir im folgenden selten diesen streng korrekten Weg einschlagen, sondern die korrekte Ausführung, die meist reine Routinearbeit ist, dem Leser überlassen.

5.29 Satz *Es gilt:*

(a) $x \in y \longrightarrow \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.

(b) $x \subset y \longrightarrow \mathrm{rg}(x) \leq \mathrm{rg}(y)$.

(c) $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \ \mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$.

(d) $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \ \mathrm{rg}(V_\alpha) = \alpha$.

[34] lub ist in 2.41 definiert.

Beweis. (a) folgt sofort aus der Definition; (b) folgt aus (a); (c) verifiziert man leicht durch Induktion nach α. Für (d) bemerkt man, daß „$\geq$“ sofort aus $\alpha \subset V_\alpha$ folgt; „$\leq$“ beweist man durch Induktion nach α. QED

Wir können nun den Zusammenhang zwischen der Rangfunktion und der von Neumann-Hierarchie (siehe 5.11) formulieren und beweisen:

5.30 Satz *Gelte* **ZF**. *Dann gilt* $V_\alpha = \{x \mid \mathrm{rg}(x) < \alpha\}$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $\alpha \in \mathrm{On}$ durch.
$\alpha = 0$. Der Fall ist klar.
$\alpha = \beta + 1$. Ist $x \in V_\alpha$, so gilt $x \subset V_\beta$, also $\mathrm{rg}(x) \leq \mathrm{rg}(V_\beta) = \beta < \alpha$. Ist andererseits $\mathrm{rg}(x) < \alpha$, so gilt $\mathrm{rg}(y) < \mathrm{rg}(x) \leq \beta$ für $y \in x$; aus der Induktionsvoraussetzung folgt also $x \subset V_\beta$, d.h., $x \in V_\alpha$.
$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Aus $x \in V_\alpha$ folgt $x \in V_\beta$ für ein $\beta < \alpha$. Also folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\mathrm{rg}(x) < \alpha$ falls $x \in V_\alpha$. Ist umgekehrt $\beta :\equiv \mathrm{rg}(x) < \alpha$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $x \in V_{\beta+1} \subset V_\alpha$. QED

5.31 Corollar *Gelte* **ZF**. *Dann gilt* $\mathrm{rg}(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\} = \min\{\alpha \mid x \subset V_\alpha\}$.

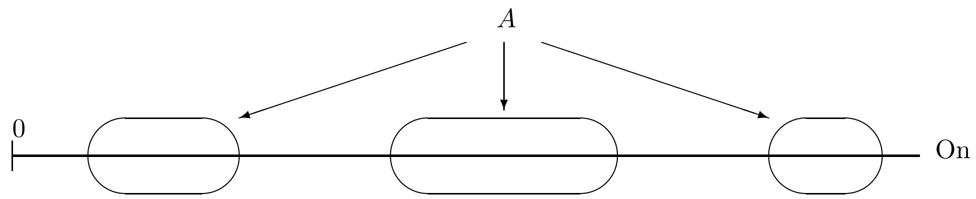
5.32 Corollar *Gelte* **ZF**. *Sei A ein Klassenterm. A ist genau dann eine echte Klasse, wenn* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{On}$ *gilt, d.h.,* $\forall\alpha\exists x\,(x \in A \wedge \mathrm{rg}(x) > \alpha)$.

Eine sehr wichtige Anwendung des Rekursionssatzes werden wir im nächsten Kapitel kennenlernen: die Konstruktion des Mostowski[35]-Isomorphismus’.

6 Der Isomorphiesatz von Mostowski.

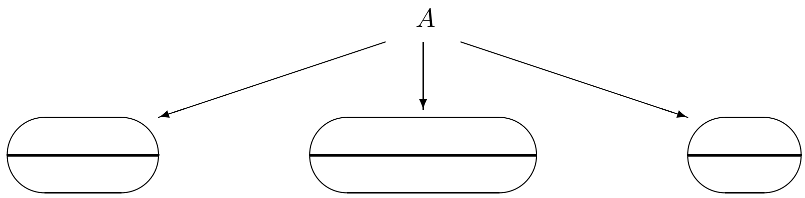
In diesem Kapitel setzen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – das System ZF$^-$ voraus.

Wir starten mit einem Gedankenexperiment: Nehmen wir an, A sei eine Teilklasse von On. Wenn wir uns On als einen bei 0 beginnenden Strahl vorstellen, so besteht A aus gewissen „Teilstrecken“ dieses Strahles („Zusammenhangskomponenten von A“):

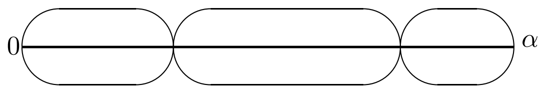


Wir „schneiden“ nun die nicht zu A gehörenden Intervalle aus On heraus

[35] Andrzej Stanisław Mostowski (1.11.1913, Lemberg–22.8.1975, Vancouver) 1931–1936 Studium der Mathematik in Warschau u.a. bei Alfred Tarski und Adolf Lindenbaum (12.6.1904, Warschau–September 1941, ermordet im Ghetto von Vilnius); anschließend Studien in Wien bei Kurt Gödel und in Zürich bei Paul Bernays, George Pólya (13.12.1887, Budapest–7.9.1985, Palo Alto (Ca.)) und Hermann Weyl (9.11.1885, Elmshorn–8.12.1955, Zürich); 1938 Promotion; 1945 Habilitation; 1947 außerordentlicher Professor in Warschau, dort ab 1951 ordentlicher Professor für Philosophie der Mathematik, später für Algebra bzw. Grundlagen der Mathematik. Neben der Mengenlehre beschäftigt sich Mostowski mit modelltheoretischen Fragestellungen (*ununterscheidbare Elemente* von Modellen) und besonders mit der formalen Logik (Verallgemeinerungen der Logik erster Stufe).



und „schieben“ die verbleibenden, zu A gehörenden Intervalle aneinander.



Das entstehende Gebilde kann als eine Kollabierung von A bezeichnet werden. A wird durch die eben durchgeführte „Konstruktion“ auf eine *transitive* Klasse B transformiert. Diese Kollabierung von A ist im Fall $A \in V$ eine Ordinalzahl α, und diese ist durch A eindeutig bestimmt. Im Fall $A \notin V$ ist On die Kollabierung von A.

6.1 Der Mostowski-Kollaps.

Das eben durchgeführte Gedankenexperiment macht ausgiebig Gebrauch von der Tatsache, daß On durch $<$ stark wohlgeordnet wird, so daß wir uns On als einen in 0 beginnenden Strahl vorstellen können. Wir stellen nun eine Konstruktion vor, die das oben durchgeführte Gedankenexperiment rechtfertigt, indem sie die Existenz einer Kollabierungsstruktur sichert: zu Klassen $R \subset A \times A$, wobei R eine „geeignete“ Relation ist, konstruieren wir eine (eindeutig bestimmte) *transitive* Klasse B und eine (eindeutig bestimmte) Bijektion $\pi\colon A \xrightarrow{bij.} B$, so daß die Strukturen (A, R) und $(B, \in)$ isomorph sind:

$$\forall x, y \in A\ (xRy \longleftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

R ist „geeignet“, wenn R stark fundiert und *extensional* auf R ist:

6.1 Definition Seien A und R Klassenterme.

$$\mathrm{Ext}(A, R) :\equiv\ R \subset A \times A \wedge \forall x, y\big((x \in A \wedge y \in A) \longrightarrow (\{z \mid zRx\} = \{z \mid zRy\} \to x = y)\big).$$

In Worten: R ist genau dann **extensional** auf A, wenn R eine Relation auf A ist, so daß jedes Element von A durch seine R-Vorgänger eindeutig bestimmt ist.

6.2 Bemerkung Die Extensionalität von R bedeutet, daß R „mindestens so stark“ ist wie $\in$.

Wir kennen bereits Beispiele für extensionale Relationen:

6.3 Lemma *Sei A ein Klassenterm.*

(a) $\mathrm{Trans}(A) \Rightarrow \mathrm{Ext}\,(A, \in\restriction A)$.

(b) Ist R eine partielle, lineare oder strikte lineare Ordnung auf A, so gilt $\mathrm{Ext}(A, R)$.

Beweis. zu (a). Seien $x, y \in A$ und es gelte $\{z \mid z \in A \wedge z \in x\} = \{z \mid z \in A \wedge z \in y\}$. Da A transitiv ist, also aus $x, y \in A$ auch $x, y \subset A$ folgt, ist in beiden Klassentermen die Bedingung „$z \in A$“ überflüssig. D.h., wir haben $\{z \mid z \in x\} = \{z \mid z \in y\}$, und dies bedeutet $x = y$ aufgrund von **(Ext)**.

zu (b). Seien $x, y \in A$ und es gelte

(1) $\{z \mid zRx\} = \{z \mid zRy\}$.

Ist R eine partielle oder lineare Ordnung, so folgt hieraus xRy und yRx aufgrund der Reflexivität von R. Da R antisymmetrisch ist, folgt $x = y$. Sei nun R eine strikte lineare Ordnung. Angenommen, $x \neq y$. Dann gilt xRy oder yRx. Im ersten Fall impliziert (1) xRx, im zweiten Fall yRy. Dies widerspricht der Irreflexivität von R. QED

6.4 Corollar *Ist R eine starke Wohlordnung auf A, so gilt* $\mathrm{Ext}(A, R) \wedge \mathrm{SF}(A, R)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus 6.3 und 5.26. QED

6.5 Bemerkung Ist A nicht transitiv, so ist $\in\restriction A$ i.a. nicht extensional: wähle etwa $A :\equiv \big\{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\big\}$; dann ist $\big\{z \,|\, z \in A \wedge z \in \{\{\emptyset\}\}\big\} = \emptyset = \big\{z \,|\, z \in A \wedge z \in \emptyset\big\}$ aber $\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$.

Der folgende Satz ist das angestrebte Resultat:

6.6 Satz (Isomorphiesatz von Mostowski) *Seien A und R Klassenterme. Dann existieren Klassenterme B und π, so daß unter* $\mathbf{ZF}^-$ *folgendes gilt:*

(a) $\mathrm{SF}(A, R) \wedge \mathrm{Ext}(A, R) \longrightarrow \mathrm{Trans}(B) \wedge \pi\colon A \xrightarrow{bij.} B \wedge \forall x, y\big((x \in A \wedge y \in A) \to (xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y))\big)$.
(D.h., π ist ein **R-$\in$-Isomorphismus von** *A* **auf** *B).*

(b) Gilt $\mathrm{SF}(A, R)$ *sowie* $\mathrm{Ext}(A, R)$ *und sind B' sowie π' Klassenterme, so daß B' transitiv und π' ein R-$\in$-Isomorphismus von A auf B' ist, so ist $B' = B$ und $\pi' = \pi$.*

Dieser nach (b) eindeutig bestimmte Isomorphismus π heißt Mostowski**-Isomorphismus von** *A; das Bild B von A unter dem* Mostowski-*Isomorphismus heißt* **Mostowski-Kollabierung von** (A, R) *oder auch* **Mostowski-Kollaps von** *A.*

Beweis. Unser Ziel ist es, mit Hilfe des Rekursionsschemas π derart zu definieren, daß unter den Voraussetzungen von (a) $\pi(x) = \{\pi(y) \,|\, yRx\}$ gilt. Hierzu definiere den Klassenterm G durch $G :\equiv \big\{\big((x, f), \mathrm{ran}(f)\big) \;\big|\; x \in A \wedge f \in V\big\}$. Sei π der kanonische Term, der durch R-Rekursion auf A durch Rekursionsvorschrift G bestimmt ist.

Gelte nun $\mathbf{ZF}^-$. Unter den Voraussetzungen von (a), also $\mathrm{SF}(A, R)$ und $\mathrm{Ext}(A, R)$ ist dann $G\colon A \times V \to V$, so daß nach dem Rekursionssatz $\pi\colon A \to V$ und $\pi(x) = G\big(x, (\pi(y) \,|\, yRx)\big)$, also $\pi(x) = \{\pi(y) \,|\, yRx\}$, für alle $x \in A$ gilt. Setze $B :\equiv \pi[A]$. Es ist zu zeigen, daß $\pi\colon A \xrightarrow{bij.} B$ gilt, B transitiv und π ein R-$\in$-Morphismus ist. Aus den Definitionen und dem bereits über π bekannten folgt sofort $\pi : A \xrightarrow{surj.} B$. Die Bijektivität folgt also aus

(1) π ist injektiv.

Beweis. Wir vereinbaren die folgende Sprechweise: ist $x \in A$, so sagen wir π ist *injektiv an der Stelle* x, falls $\pi(y) \neq \pi(x)$ für $y \neq x$ gilt, genauer: die $\in$-Formel $\forall y(y \neq x \to \pi(y) \neq \pi(x))$ auf x zutrifft. Es ist zu zeigen, daß π an jeder Stelle $x \in A$ injektiv ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es nach dem Fundierungsschema für stark fundierte Relationen 5.21 ein R-minimales x, so daß π an der Stelle x *nicht* injektiv ist. (π ist dann also injektiv an jeder Stelle zRx.) Fixiere $y \in A$ mit $y \neq x$ und $\pi(y) = \pi(x)$. Wir zeigen, daß x und y dieselben R-Vorgänger haben, was der Extensionalität von R widerspricht.

Sei zRx. Dann ist $\pi(z) \in \pi(x) = \pi(y) = \{\pi(z') \,|\, z'Ry\}$. Also ist $\pi(z) = \pi(z')$ für ein z' mit $z'Ry$. Wegen zRx ist π an der Stelle z noch injektiv. Aus $\pi(z) = \pi(z')$ folgt also $z = z'$. Da $z'Ry$ gilt, ist also z ein R-Vorgänger von y.

Sei jetzt zRy. Analog zum eben behandelten Fall folgt $\pi(z) = \pi(z')$ für ein $z'Rx$, und die Minimalität von x impliziert, daß π an der Stelle z' noch injektiv ist. Also ist $z = z'$ ein R-Vorgänger von x. qed(1)

(2) $\mathrm{Trans}(B)$.

Beweis. Sei $u \in v \in B$. Dann ist nach Definition von B $v = \pi(x)$ für ein $x \in A$. Aus der Definition von $\pi(x)$ folgt dann $u = \pi(y)$ für ein yRx, speziell also $y \in A$. Also ist $u \in B$. qed(2)

(3) π ist ein R-$\in$-Morphismus, d.h., $\forall x, y \in A\ (xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y))$.

BEWEIS. „$\Rightarrow$“ Dies folgt sofort aus der Definition von $\pi(y)$.
„$\Leftarrow$“ Ist $\pi(x) \in \pi(y)$ so ist $\pi(x) = \pi(z)$ für ein zRy. Aus der Injektivität von π folgt $x = z$. Also xRy. qed(3)

Damit ist (a) bewiesen. Seien nun B' und π' wie in (b). Dann ist $B' = \pi'[A]$, so daß es für (b) genügt, $\pi = \pi'$ zu verifizieren. Hierzu zeigen wir, daß π' die Rekursionsgleichung von π erfüllt, also

(4) $\pi'(x) = \{\pi'(y) \mid yRx\}$ für alle $x \in A$.

Die Eindeutigkeitsaussage des Rekursionsschemas 5.23 liefert dann sofort $\pi = \pi'$.

BEWEIS von (4). „$\supset$“ Dies folgt sofort daraus, daß π' nach Voraussetzung ein R-$\in$-Isomorphismus ist.

„$\subset$“ Sei $u \in \pi'(x)$. Aus $\pi'(x) \in B'$, der Transitivität von B' und $\pi'\colon A \xrightarrow{surj.} B'$ folgt $\pi'(x) \subset B' = \pi'[A]$. Also ist $u = \pi'(y)$ für ein $y \in A$. Aus $\pi'(y) = u \in \pi'(x)$ folgt yRx, denn π' ist ein R-$\in$-Morphismus. Insgesamt haben wir $u = \pi'(y)$ mit yRx, und dies ist zu zeigen. qed(4)

Damit ist der Isomorphiesatz vollständig bewiesen. QED

6.2 Definierbare $\in$-Isomorphismen.

Als erste Anwendung des Isomorphiesatzes von MOSTOWSKI zeigen wir:

6.7 Satz *Seien A, B und π Klassenterme. A und B seien transitiv, $\pi\colon A \xrightarrow{bij.} B$ sei ein $\in$-$\in$-Isomorphismus (d.h., $\forall x, y \in A\ (x \in y \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y))$). Dann ist $B = A$ und π ist die Identität auf A: $\pi(x) = x$ für alle $x \in A$.*

BEWEIS. Nach der Eindeutigkeitsausage (b) des Isomorphiesatzes müssen sowohl B, π als auch A, $\mathrm{id} \upharpoonright A$ mit dem MOSTOWSKI-Kollaps bzw. dem MOSTOWSKI-Isomorphismus übereinstimmen. Hieraus folgt $B = A$ sowie $\pi = \mathrm{id} \upharpoonright A$. QED

Wir machen auf zwei Aspekte des obigen Satzes aufmerksam: Haben wir zwei transitive Klassenterme A und B, so daß $A \neq B$ gilt, so gibt es keinen $\in$-$\in$-Isomorphismus zwischen ihnen. Insbesondere erhalten wir für Ordinalzahlen:

6.8 Corollar $\alpha \neq \beta \longrightarrow \neg \exists f \big(f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} \beta \wedge \forall \gamma_0, \gamma_1\, (\gamma_0 < \gamma_1 \wedge \gamma_1 < \alpha \rightarrow f(\gamma_0) < f(\gamma_1))\big)$.
D.h., zwischen je zwei verschiedenen Ordinalzahlen gibt es keine ordnungserhaltende Bijektion.

Setzt man andererseits in 6.7 $B :\equiv A$ so folgt, daß jede transitive Klasse genau einen definierbaren (d.h., als Klassenterm $\{x \mid \varphi\}$ darstellbaren) $\in$-$\in$-Automorphismus hat nämlich die Identität. Da V transitiv ist, ergibt sich speziell:

6.9 Corollar *Es gibt keinen definierbaren $\in$-$\in$-Automorphismus π von V außer $\pi = \mathrm{id}$.*

6.3 Der Ordnungstyp einer starken Wohlordnung.

Nach 6.4 erfüllt jede starke Wohlordnung R die Voraussetzungen des Isomorphiesatzes 6.6. In diesem Fall können wir den MOSTOWSKI-Kollaps genauer charakterisieren.

6.10 Satz (Definition des Ordnungstyps einer starken Wohlordnung) *Sei R eine starke Wohlordnung auf A und $\pi\colon A \xrightarrow{bij.} B$ sei der MOSTOWSKI-Isomorphismus. Dann ist $B \subset \mathrm{On}$. Im Fall $A \in V$ gilt $B \in \mathrm{On}$, im Fall $A \notin V$ gilt $B = \mathrm{On}$. B heißt auch der* **Ordnungstyp** *von R, A und wird mit $\mathrm{otp}(A, R)$ bezeichnet. Falls $B = \mathrm{On}$ schreibt man manchmal auch $\mathrm{otp}(A, R) = \infty$. Ist R aus dem Zusammenhang bekannt, schreibt man kurz $\mathrm{otp}(A)$.*

Beweis. Da On nach 4.9 keine anderen transitiven Teilklassen als On und die Ordinalzahlen hat, genügt es zu beweisen, daß $B \subset \mathrm{On}$ gilt. (Beachte, daß der Mostowski-Kollaps transitiv ist.) Aus **(Ers)** folgt dann $B \in \mathrm{On} \leftrightarrow A \in V$. Wegen $B = \pi[A]$ folgt $B \subset \mathrm{On}$ aus

(1) $\forall x \in A\ \pi(x) \in \mathrm{On}$.

Beweis. Wir führen eine R-Induktion durch, siehe 5.22. Sei also $x \in A$ und für alle yRx gelte $\pi(y) \in \mathrm{On}$. Dann ist $\pi(x) \subset \mathrm{On}$, so daß wegen 4.9 $\pi(x) \in \mathrm{On}$ folgt, wenn wir $\mathrm{Trans}(\pi(x))$ nachweisen können. Seien also $u \in v \in \pi(x)$. Aufgrund der Definition des Mostowski-Isomorphismus' ist dann $v = \pi(y)$ für ein yRx und somit $u = \pi(z)$ für ein zRy. Da R eine strikte lineare Ordnung ist, folgt zRx aus zRy und yRx. Somit ist $u = \pi(z)$ mit zRx, also $u \in \pi(x)$. qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

6.11 Beispiel (a) Für $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt $\mathrm{otp}(\alpha) = \alpha$.

(b) $\mathrm{otp}(\{\omega \cdot n \mid n < \omega\}) = \omega$.

(c) $\mathrm{otp}(\{\omega + n \mid n \leq \omega\}) = \omega + 1$.

(d) Sei $A :\equiv \{\delta \mid \mathrm{Lim}(\delta)\}$. Dann ist $\mathrm{otp}(A) = \infty$, da A eine echte Klasse ist: wäre nämlich $A \in V$ so wäre $\alpha :\equiv \bigcup A$ eine Limesordinalzahl, die nicht in A liegt, was der Definition von A widerspricht.

Wir können nun unser obiges Resultat 6.8 über ordnungserhaltende Abbildungen zwischen verschiedenen Ordinalzahlen wie folgt verschärfen:

6.12 Corollar $\beta < \alpha \longrightarrow \neg \exists f \big(f \colon \alpha \to \beta \wedge \forall \gamma_0, \gamma_1 \,(\gamma_0 < \gamma_1 \wedge \gamma_1 < \alpha \to f(\gamma_0) < f(\gamma_1))\big)$.
D.h., es gibt keine ordnungserhaltende Abbildung von einer größeren in eine kleinere Ordinalzahl.

Beweis. Angenommen, es sei $f \colon \alpha \to \beta$ eine ordnungstreue Injektion. Sei π der Mostowski-Isomorphismus von $\mathrm{ran}(f)$. Dann ist $\pi \circ f \colon \alpha \xrightarrow{bij.} \mathrm{otp}(\mathrm{ran}(f), <)$ eine ordnungserhaltende Bijektion. Aus dem nachfolgenden Lemma 6.13 folgt $\mathrm{otp}(\mathrm{ran}(f), <) \leq \beta$. Also ist $\pi \circ f$ eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen zwei verschiedenen Ordinalzahlen ($\mathrm{otp}(\mathrm{ran}(f), <) < \alpha$); nach 6.8 existiert eine solche Funktionen nicht. Also kann es ein derartiges f nicht geben. QED

6.13 Lemma $\forall \beta \forall a \big(a \subset \beta \to \mathrm{otp}(a, <) \leq \beta\big)$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $\beta \in \mathrm{On}$ durch. Sei $\pi : a \xrightarrow{bij.} \mathrm{otp}(a)$ der Mostowski-Isomorphismus, also $\mathrm{otp}(a) = \pi[a]$. Es ist für $\gamma \in a$ zu zeigen $\pi(\gamma) < \beta$. Sei also $\gamma \in a$. Dann ist $\gamma < \beta$ und $\pi \restriction a \cap \gamma$ ist der Mostowski-Isomorphismus von $a \cap \gamma \subset \gamma$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $\pi[a \cap \gamma] = \mathrm{otp}(a \cap \gamma) \leq \gamma$. Da nach Definition des Mostowski-Isomorphismus' $\pi(\gamma) = \pi[a \cap \gamma]$ ist, folgt hieraus sofort die Behauptung. QED

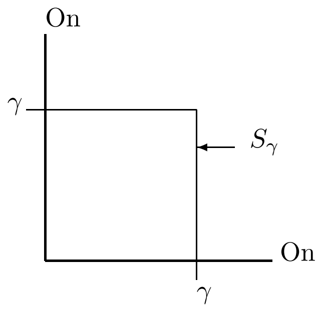
6.4 Die Gödel Pairing Function.

Wir beschließen dieses Kapitel mit einem Beispiel, daß später im Bereich der Kardinalzahlarithmetik von großer Wichtigkeit sein wird. Zunächst definieren wir auf $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ auf kanonische Weise eine starke Wohlordnung.

6.14 Lemma *Für* $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ *sei* $|(\alpha, \beta)| :\equiv \max\{\alpha, \beta\}$ *die* **Maximumsnorm** *von* (α, β). *Definiere eine Relation* $<^* \subset (\mathrm{On} \times \mathrm{On}) \times (\mathrm{On} \times \mathrm{On})$ *durch*

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \beta_1) <^* (\alpha_2, \beta_2) \iff \big(& |(\alpha_1, \beta_1)| < |(\alpha_2, \beta_2)| \vee \\ & (|(\alpha_1, \beta_1)| = |(\alpha_2, \beta_2)| \wedge \alpha_1 < \alpha_2) \vee \\ & (|(\alpha_1, \beta_1)| = |(\alpha_2, \beta_2)| \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2)\,\big).\end{aligned}$$

Dann ist $<^*$ *eine starke Wohlordnung von* $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$. *Die Ordnung* $<^*$ *kann man sich wie folgt veranschaulichen: Definiere für* $\gamma\in\mathrm{On}$ *die* **γ-Sphäre** S_γ *durch* $S_\gamma :\equiv \big\{(\alpha,\beta)\;\big|\;|(\alpha,\beta)|=\gamma\big\}$.



$<^*$ *ordnet* $\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ *wie folgt: jede* γ*-Sphäre wird lexikographisch geordnet; für Elemente auf verschiedenen Sphären gilt: die Elemente auf weiter innen liegenden Sphären liegen vor denjenigen auf weiter außen liegenden Sphären.*

Beweis. Dies rechnet man leicht nach. Ein minimales Element in $\emptyset\neq B\subset\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ erhält man wie folgt: setze $\delta :\equiv \min\{\gamma\,|\,B\cap S_\gamma\neq\emptyset\}$; das kleinste Element von $B\cap S_\delta$ ist dann kleinstes Element von B. Mit $\alpha_0 :\equiv \min\{\alpha\,|\,\exists\beta\,(\alpha,\beta)\in B\cap S_\delta\}$, $\beta_0 :\equiv \min\{\beta\,|\,(\alpha_0,\beta)\in B\cap S_\delta\}$ ist (α_0,β_0) dieses Element. QED

Der Mostowski-Isomorphismus von $(\mathrm{On}\times\mathrm{On},<^*)$ hat einen speziellen Namen:

6.15 Definition Die **Gödel-Pairing-Function** $G\colon\mathrm{On}\times\mathrm{On}\xrightarrow{bij.}\mathrm{On}$ ist der Mostowski-Isomorphismus von $(\mathrm{On}\times\mathrm{On},<^*)$.

Wir halten ein paar Eigenschaften der Gödel-Pairing-Function G fest:

6.16 Lemma *Es gilt:*

(a) $G(\alpha,\beta)\geq\alpha,\beta$.

(b) $G[\alpha\times\alpha]=G(0,\alpha)$. *Speziell:* $\alpha\leq G[\alpha\times\alpha]$.

(c) $G[\omega\times\omega]=\omega$.

Beweis. zu (a). Durch $f(\gamma) :\equiv G(\gamma,0)$ bzw. $g(\gamma) :\equiv G(0,\gamma)$ sind ordnungserhaltende Injektionen $f\colon\alpha\to G(\alpha,\beta)$ bzw. $g\colon\beta\to G(\alpha,\beta)$ definiert. Nach 6.12 ist $\alpha>G(\alpha,\beta)$ bzw. $\beta>G(\alpha,\beta)$ nicht möglich.

zu (b). Dies folgt aus $\{x\,|\,x\in\mathrm{On}\times\mathrm{On}\wedge x<^*(0,\alpha)\}=\alpha\times\alpha$ und der Definition des Mostowski-Isomorphismus'.

zu (c). Da jedes $(m,n)\in\omega\times\omega$ nur endlich viele $<^*$-Vorgänger hat, folgt $G(m,n)<\omega$. Also ist $G[\omega\times\omega]\leq\omega$. Mit (b) ergibt sich dann die Behauptung. QED

M.H. der Gödel-Pairing-Function beweisen wir das folgende, Resultat, das in der Kardinalzahlarithmetik von fundamentaler Bedeutung ist, vgl. 10.7 und 10.9.

6.17 Satz $\forall\alpha\exists f\,\big(\alpha\geq\omega\longrightarrow f\colon\alpha\times\alpha\xrightarrow{bij.}\alpha\big)$.

Beweis. Wir machen Induktion über $\alpha\geq\omega$.

$\alpha=\omega$. Wegen $G[\omega\times\omega]=\omega$, leistet $f :\equiv G\restriction\omega\times\omega$ das Gewünschte.

$\alpha>\omega$. Wir unterscheiden zwei Fälle

Fall 1. $\exists\beta\,\exists g\,(\beta < \alpha \wedge g{:}\,\beta \xrightarrow{bij.} \alpha)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $h{:}\,\beta\times\beta \xrightarrow{bij.} \beta$. Setze $f(\mu,\nu) :\equiv g\big(h(g^{-1}(\mu), g^{-1}(\nu))\big)$. Es ist leicht zu sehen, daß $f{:}\,\alpha\times\alpha \xrightarrow{bij.} \alpha$ gilt.

Fall 2. $\neg\big(\exists\beta\,\exists g\,(\beta < \alpha \wedge g{:}\,\beta \xrightarrow{bij.} \alpha)\big)$. Setze $f :\equiv G \restriction \alpha\times\alpha$. Da G injektiv ist, bleibt $G[\alpha\times\alpha] = \alpha$ zu zeigen. Nach 6.16 ist $G[\alpha\times\alpha] \geq \alpha$. Wir nehmen $G[\alpha\times\alpha] > \alpha$ an und leiten einen Widerspruch her. Hierzu bemerken wir zunächst, daß $\mathrm{Lim}(\alpha)$ gilt: wäre nämlich $\alpha = \beta+1$, so wäre durch $\beta \mapsto 0$, $n \mapsto n+1$ für $n < \omega$ und $\nu \mapsto \nu$ für $\omega \leq \nu < \beta$ eine Bijektion $\alpha \xrightarrow{bij.} \beta$ gegeben, was der Voraussetzung in Fall 2 widerspricht. Wegen $G[\alpha\times\alpha] > \alpha$ existiert ein $(\mu,\nu) \in \alpha\times\alpha$ mit $\alpha = G(\mu,\nu)$. Sei $\gamma :\equiv |(\mu,\nu)|+1$. Aus $(\mu,\nu) \in \gamma\times\gamma$ folgt $\alpha = G(\mu,\nu) < G[\gamma\times\gamma]$, also

(1) $\quad \alpha \subset G[\gamma\times\gamma]$.

Wegen $\mathrm{Lim}(\alpha)$ ist $\gamma < \alpha$; wegen $G(m,n) < \omega$ für $m,n < \omega$ und $G(\mu,\nu) = \alpha \geq \omega$ ist mindestens einer der Werte μ, ν – und damit auch γ – größer als ω. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt also die Existenz einer Bijektion $g{:}\,\gamma \xrightarrow{bij.} \gamma\times\gamma$, so daß $h :\equiv G\circ g$ eine Bijektion zwischen γ und $G[\gamma\times\gamma]$ ist. Wegen (1) induziert h^{-1} eine Bijektion von α auf eine Teilmenge $a \subset \gamma$. Schaltet man dieser noch den MOSTOWSKI-Isomorphismus von a nach und beachtet, daß aus $a \subset \gamma$ nach 6.13 $\beta :\equiv \mathrm{otp}(a) \leq \gamma$ folgt, so haben wir eine Bijektion von α auf eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ gefunden, was der Voraussetzung in Fall 2 widerspricht. Dies war unser Ziel.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

6.18 Bemerkung Der zuletzt bewiesene Satz ist auch aus dem Grund bemerkenswert, daß die Existenz der Bijektion f ohne Verwendung des Auswahlaxioms, das „normalerweise“ für solche Existenzen zuständig ist, gezeigt werden kann.

7 Natürliche, rationale und reelle Zahlen.

Wir setzen zunächst ZF$^-$ voraus.

In diesem Kapitel geben wir eine mengentheoretische Definition der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen an.

7.1 Die natürlichen Zahlen.

Wir haben bereits definiert, unter der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (von V) die Menge ω verstehen zu wollen, siehe 4.30. Analysieren wir diesen Definitionsprozeß etwas genauer analysieren: hierzu fixieren wir $x \in V$, einen Klassenterm S sowie ein $e \in x$ und nennen (x,S,e) eine **Peano-Struktur**, falls die folgenden PEANO-Axiome gelten:

(P1) $S{:}\,x \xrightarrow{inj.} x$.

(P2) $e \notin \mathrm{ran}(S)$.

(P3) $\forall v_0\big((v_0 \subset x \wedge e \in v_0 \wedge \forall v_1(v_1 \in v_0 \to S(v_1) \in v_0)) \longrightarrow v_0 = x\big)$.

Nach 4.28 ist $(\omega,+1,0)$[36] eine PEANO-Struktur. Dies hatten wir zum Anlaß genommen, ω als Menge der natürlichen Zahlen von V zu identifizieren, da wir erwarten, daß die PEANO-Axiome (mit S = Nachfolgerbildung und $e = 0$) die Menge der natürlichen Zahlen charakterisieren. Aber womöglich gibt es noch andere, von $(\omega,+1,0)$ grundsätzlich verschiedene PEANO-Strukturen: in diesem Fall ist die Wahl von ω als Menge der natürlichen Zahlen nicht mehr zwingend, und es wäre zu untersuchen, ob eventuell eine andere PEANO-Struktur eine adäquatere Formalisierung der Menge der natürlichen Zahlen in V wäre. Wir zeigen nun, daß dies nicht der Fall ist: bis auf Umbenennungen ist die Struktur $(\omega,+1,0)$ die einzige PEANO-Struktur und somit die kanonische Formalisierung der Menge der natürlichen Zahlen in V.

[36] „+1“ steht für die durch $n \mapsto n+1$ gegebene Funktion $\omega \to \omega$.

7.1 Satz *Je zwei* PEANO-*Strukturen sind* **isomorph**. *D.h., sind* (x_0, S_0, e_0) *und* (x_1, S_1, e_1) *zwei* PEANO-*Strukturen, so existiert eine Funktion* $f\colon x_0 \to x_1$ *mit:*

(i) f *ist bijektiv,*

(ii) $\forall v \in x_0\, S_1\big(f(v)\big) = f\big(S_0(v)\big)$,

(iii) $f(e_0) = e_1$.

f *heißt* **Isomorphismus** *zwischen* (x_0, S_0, e_0) *und* (x_1, S_1, e_1). *Die Schreibweise* $(x_0, S_0, e_0) \cong (x_1, S_1, e_1)$ *bedeute, daß* (x_0, S_0, e_0) *und* (x_1, S_1, e_1) *isomorph sind.*

BEWEIS. Man sieht leicht, daß $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der PEANO-Strukturen ist. Es genügt deshalb zu zeigen, daß jede PEANO-Struktur (x, S, e) isomorph zu $(\omega, +1, 0)$ ist. Sei also (x, S, e) eine beliebige PEANO-Struktur. Definiere rekursiv eine Funktion $f\colon \omega \to V$ mit $f(0) = e$ und $f(n+1) = S\big(f(n)\big)$.

(1) $\operatorname{ran}(f) = x$.

BEWEIS. Sei $a :\equiv \operatorname{ran}(f)$. Durch Induktion nach n folgt leicht $f(n) \in x$, so daß $a \subset x$ gilt. Dann ist a eine Teilmenge von x, die $e = f(0)$ enthält und unter der S-Operation abgeschlossen ist. Ist nämlich $v \in a$, so ist $v = f(n)$ für ein $n \in \omega$ und somit ist $S(v) = S\big(f(n)\big) = f(n+1) \in a$. Nach (P3) ist dann $a = x$, und dies war zu zeigen. qed(1)

(2) f ist injektiv.

BEWEIS. Sei $a :\equiv \{n \mid n \in \omega \wedge \forall m \neq n\; f(m) \neq f(n)\}$. Wir müssen $a = \omega$ zeigen. Angenommen $a \neq \omega$. Dann sei $n = \min(\omega \setminus a)$. Es ist $n > 0$, denn für $m \neq 0$, also $m = k+1$, ist $f(m) = S\big(f(k)\big) \neq e = f(0)$ wegen (P2). Sei also $n = l+1$. Wähle zu n ein $m \in \omega$ mit $m \neq n$ aber $f(m) = f(n)$. Dann ist auch $m \in \omega \setminus a$ und somit ist $m > n$ wegen der Minimalität von n. Also ist $m = k+1$, wobei $k > l$ ist. Dann folgt $S\big(f(k)\big) = f(m) = f(n) = S\big(f(l)\big)$, was wegen der Injektivität von S auf $f(k) = f(l)$ führt. Also ist $l \in \omega \setminus a$. Wegen $l < n$ widerspricht das der Minimalität von n. Der Widerspruch zeigt, daß doch $a = \omega$ sein muß. qed(2)

Aus (1) und (2) folgt $f\colon \omega \xrightarrow{bij.} x$. Aus der Definition von f folgt nun sofort, daß f ein Isomorphismus ist. QED

7.2 Bemerkung Der oben definierte Isomorphismus ist eindeutig bestimmt.

Damit ist die Identität der Menge der natürlichen Zahlen von V eindeutig geklärt. Durch die Einschränkung der Ordnungsrelation von On sowie der ordinalen Addition und Multiplikation auf ω erhalten wir die $<$-Ordnung sowie die Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen, die wir mit $<_{\mathbb{N}}$, $+_{\mathbb{N}}$ und $\cdot_{\mathbb{N}}$ bezeichnen. Das Tupel $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0, 1)$ bezeichnen wir als **Struktur der natürlichen Zahlen**.

7.2 Die rationalen Zahlen.

Bei der Definition der rationalen Zahlen[37] lassen wir uns von der Idee leiten, daß sich jede rationale Zahl in der Form

$$\frac{a-b}{c}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{N} \text{ und } c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

darstellen läßt. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ eine Relation $\sim$ durch

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') :\equiv c'a +_{\mathbb{N}} cb' = ca' +_{\mathbb{N}} c'b.$$

(Interpretation: $\frac{a-b}{c} = \frac{a'-b'}{c'} \iff c'a + cb' = ca' + c'b$) Hierbei sei für $m, n \in \mathbb{N}$ definiert $mn :\equiv m \cdot_{\mathbb{N}} n$; wir vereinbaren weiter, daß wie üblich „Punktrechnung vor Strichrechnung“ geht. Man verifiziert elementar:

[37] Die Menge der ganzen Zahlen wird hierbei implizit mitdefiniert.

7.3 Lemma $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

7.4 Definition Sei $\frac{a-b}{c} :\equiv \big[(a,b,c)\big]_\sim$ die Äquivalenzmenge von (a,b,c) bzgl. $\sim$ und sei

$$\mathbb{Q}_0 :\equiv \left\{ \frac{a-b}{c} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \right\}.$$

7.5 Bemerkung Die Schreibweise $\frac{a-b}{c}$ ist eine rein formale Bezeichnung einer gewissen Menge; der Strich kann (noch!) nicht als Bruchstrich interpretiert werden.

Wir erweitern nun die $<$-Relation und die arithmetischen Operationen auf den Bereich $\mathbb{Q}_0$.

7.6 Definition (a) $\frac{a-b}{c} <_{\mathbb{Q}_0} \frac{a'-b'}{c'} :\equiv c'a +_{\mathbb{N}} cb' <_{\mathbb{N}} ca' +_{\mathbb{N}} c'b$.
(b) $\frac{a-b}{c} +_{\mathbb{Q}_0} \frac{a'-b'}{c'} :\equiv \frac{(c'a +_{\mathbb{N}} ca')-(c'b +_{\mathbb{N}} cb')}{c \cdot_{\mathbb{N}} c'}$.
(c) $\frac{a-b}{c} \cdot_{\mathbb{Q}_0} \frac{a'-b'}{c'} :\equiv \frac{(aa' +_{\mathbb{N}} bb')-(ab' +_{\mathbb{N}} a'b)}{c \cdot_{\mathbb{N}} c'}$.

Leicht läßt sich zeigen:

7.7 Lemma $<_{\mathbb{Q}_0}, +_{\mathbb{Q}_0}$ *und* $\cdot_{\mathbb{Q}_0}$ *sind wohldefiniert, d.h., die Definitionen sind unabhängig von den gewählten Repräsentanten.*

Wir betten nun $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}_0$ ein, so daß auf $\mathbb{N}$ die Ordnung und die arithmetischen Operationen von $\mathbb{Q}_0$ mit der Ordnung und den arithmetischen Operationen von $\mathbb{N}$ übereinstimmt. Der Leser kann leicht beweisen:

7.8 Lemma *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $n_{\mathbb{Q}_0} :\equiv \frac{n-,}{0}, 1..$ *Dann wird die Struktur* $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0, 1)$ *durch die Funktion* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_0, n \mapsto n_{\mathbb{Q}_0}$ *monomorph in die Struktur* $(\mathbb{Q}_0, <_{\mathbb{Q}_0}, +_{\mathbb{Q}_0}, \cdot_{\mathbb{Q}_0}, 0_{\mathbb{Q}_0}, 1_{\mathbb{Q}_0})$ *eingebettet. D.h., es gilt:*
(a) f *ist injektiv.*
(b) f *ist eine strukturerhaltende Abbildung. D.h., es gelten die folgenden Aussagen:*
  (i) $m <_{\mathbb{N}} n \longleftrightarrow f(m) <_{\mathbb{Q}_0} f(n)$.
  (ii) $f(m +_{\mathbb{N}} n) = f(m) +_{\mathbb{Q}_0} f(n)$.
  (iii) $f(m \cdot_{\mathbb{N}} n) = f(m) \cdot_{\mathbb{Q}_0} f(n)$.
  (iv) $f(0) = 0_{\mathbb{Q}_0}$.
  (v) $f(1) = 1_{\mathbb{Q}_0}$.

Wir können also in $\mathbb{Q}_0$ die Menge $f[\mathbb{N}]$ durch $\mathbb{N}$ „ersetzen". Formal gehen wir hierbei wie folgt vor: Wir setzen

$$\mathbb{Q} :\equiv \big(\mathbb{Q}_0 \setminus f[\mathbb{N}]\big) \cup \mathbb{N}.$$

Dann läßt sich f zu einer Bijektion $\tilde{f}\colon \mathbb{Q} \xrightarrow{bij.} \mathbb{Q}_0$ fortsetzen durch

$$\tilde{f}(q) :\equiv \begin{cases} q, & \text{falls } q \in \mathbb{Q}_0 \setminus f[\mathbb{N}] \\ f(q), & \text{falls } q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Wir definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Relation $<_{\mathbb{Q}}$ sowie zwei Verknüpfungen $+_{\mathbb{Q}}$ und $\cdot_{\mathbb{Q}}$ durch

$$\begin{aligned} q <_{\mathbb{Q}} r &:\equiv \tilde{f}(q) <_{\mathbb{Q}_0} \tilde{f}(r), \\ q +_{\mathbb{Q}} r &:\equiv \tilde{f}^{-1}\big(\tilde{f}(q) +_{\mathbb{Q}_0} \tilde{f}(r)\big), \\ q \cdot_{\mathbb{Q}} r &:\equiv \tilde{f}^{-1}\big(\tilde{f}(q) \cdot_{\mathbb{Q}_0} \tilde{f}(r)\big). \end{aligned}$$

Die Struktur $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 0, 1)$ heißt **Struktur der rationalen Zahlen**. Man verifiziert elementar, daß $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 0, 1)$ ein „angeordneter Körper" ist:

7.9 Definition Sei $x \in V$ und es sei $< \subset x \times x$, $+ : x \times x \to x$ sowie $\cdot : x \times x \to x$ und es seien $e_0, e_1 \in x$. Wir nennen das Tupel $(x, <, +, \cdot, e_0, e_1)$ einen **angeordneten Körper**, falls folgende Aussagen gelten:[38]

[38] vgl. hierzu auch 122.

(a) $\forall a, b \in x\ a + b = b + a$ (Kommutativgesetz der Addition).

(b) $\forall a, b, c \in x\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz der Addition).

(c) $\forall a \in x\ a + e_0 = a$ (e_0 ist neutrales Element der Addition).

(d) $\forall a \in x\, \exists b \in x\ a + b = 0$ (Existenz eines additiv inversen Elementes).

(e) $\forall a, b \in x\ a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz der Multiplikation).

(f) $\forall a, b, c \in x\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz der Multiplikation).

(g) $\forall a \in x\ a \cdot e_1 = a$ (e_1 ist neutrales Element der Multiplikation).

(h) $\forall a \in x\, \exists b \in x\ (a \neq e_0 \to a \cdot b = 1)$ (Existenz eines multiplikativ inversen Elementes).

(i) $\forall a, b, c \in x\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz).

(j) $e_0 \neq e_1$.

(k) $\mathrm{SLO}(x, <)$.

(l) $\forall a, b, c \in x\ (a < b \to a + c < b + c)$.

(m) $\forall a, b \in x\ ((0 < a \wedge 0 < b) \to 0 < a \cdot b)$.

Die oben aufgelisteten Aussagen werden manchmal auch als „Axiome der angeordneten Körper“ bezeichnet.

7.3 Die reellen Zahlen.

Es ist wohlbekannt, daß $\{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q^2 < 2\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Supremum bzw. $\{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q^2 > 2\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Infimum hat. Wir füllen derartige Lücken von $\mathbb{Q}$ und erweitern $\mathbb{Q}$ zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Hierzu machen wir uns folgende Tatsache zu Nutze: angenommen, wir haben $\mathbb{R}$ bereits konstruiert. Dann ist jede reelle Zahl r eindeutig durch zwei Mengen x_r und y_r festgelegt, wobei $x_r :\equiv \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq r\}$ $y_r :\equiv \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > r\}$ ist. Da sich x_r aus y_r berechnen läßt (es ist $x_r = \mathbb{Q} \setminus y_r$), genügt es, die „rechten Hälften“ solcher „Schnitte“ zu betrachten.

Von nun an setzen wir ZF voraus.

Wir nehmen angesichts obiger Überlegungen folgende Definition vor:[39]

7.10 Definition Seien $a, < \in V$ und es gelte $\mathrm{SLO}(a, <)$. y heißt **Dedekindscher Schnitt**[40] **in** a, falls gilt:

(i) $y \subset a,\ \ y \neq \emptyset,\ \ a \setminus y \neq \emptyset$.

(ii) $\forall u, v\, ((u \in y \wedge u < v) \to v \in y)$.

(iii) $\forall u \exists v\, (u \in y \to (v \in y \wedge v < u))$.

7.11 Bemerkung y ist also genau dann ein DEDEKINDscher Schnitt in a, wenn a durch $x :\equiv a \setminus y$ und y in zwei nichtleere Teile zerlegt ist, so daß alle Elemente von x kleiner sind als jedes Element von y und überdies y kein kleinstes Element hat.

[39] Unsere Darstellung lehnt sich an [26] an.

[40] RICHARD DEDEKIND (6.10.1831, Braunschweig–12.2.1916, Braunschweig) 1850–1852 Studium der Mathematik in Göttingen; 1852 Promotion bei CARL FRIEDRICH GAUSS(30.4.1777, Braunschweig–23.2.1855, Göttingen); danach weitere Studien in Berlin; erste Beschäftigung mit damals neuen Entwicklungen in der Algebra, die auf NIELS HENRIK ABEL (5.8.1802, Finnö (Norwegen)–6.4.1829, Froland (Norwegen)) und EVARISTE GALOIS (25.11.1811, Bourg-la-Reine–31.5.1832, Paris) zurückgehen; 1854 Habilitation in Göttingen, danach dort Privatdozent; 1858 ordentlicher Professor am Polytechnikum in Zürich; ab 1862 bis zu seiner Emeritierung 1894 ordentlicher Professor an der späteren TH Braunschweig. DEDEKINDS Hauptarbeitsgebiet sind Algebra und Zahlentheorie. 1857 hält er die erste Vorlesung über GALOIS-Theorie an einer deutschen Universität (vor zwei Hörern!). Aus einer zufällige Begegnung von DEDEKIND und CANTOR im Jahr 1872 entwickelt sich eine Freundschaft zwischen beiden Mathematikern, die trotz zeitweiliger Trübung ein Leben lang anhält. Sie findet ihren Ausdruck auch in einem intensiven Briefwechsel, in dem CANTOR DEDEKIND seine neuen Ideen mitteilt und von diesem Kritik und Anregungen erfährt.

Wir setzen

$$\mathbb{R} :\equiv \{y \mid y \text{ ist DEDEKINDscher Schnitt in } \mathbb{Q}\}.$$

Indem wir $q \in \mathbb{Q}$ den Schnitt $q_\mathbb{R} :\equiv \{s \mid s \in \mathbb{Q} \land q <_\mathbb{Q} s\}$ zuordnen, können wir $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ einbetten. Wir identifizieren insbesondere $0_\mathbb{R}$ mit 0 und $1_\mathbb{R}$ mit 1.

Wir definieren eine Relation $<_\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x <_\mathbb{R} y :\equiv (y \subset x \land x \neq y).$$

Man sieht leicht, daß $\mathrm{SLO}(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ gilt und daß diese Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit $<_\mathbb{Q}$ übereinstimmt.

Durch

$$x +_\mathbb{R} y :\equiv \{q +_\mathbb{Q} r \mid q \in x \land r \in y\}$$

definieren wir die Addition auf $\mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, daß dies wohldefiniert ist, d.h., daß $x +_\mathbb{R} y$ wieder ein DEDEKINDscher Schnitt ist. $+_\mathbb{R}$ stimmt auf $\mathbb{Q}$ mit $+_\mathbb{Q}$ überein. $+_\mathbb{R}$ ist kommutativ, assoziativ und es ist $x +_\mathbb{R} 0 = x$. Für jedes $z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x <_\mathbb{R} y$ leicht $x +_\mathbb{R} z <_\mathbb{R} y +_\mathbb{R} z$. Zu y ist

$$-y :\equiv \{-q \mid q \in \mathbb{Q} \setminus y \land q \neq \max(\mathbb{Q} \setminus y)\}$$

der additiv inverse Schnitt.[41]

Die Definition der Multiplikation bereitet mehr Probleme. Wir definieren sie zunächst für nicht-negative reelle Zahlen: für $0 \leq_\mathbb{R} x, y$ sei

$$x \cdot_\mathbb{R} y :\equiv \{q \cdot_\mathbb{Q} r \mid q \in x \land r \in y\}.$$[42]

Für $0 <_\mathbb{R} x$ ist dann

$$x^{-1} :\equiv \{q^{-1} \mid 0 <_\mathbb{R} q \land q \in \mathbb{Q} \setminus x \land q \neq \max(\mathbb{Q} \setminus x)\}$$

das multiplikativ Inverse gegeben.[43] Neutrales Element dieser Multiplikation ist $1_\mathbb{R}$. Für beliebige reelle Zahlen x, y definiert man die Multiplikation wie folgt: Man zeigt zunächst, daß jede reelle Zahl z in der Form $z = z_1 -_\mathbb{R} z_2$[44] mit $0 \leq_\mathbb{R} z_1, z_2$ geschrieben werden kann, dann setzt man

$$x \cdot_\mathbb{R} y :\equiv (x_1 \cdot_\mathbb{R} y_1) +_\mathbb{R} (x_2 \cdot_\mathbb{R} y_2) -_\mathbb{R} (x_1 \cdot_\mathbb{R} y_2) -_\mathbb{R} (x_2 \cdot_\mathbb{R} y_1).$$[45]

Man verifiziert, daß dies nicht von der speziellen Wahl von x_1, x_2, y_1 bzw. y_2 abhängt. Hieraus folgt auch, daß für $0 \leq_\mathbb{R} x, y$ diese Definition mit der bereits gegebenen übereinstimmt. Schließlich definiert man für $x <_\mathbb{R} 0$ das multiplikativ Inverse durch

$$x^{-1} :\equiv -(-x)^{-1},$$

wobei man $x <_\mathbb{R} 0 \longrightarrow 0 <_\mathbb{R} -x$ ausnutzt. $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R}, +_\mathbb{R}, \cdot_\mathbb{R}, 0, 1)$ heißt **Struktur der reellen Zahlen**. Wir zeigen ein paar bekannte Resultate über die Struktur der reellen Zahlen.

7.12 Satz *$\mathbb{Q}$ liegt* **dicht** *in $\mathbb{R}$, d.h., $\forall x, y \in \mathbb{R}\, \exists q \in \mathbb{Q}\, (x <_\mathbb{R} y \to (x <_\mathbb{R} q \land q <_\mathbb{R} y))$.*

BEWEIS. $x <_\mathbb{R} y$ bedeutet $y \subset x \land y \neq x$. Sei $q \in x \setminus y$. Man sieht leicht, daß q (bzw. der mit q identifizierte Schnitt $q_\mathbb{R}$) das Gewünschte leistet. QED

7.13 Satz (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) *$\mathbb{R}$ kann durch DEDEKINDsche Schnitte nicht weiter angereichert werden. D.h., ist Y ein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{R}$, so existiert genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus Y\ \forall y \in Y\ (x \leq_\mathbb{R} z \land z \leq_\mathbb{R} y).$$

[41] Wir bezeichnen das additiv Inverse von $q \in \mathbb{Q}$ ebenfalls mit $-q$.

[42] Beachten Sie, daß diese Menge z.B. im Fall $x <_\mathbb{R} 0$ kein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{Q}$ ist.

[43] Wir bezeichnen das multiplikativ Inverse von $q \in \mathbb{Q}$ ebenfalls mit q^{-1}.

[44] Statt $a +_\mathbb{R} (-b)$ schreiben wir wie üblich $a -_\mathbb{R} b$.

[45] Diesen Term erhält man durch „Ausmultiplizieren" von $(x_1 -_\mathbb{R} x_2) \cdot_\mathbb{R} (y_1 -_\mathbb{R} y_2)$.

BEWEIS. Sei $z :\equiv Y \cap \mathbb{Q}$. Man sieht leicht, daß z ein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{Q}$ ist, $x \leq_{\mathbb{R}} z \leq_{\mathbb{R}} y$ für $x \in \mathbb{R} \setminus Y$ und $y \in Y$ gilt und z eindeutig bestimmt ist. QED

7.14 Satz $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0, 1)$ *ist modulo Isomorphie der einzige vollständige, angeordnete Körper, in dem* $\mathbb{Q}$ *dicht liegt.*

BEWEIS. Angenommen, $(\mathbb{R}', <_{\mathbb{R}'}, +_{\mathbb{R}'}, \cdot_{\mathbb{R}'}, 0, 1)$ ist ein vollständiger, angeordneter Körper, in dem $\mathbb{Q}$ dicht liegt. Definiere $f\colon \mathbb{R}' \to \mathbb{R}$ durch $f(x) :\equiv \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge x <_{\mathbb{R}'} q\}$. Es ist leicht zu sehen, daß $f(x)$ ein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{Q}$ ist. Wir zeigen exemplarisch, daß $f(x)$ kein kleinstes Element hat: ist nämlich $q \in f(x)$ beliebig, so ist $x <_{\mathbb{R}'} q$; weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}'$ liegt, existiert dann ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x <_{\mathbb{R}'} r$ und $r <_{\mathbb{R}'} q$; also ist $r \in f(x)$ und $r <_{\mathbb{R}'} q$. Damit ist $f\colon \mathbb{R}' \to \mathbb{R}$ verifiziert.

(1) f ist injektiv.

BEWEIS. Seien $x, y \in \mathbb{R}'$ und es sei (o.E.) $x <_{\mathbb{R}'} y$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}'$ ist, existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x <_{\mathbb{R}'} q$ und $q <_{\mathbb{R}'} y$. Folglich ist $q \in f(x)$ und $q \notin f(y)$, d.h., $f(x) \neq f(y)$. qed(1)

(2) f ist surjektiv.

BEWEIS. Sei $z \in \mathbb{R}$, d.h., z ist ein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{Q}$. Sei

$$Y :\equiv \{y \mid y \in \mathbb{R}' \wedge \exists q (q \in z \wedge q <_{\mathbb{R}'} y)\}.$$

Dann ist Y ein DEDEKINDscher Schnitt in $\mathbb{R}'$. Da $\mathbb{R}'$ vollständig ist, existiert ein $z' \in \mathbb{R}'$ mit $x \leq_{\mathbb{R}'} z' \leq_{\mathbb{R}'} y$ für alle $y \in Y$ und $x \in \mathbb{R}' \setminus Y$. Es ist leicht zu sehen, daß $f(z') = z$ gilt. qed(2)

Als nächstes verifiziert man leicht, daß f ordnungstreu ist, und zeigt dann, daß f mit den arithmetischen Operationen kommutiert. f ist also wie gewünscht. QED

Damit beschließen wir unsere mengentheoretische Begründung der Zahlen. Setzen wir **ZFC** voraus, so können wir nun in unserem Mengenuniversum V die gesamte reelle und komplexe Analysis durchführen. Insbesondere sind im Prinzip alle in diesem Bereich der Mathematik zu machenden Definitionen und Aussagen als Definitionen und Aussagen über Mengen verstehbar.

8 Eine Analyse des Auswahlaxioms.

Dieses Kapitel ist einer eingehenderen Analyse von **(AC)** gewidmet.

8.1 Äquivalenzen des Auswahlaxioms.

Wir stellen zunächst einige wichtige Äquivalenzen des Auswahlaxioms zusammen und beweisen diese auf der Basis von **ZF**.

8.1 Satz (Äquivalente Charakterisierungen des Auswahlaxioms) *Unter* **ZF** *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge hat ein vollständiges Repräsentantensystem.

(iii) Jedes Produkt nicht-leerer Mengen ist nicht leer.

(iv) Zu jeder Menge gibt es eine **Auswahlfunktion**, *die aus jedem nicht-leeren Element dieser Menge ein Element auswählt:* $\forall a\, \exists f \big(f\colon a \to V \wedge \forall u\, ((u \in a \wedge u \neq \emptyset) \longrightarrow f(u) \in u)\big)$.

(v) **Wohlordnungssatz von Zermelo.** *Jede Menge läßt sich wohlordnen:* $\forall a\, \exists r\ \mathrm{WO}(a, r)$.

(vi) Jede Menge ist zu einer Ordinalzahl gleichmächtig: $\forall a\, \exists f\, \exists \alpha\, f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} a$.

(vii) **Lemma von Zorn.**[46] *Jede induktiv geordnete Menge hat ein maximales Element:*
$\forall a \forall r \big((\mathrm{PO}(a,r) \wedge \forall b \exists c((b \subset a \wedge b \text{ ist } r\text{-Kette}) \to c \text{ ist obere Schranke von } b))$
$\longrightarrow \exists c\,(c \in a \wedge c \text{ ist } r\text{-maximal})\big)$.

Beweis. Zur Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) siehe 3.20.

„(iii)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Wir können o.E. annehmen, daß $\emptyset \notin a$ gilt. Definiere $g\colon a \to V$ durch $g(u) :\equiv u$ für $u \in a$. Nach (iii) ist $\times_{u\in x}\, g(u) \neq \emptyset$. Jedes $f \in \times_{u\in x}\, g(u)$ ist von der Art, wie für (iv) benötigt.

„(iv)⇒(i)". Sei a eine Menge nicht-leerer, disjunkter Mengen. Nach (iv) existiert $f\colon a \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in a$. Da die Elemente von a disjunkt sind, ist $\mathrm{ran}(f)$ eine Menge b, die jedes Element von a in genau einem Punkt trifft.

„(iv)⇒(vi)". Sei $a \in V$ beliebig. Idee: wir wählen Elemente

$$F(0) \in a, \quad F(1) \in a \setminus \{F(0)\}, \quad F(2) \in a \setminus \{F(0), F(1)\}, \ \dots\ , \ F(\alpha) \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}, \dots$$

solange, bis wir a ganz ausgeschöpft haben und wählen für α den Zeitpunkt, an dem der Prozeß abbricht, d.h., für den $a = \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ gilt. Formal gehen wir so vor: Nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathrm{Pot}(a)$, $g\colon \mathrm{Pot}(a) \to V$ mit $g(u) \in u$ für $\emptyset \neq u \subset a$. Wir können o.E. $g(\emptyset) = a$ annehmen. Definiere rekursiv ein $F\colon \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit $F(\alpha) = g\big(a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}\big)$.

(1) $\quad \exists \alpha\, F(\alpha) = a$.

Beweis. Angenommen, $F(\alpha) \neq a$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$. Dann ist nach Definition von g $F(\alpha) \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ für alle α, d.h., $F\colon \mathrm{On} \xrightarrow{inj.} a$. Wegen $\mathrm{ran}(F) \subset a$ ist $\mathrm{ran}(F) \in V$ nach **(Aus)**, und es gilt $F^{-1}\colon \mathrm{ran}(F) \xrightarrow{surj.} \mathrm{On}$. Aus letzterem folgt $\mathrm{On} \in V$ wegen **(Ers)**. Da $\mathrm{On} \notin V$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch. qed(1)

Sei α minimal mit $F(\alpha) = a$.[47] $F \restriction \alpha$ ist dann eine Funktion $f\colon \alpha \to a$. f ist bijektiv: wegen $F(\alpha) = a$ ist

$$a \setminus \underbrace{\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}}_{=\mathrm{ran}(f)} = \emptyset,$$

also $a = \mathrm{ran}(f)$, d.h., f ist surjektiv; für $\gamma < \beta < \alpha$ ist $F(\beta) \in a \setminus \{F(\delta) \mid \delta < \beta\}$, also speziell $f(\beta) = F(\beta) \neq F(\gamma) = f(\gamma)$, d.h., f ist injektiv.

„(vi)⇒(v)". Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und $f \in V$ mit $f\colon a \xrightarrow{bij.} \alpha$. $\big\{(x,y) \bigm| x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)\big\}$ ist dann eine Wohlordnung r auf a.

„(v)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Sei r eine Wohlordnung auf $\bigcup a$. Wir definieren f derart, daß f aus jedem $u \in a$ das r-kleinste Element auswählt. Formal gehen wir dabei so vor: Da r eine Wohlordnung von $\bigcup a$ ist, ist durch

$$F :\equiv \big\{(u,y) \bigm| u \in a \wedge y \in u \wedge \forall x\,((x \in u \wedge x \neq y) \to yrx)\big\} \cup \big\{(u,\emptyset) \bigm| u \in a \wedge u = \emptyset\big\}$$

eine funktionale Klasse $F\colon a \to V$ definiert.[48] Für $u \in a$, $u \neq \emptyset$ gilt $F(u) \in u$. Wegen $\mathrm{dom}(F) \in V$ ist $F \in V$ nach 3.16, also eine Funktion wie für (iv) benötigt.

„(iv)⇒(vii)". Die Menge a sei durch r induktiv geordnet.[49] Wir wollen eine r-Kette b konstruieren, die alle ihre oberen Schranken als Elemente enthält. Ist dann $c \in a$ irgendeine obere Schranke von b (wegen der Induktivität der Ordnung existiert ein solches c), so ist c r-maximales Element von a: ist nämlich

[46] Max August Zorn (geb. 6.6.1906, Hamburg) 1930 Promotion an der Hansischen Universität Hamburg; 1933 Emigration in die USA; dort Professor für Mathematik zunächst an der Yale University in New Haven (Conn.), dann an der Indiana University in Bloomington. Zorn veröffentlicht neben Arbeiten zur Algebra und Mengenlehre auch solche zur Analysis und Funktionalanalysis. Das nach ihm benannte Lemma wurde übrigens erstmals von Kuratowski formuliert und bewiesen und erst zwanzig Jahre später von Zorn wiederentdeckt.

[47] also $\alpha :\equiv \bigcap\{\beta \mid F(\beta) = a\}$: zur Wahl von α wird **(AC)** *nicht* benötigt.

[48] Im Fall $u \in a$, $u \neq \emptyset$ ist $F(u)$ das r-kleinste Element von u.

[49] vgl. 2.40

$x \in a$ und crx, so ist x eine obere Schranke von b und nach Wahl von b gilt $x \in b$. Weil c obere Schranke von b ist, ergibt sich xrc. Insgesamt haben wir crx und xrc, was wegen der Antisymmetrie von r auf $c = x$ führt. c ist also in der Tat r-maximal in a. Zu einer r-Kette der gewünschten Art kommen wir, indem wir mit der r-Kette $\emptyset$ starten und dann in jedem Schritt der Konstruktion zu der bereits konstruierten Kette eine ihrer oberen r-Schranken hinzunehmen solange, bis dieser Prozeß terminiert, d.h., zu keiner echten Erweiterung mehr führt. Formal gehen wir so vor: nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathrm{Pot}(a)$, $g\colon \mathrm{Pot}(a) \to a \cup \{a\}$ mit $g(u) \in u$, falls $\emptyset \neq u \subset a$, und (o.E.) $g(\emptyset) = a$. Definiere rekursiv $F : \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit

$$F(\alpha) = g\big(\{z \mid z \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \wedge z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}\}\big).$$

Dieselben Argumente, die zu (1) führen, zeigen, daß es $\alpha \in \mathrm{On}$ gibt mit $F(\alpha) = a$. Wähle α minimal mit $F(\alpha) = a$. (Im Beweis von (vi) haben wir gesehen, daß dies ohne **(AC)** möglich ist.) $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ ist dann eine r-Kette b: ist nämlich $\gamma < \beta < \alpha$, so ist nach Konstruktion $F(\beta)$ eine obere r-Schranke von $\{F(\delta) \mid \delta < \beta\}$, speziell also $F(\gamma) r F(\beta)$. Aus $F(\alpha) = a$ folgt

$$\big\{z \big| z \in a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \wedge z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}\big\} = \emptyset$$

und dies impliziert, daß b alle seine oberen r-Schranken als Element enthält. b ist also wie benötigt.

„(vii)⇒(iv)“.[50] Sei $x \in V$. Sei

$$\begin{aligned} A :\equiv \ \big\{g \mid g\colon &\mathrm{dom}(g) \to V \wedge \mathrm{dom}(g) \subset x \\ &\wedge \forall u \big(u \in \mathrm{dom}(g) \to ((u \neq \emptyset \to g(u) \in u) \wedge (u = \emptyset \to g(u) = \emptyset))\big)\big\}. \end{aligned}$$

Dann ist $A \subset \mathrm{Pot}\big(x \times (\{\emptyset\} \cup \bigcup x)\big)$, also $A \in V$. A wird durch $\subset$ induktiv geordnet: ist $b \subset A$ eine $\subset$-Kette, so ist $\bigcup b \in A$ und eine obere $\subset$-Schranke von b. Nach Zorn existiert somit ein $\subset$-maximales $f \in A$. Dann ist $f\colon \mathrm{dom}(f) \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in \mathrm{dom}(f)$ mit $u \neq \emptyset$, und es gilt $\mathrm{dom}(f) \subset x$. Es bleibt $\mathrm{dom}(f) = x$ zu zeigen. Wäre $x \neq \mathrm{dom}(f)$, so gäbe es $u \in x \setminus \mathrm{dom}(f)$. Ist $u = \emptyset$ so ist $f' :\equiv f \cup \big\{(u, \emptyset)\big\}$ in A und eine echte Erweiterung von f; ist $u \neq \emptyset$, so ist $\emptyset \neq \big\{f \cup \{(u, y)\} \bigm| y \in u\big\} \subset A$ und jedes $f' \in \big\{f \cup \{(u, y)\} \bigm| y \in u\big\}$ ist eine echte Erweiterung von f in A. Dies widerspricht der $\subset$-Maximalität von f. Also gilt $x = \mathrm{dom}(f)$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

8.2 Bemerkung Punkt (vi) des Satzes erlaubt es uns, jede Menge a mit Hilfe von Ordinalzahlen zu „zählen“. Dies ist der Grundstein für die Theorie der Kardinalzahlen, die wir im nächsten Kapitel entwickeln werden. Einen ersten korrekten Beweis des Wohlordnungssatzes gab Zermelo im Jahre 1904.

Wir setzen von nun an – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, das System ZFC voraus.

8.2 Implikationen des Auswahlaxioms.

Wir stellen wir einige Folgerungen aus dem Auswahlaxiom dar.[51]

8.3 Satz *Jeder Vektorraum X über einem Körper K hat eine Basis. Mehr noch: jede linear unabhängige Menge $u \subset X$ kann zu einer Basis von X erweitert werden.*

Beweis. Sei $u \subset X$ eine linear unabhängige Menge. Die Menge

$$a :\equiv \{v \mid v \in \mathrm{Pot}(X) \wedge u \subset v \wedge v \text{ ist linear unabhängig }\}$$

wird durch $\subset$ induktiv geordnet: wenn $b \subset a$ eine $\subset$-Kette ist, so ist $c :\equiv \bigcup b$ eine obere $\subset$-Schranke von b in a. Nach dem Lemma von Zorn existiert also ein $\subset$-maximales Element e von a. Wegen $e \in a$ ist

[50] Der folgende Beweis ist typisch für den Nachweis von Existenzaussagen m.H. des Lemmas von Zorn.

[51] Weitergehende Informationen zum Auswahlaxiom findet man in [19] bzw. [33]. Einen guten Überblick gibt Jech in [20].

$u \subset e$ und e linear unabhängig. Es verbleibt zu zeigen, daß X von e erzeugt wird. Sei also $x \in X$. Ist $x \in e$, so sind wir fertig. Ist $x \notin e$, so ist $e \cup \{x\}$ wegen der Maximalität von e linear abhängig und es gibt $v_1, \ldots, v_n \in e$ und $k_0, k_1, \ldots, k_n \in K$ mit $k_0 \neq 0$, so daß $k_0 x + k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0$ gilt. Es folgt $x = \sum_{i=1}^{n} (-\frac{k_i}{k_0}) v_i$, und dies war zu zeigen.
Die Existenz einer Basis folgt mit $u :\equiv \emptyset$. QED

Da wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auffassen können, ergibt sich:

8.4 Corollar *$\mathbb{R}$ hat eine $\mathbb{Q}$-Basis. Jede solche Basis wird als* HAMEL[52]*-Basis bezeichnet.*

Das letzte Corollar besagt, daß es eine Menge $H \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

(i) Sind $x_1, \ldots x_n \in H$, und $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$, so ist $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i = 0$ nur, falls $q_1 = \cdots = q_n = 0$.

(ii) Für *jedes* $x \in \mathbb{R}$ existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in H$ und *rationale* Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$.

Die Existenz einer HAMEL-Basis hat interessante Folgerungen, von denen wir ein paar vorstellen wollen.

Es ist wohlbekannt, daß jede stetige Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichnug $f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllt, von der Form $f(x) = c \cdot x$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist. (Umgekehrt ist natürlich jede Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die von dieser Form ist, stetig und erfüllt die o.a. Funktionalgleichung.) Unter Benutzung einer HAMEL-Basis zeigen wir:

8.5 Satz *Es gibt eine unstetige Bijektion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllt. Diese ist insbesondere nicht von der Form $f(x) = c \cdot x$ ($c \in \mathbb{R}$ eine Konstante). f kann $\mathbb{Q}$-linear gewählt werden.*

BEWEIS. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt, ist $\{1, \sqrt{2}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Erweitere $\{1, \sqrt{2}\}$ zu einer HAMEL-Basis H von $\mathbb{R}$. Definiere eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = 1$ und $f(h) = h$ für $h \in H \setminus \{1, \sqrt{2}\}$. Dann ist $f: \mathbb{R} \xrightarrow{bij.} \mathbb{R}$ und f ist nicht von der Form $f(x) = c \cdot x$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. QED

Eine maßtheoretische Folgerung:

8.6 Satz *Das* LEBESGUE[53]*-Maß μ kann nicht auf ganz* $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ *fortgesetzt werden. M.a.W.: es gibt eine nicht* LEBESGUE*-meßbare Menge.*

BEWEIS. Mit Hilfe einer HAMEL-Basis konstruieren wir eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht im Definitionsbereich von μ liegen kann. Sei also H eine HAMEL-Basis von $\mathbb{R}$ und es sei $1 \in H$. Sei X der von $H \setminus \{1\}$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}$. Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $q + X :\equiv \{q + y \mid x \in X\}$.

(1) $(q + X) \cap (q' + X) = \emptyset$ für $q \neq q'$.

BEWEIS. Sei $p :\equiv q' - q$. Dann ist $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Wäre $q + x = q' + x'$ mit $x, x' \in X$, so wäre $p = x - x' \in X$, und somit $1 = p^{-1} \cdot p \in X =$ der von $H \setminus \{1\}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}$. Also ist $H = H \setminus \{1\} \cup \{1\}$ nicht linear unabhängig und somit keine Basis im Widerspruch zur Wahl von H. qed(1)

[52] GEORG HAMEL (12.9.1877, Düren–4.10.1954, Berlin) Studium in Aachen, Berlin und Göttingen; 1901 Promotion bei HILBERT, danach Assistent von CHRISTIAN FELIX KLEIN (24.4.1849, Düsseldorf–22.6.1929, Göttingen); 1903 Habilitation an der TH Karlsruhe; 1905 ordentlicher Professor in Brünn, 1912 in Aachen, 1919 an der TH Berlin, 1946 an der TU Berlin; 1946–1947 Gastprofessor in Tübingen; ab 1948 Lehrbeauftragter an der TH München. HAMEL arbeitet in den Bereichen Mechanik, Funktionentheorie und Grundlagen der Mathematik.

[53] HENRI LEBESGUE (28.6.1875, Beauvais–26.7.1941, Paris) 1894–1897 Studium an der École Normale Supérieure; 1902 Promotion; 1910 Lektor an der Sorbonne; während des Ersten Weltkrieges leitet er eine mathematische Kommission im Forschungsbeirat des Kriegsministeriums (Untersuchung ballistischer Fragen); ab 1919 Professor an der Sorbonne; ab 1921 Professor am Collège de France. LEBESGUE arbeitet vor allem in den Bereichen Analysis und Maßtheorie. Er entwickelt zu Beginn des 20. Jahrhunderts das nach ihm benannte Maß und den nach ihm benannten Integralbegriff.

(2) $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(q + X)$.

Beweis. Da H eine Hamel-Basis von $\mathbb{R}$ mit $1 \in H$ ist, kann jedes $x \in \mathbb{R}$ geschrieben werden als $x = q_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot h_i$, wobei $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ und $h_1, \dots, h_n \in H \setminus \{1\}$. Dann ist $x \in (q_0 + X)$. qed(2)

Wir nehmen nun an, $\mu(X)$ wäre definiert. Dann kann nicht $\mu(X) = 0$ sein, da sonst aus (2), (1) und der Translationsinvarianz von μ folgt

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\mu(q + X)}_{=\mu(X)=0} = 0.$$

Aber auch $\mu(X) > 0$ ist nicht möglich: Im Fall $\mu(X) > 0$ gäbe es nämlich ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $\mu(X\cap[z, z+1[) > 0$. Da

$$[z, z + 2[\supset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \big(q + (X \cap [z, z + 1[)\big)$$

gilt, folgt aus (1) und der Translationsinvarianz von μ:

$$2 = \mu([z, z + 2[) \geq \mu\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \big(q + (X \cap [z, z + 1[)\big)\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \underbrace{\mu\big(q + (X \cap [z, z + 1[)\big)}_{=\mu(X\cap[z,z+1[)>0} = \infty.$$

Die sich ergebenden Widersprüche zeigen $X \notin \mathrm{dom}(\mu)$. QED

8.7 Bemerkung (a) Die Existenz einer nicht Lebesgue-meßbaren Menge wird erstmals im Jahr 1905 von Vitali[54] bewiesen. I.a. wird bei der „Konstruktion“ dieser Menge abweichend von der hier gewählten Vorgehensweise das Auswahlaxiom in der Form: „Jede Äquivalenzrelation hat ein Repräsentantensystem“ benutzt.

(b) Für die Existenz einer nicht Lebesgue-meßbaren Menge ist die Gegenwart des Auswahlaxioms wesentlich: Es gibt Mengenuniversen V, in denen **ZF** + ¬ (**AC**) gilt, und in denen jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist.

Wir haben unser Axiomensystem nun soweit entwickelt, daß wir im Prinzip sämtliche Begriffe der „klassischen“ Mathematik (etwa aus den Bereichen Algebra, Analysis, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Topologie, Geometrie, Differentialgeometrie usw.) in V formalisieren können. Wir können außerdem in unserem Mengenuniversum V sämtliche Resultate, die wir gemeinhin unter dem Begriff „Mathematik“ subsumieren, aus den Axiomen von **ZFC** herleiten. Für viele dieser Schlüsse reicht bereits **ZF**. Gleichwohl darf die Wichtigkeit des Auswahlaxioms nicht unterschätzt werden. Um dies zu unterstreichen geben wir hier noch einige weitere Folgerungen aus **(AC)** an. So zeigt man etwa m.H. von **(AC)**, daß das topologische Produkt beliebig vieler kompakter topologischer Räume wieder kompakt ist **(Satz von Tychonoff**[55]**)**. Mehr noch, diese Aussage erweist sich (auf der Basis von **ZF**) als äquivalent zu **(AC)**. Auch das von uns bewiesene Resultat, daß **(AC)** die Existenz einer Basis für jeden Vektorraum impliziert, läßt sich umkehren: unter **ZF** ist **(AC)** äquivalent zu der Aussage, daß jeder Vektorraum eine Basis hat. In der Algebra wird die Existenz eines algebraischen Abschlusses für jeden Körper mit Hilfe des Auswahlaxioms gezeigt. In der Funktionalanalysis schließlich beweist man unter Heranziehung von

[54] Giuseppe Vitali (26.8.1875, Ravenna–29.2.1932, Bologna) Studium in Bologna und Pisa, dort Assistent von Ulisse Dini (14.11.1845, Pisa–28.10.1918, Pisa); 1899 Promotion und 1900 Habilitation in Pisa; 1904–1923 aus finanziellen Gründen Arbeit als Lehrer in Genua; 1923 Professor in Modena, 1924 in Padua und ab 1930 in Bologna. Vitali arbeitet in den Bereichen Analysis (hier Einführung des Begriffes der *absolut stetigen Funktion*), Maßtheorie und Funktionalanalysis.

[55] Andrej Nikolajewitsch Tychonoff (geb. 30.10.1906, Gshatsk (bei Gagarin, Gebiet Smolensk)) bis 1927 Studium an der Universität Moskau; dort seit 1936 Professor; ab 1953 Mitwirkung am Institut für Angewandte Mathematik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, 1978 dessen Direktor. Tychonoff (auch: Tichonow) arbeitet in den Bereichen Topologie, Analysis, aber auch numerische Mathematik sowie mathematische Physik und Geophysik. Der Beweis des nach ihm benannten Satzes gelingt Tychonoff im Jahr 1930.

(AC) den wichtigen **Fortsetzungssatz von Hahn**[56]**-Banach**[57]: jedes auf einem Unterraum U eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes X definierte lineare Funktional $g: U \to \mathbb{K}$, das von einer Halbnorm $p: X \to \mathbb{R}$ dominiert wird (d.h., $|g(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in U$), läßt sich zu einem auf ganz X definierten linearen Funktional f fortsetzen, so daß f auf X von p dominiert wird. (Hierbei ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.)

Auf der anderen Seite hat **(AC)** auch sehr unanschauliche Folgerungen, was ebenfalls zur Skepsis gegenüber diesem Axiom beigetragen hat. Wir erwähnen das folgende, der Anschauung anscheinend völlig widersprechende Resultat: Unter Verwendung des Auswahlaxioms ist es möglich, eine (Voll-)Kugel so in endlich viele Teile zu zerlegen, daß diese Teile zu *zwei* Kugeln zusammengesetzt werden können, von denen *jede* zur ursprünglichen Kugel kongruent („deckungsgleich") ist. Diese Zerlegung ist als Banach-Tarski[58]-Zerlegung bekannt.

Werfen wir noch kurz einen Blick auf Mengenuniversen, in denen $\mathbf{ZF} + \neg\,(\mathbf{AC})$ gilt. Wir haben bereits erwähnt, daß es derartige Universen gibt, in denen jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist. Des weiteren lassen sich Universen konstruieren, in denen $\mathbf{ZF} + \neg\,(\mathbf{AC})$ gilt und es Vektorräume gibt, die keine Basis haben, bzw. Vektorräume, die zwei Basen *unterschiedlicher* Größe haben, bzw. Körper, die keinen algebraischen Abschluß haben. Dies zeigt, daß auch $\neg\,(\mathbf{AC})$ auf Resultate führt, die mit unserer mathematischen Intuition unvereinbar sind.

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, „Maßzahlen" für die „Größen" von Mengen vernünftig zu definieren. Die Tatsache, daß unter **(AC)** jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann, wird dabei von fundamentaler Bedeutung sein.

9 Kardinalzahlen.

9.1 Größenvergleiche bei Mengen.

Wann haben zwei Mengen x und y gleich viele Elemente? Eine vernünftige, erstmals von Cantor (1878)[59] gegebene Antwort auf diese Frage ist: x und y haben gleich viele Elemente, wenn man den Elementen von x *umkehrbar eindeutig* die Elemente von y zuordnen kann. Eine Menge x hat „höchstens soviele Elemente" wie eine Menge y, wenn man jedem Element von x ein Element von y derart zuordnen kann, daß je zwei verschiedenen Elementen von x auch verschiedene Elemente von y zugewiesen werden. Wir definieren deshalb:

9.1 Definition (a) x und y sind **gleichmächtig** $:\equiv x \sim y :\equiv \exists f\, f: x \xrightarrow{bij.} y$.

(b) x **hat höchstens die Mächtigkeit von** $y :\equiv x \preceq y :\equiv \exists f\, f: x \xrightarrow{inj.} y$.

Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften von $\sim$ und $\preceq$:

9.2 Lemma *Unter* **ZF** *gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* V*.*

(b) $\forall x, y\, \big(x \sim y \to (x \preceq y \wedge y \preceq x)\big)$.

[56]Hans Hahn (27.9.1879, Wien–24.7.1934, Wien) Studium in Wien, Straßburg, München und Göttingen; 1905 Habilitation in Wien; 1909 Professor in Czernowitz, 1916 in Bonn, ab 1921 in Wien. Hauptarbeitsgebiet von Hans Hahn ist die lineare Funktionalanalysis, zu der er grundlegende Beiträge leistet. Der im Haupttext angesprochene Satz wird von Hahn 1927 bewiesen und ist damit eines der ersten Beispiele für die Bedeutung des Auswahlaxioms für die moderne Analysis.

[57]Stefan Banach (30.3.1892, Kraków–31.8.1945, Lwów) 1910–1914 Ingenieursstudium in Lwów (ohne Abschluß); 1920 Promotion in Lwów; hier ab 1922 Professor; Mitglied der Polnischen Akademie der Wissenschaften. Banachs Hauptarbeitsgebiet ist die Funktionalanalysis. Hier gehen fundamentale Resultate und Begriffsbildungen auf ihn zurück. Der im Haupttext genannte Satz wird von Banach 1929 (unabhängig von Hahn) bewiesen.

[58]Alfred Tarski (14.1.1902, Warschau–26.10.1983, Berkeley, Ca.) Studium der Mathematik und Philosophie an der Universität Warschau; 1924 Promotion; 1925 Habilitation, anschließend Dozent für Philosophie der Mathematik an der Universität Warschau; 1939 Emigration in die USA; seit 1942 an der California University in Berkeley, ab 1946 als ordentlicher Professor für Mathematik. Tarski arbeitet auf den Gebieten Mengenlehre und formale Logik, später vor allem auch auf dem Gebiet der Modelltheorie.

[59]siehe [3], p.119

(c) $\preceq$ *ist reflexiv:* $\forall x\, x \preceq x$.
(d) $\preceq$ *ist transitiv:* $\forall x, y, z \big((x \preceq y \wedge y \preceq z) \rightarrow x \preceq z\big)$.
(e) $\forall x, y\, (x \subset y \rightarrow x \preceq y)$.

Wir erwarten intuitiv, daß auch die Umkehrung von (b) gilt. Cantor äußert eine dementsprechende Vermutung, Felix Bernstein[60] (noch Gymnasiast zu dieser Zeit) trägt 1897 einen Beweis dieser Vermutung in Cantors Seminar in Halle vor. Etwa gleichzeitig unternimmt Ernst Schröder[61] einen Beweisversuch, der jedoch Fehler aufweist.

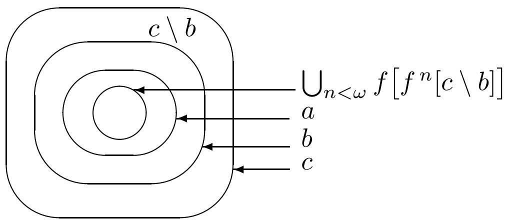
9.3 Satz (Satz von Cantor-Bernstein) *Unter* **ZF** *gilt* $\forall x, y \big((x \preceq y \wedge y \preceq x) \longrightarrow x \sim y\big)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen:

(1) $\forall a, b, c \big((a \subset b \wedge b \subset c \wedge a \sim c) \longrightarrow b \sim c\big)$.

Sind dann nämlich $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$ und $g\colon y \xrightarrow{inj.} x$, so gilt $g \circ f[x] \subset g[y] \subset x$ und $x \sim g \circ f[x]$, was wegen (1) auf $x \sim g[y]$ führt. Da g injektiv ist, ist $g\colon y \xrightarrow{bij.} g[y]$, also $y \sim g[y]$. Aus $x \sim g[y]$ und $y \sim g[y]$ folgt $x \sim y$.
Beweis von (1). Sei $f\colon c \xrightarrow{bij.} a$ und d sei der Abschluß von $c \setminus b$ unter f: $d = \bigcup_{n<\omega} f^{\,n}[c \setminus b]$, wobei die Funktionenfolge $\big(f^{\,n} \bigm| n < \omega\big)$ rekursiv definiert ist durch $f^0 :\equiv \mathrm{id} \restriction c$, $f^{\,n+1} :\equiv f \circ f^{\,n}$. Wegen $\mathrm{ran}(f) \subset a$ gilt

$$(*) \qquad d = (c \setminus b) + \underbrace{\bigcup_{n<\omega} f\big[f^{\,n}[c \setminus b]\big]}_{\subset a \subset b}.^{62}$$



Definiere g durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in d \\ u, & \text{falls } u \in c \setminus d. \end{cases}$$

Wir zeigen $g\colon c \xrightarrow{bij.} b$, was (1) beweist. Aus $(*)$ folgt zunächst $g\colon c \rightarrow b$. g ist injektiv, da $g \restriction d$ und $g \restriction c \setminus d$ injektive Funktionen mit disjunktem Wertebereich sind. g ist surjektiv. Um dies zu sehen, fixiere $v \in b$. Ist $v \in b \setminus d \subset c \setminus d$ so ist $v = g(v)$; ist $v \in b \cap d$, so existiert ein $u \in c \setminus b$ mit

$$v = f^{\,n+1}(u) = f\big(\underbrace{f^{\,n}(u)}_{\equiv:\, u' \in d}\big).$$

[60] Felix Bernstein (24.2.1878, Halle–3.12.1956, Zürich) ab 1896 Studium der Philosophie, Archäologie und Kunstgeschichte in Pisa und Rom sowie der Mathematik in München, Halle, Berlin und Göttingen; 1901 Promotion in Göttingen bei Hilbert und Felix Klein; 1903 Habilitation in Halle; 1903–1907 Privatdozent; 1907 Leiter der mathematischen Klasse des ersten deutschen Seminars für Versicherungsmathematik in Göttingen; 1911 außerordentlicher Professor für Statistik in Göttingen; 1918 Direktor des von ihm gegründeten Instituts für mathematische Statistik; 1921 ordentlicher Professor für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik an der Universität Göttingen; 1933 Visiting Professor an der Columbia-Universität New York; 1936 Ordinarius für Biometrie. Bernstein nimmt schon als Gymnasiast in Halle am Seminar Cantors teil, siehe Haupttext. Nach seiner Dissertation verlegt Bernstein sein Arbeitsgebiet von der Mengenlehre hin zur praktischen Mathematik. Er untersucht auch außermathematische Fragen: im Jahre 1924 entdeckt er den Vererbungsmechanismus der Blutgruppen A, B und 0.

[61] Ernst Schröder (25.11.1841, Mannheim–16.6.1902, Karlsruhe) Studium der Mathematik und der Physik in Heidelberg, u.a. bei Ludwig Otto Hesse (22.4.1811, Königsberg–4.8.1874, München), Gustav Robert Kirchhoff (12.3.1824, Königsberg–17.10.1887, Berlin) und Karl Freiherr von Bunsen (25.8.1791, Korbach–28.11.1860, Bonn); 1862 Promotion, dann weitere Studien in Königsberg bis 1864; Habilitation in Zürich, danach als Lehrer in Pforzheim und Baden-Baden; ab 1876 ordentlicher Professor für Arithmetik, Trigonometrie und höhere Analysis an der TH Karlsruhe. Während seiner Zeit als Lehrer beschäftigt sich Bernstein hauptsächlich mit arithmetischen, analytischen und algebraischen Fragestellungen; in seine Professorenzeit fallen dann umfangreiche Untersuchungen zur algebraischen Logik.

[62] $+$ bezeichnet die Vereinigung disjunkter Mengen.

Also ist $v = g(u')$. In beiden Fällen gilt somit $v \in \operatorname{ran}(g)$, d.h., g ist surjektiv. Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Dies vervollständigt den Beweis des Satzes von CANTOR-BERNSTEIN. QED

9.2 Messung von Mächtigkeiten.

Die Familie der $\sim$-Äquivalenzklassen ist ein natürlicher Parameter für Größenunterscheidungen bei Mengen. Allerdings sind die $\sim$-Äquivalenzklassen i.a. echte Klassen.[63] Dieses Problem wäre gelöst, wenn wir aus jeder $\sim$-Äquivalenzklasse ein „ausgezeichnetes" Objekt als Repräsentanten dieser Klasse auswählen könnten. Ein zweites Problem tritt auf, wenn wir versuchen, Größen von Mengen zu vergleichen. Wir wollen, daß die Größen von je zwei Mengen vergleichbar sind, daß also für Mengen x und y stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt. Dies ist, wenn wir nur **ZF** voraussetzen, i.a. nicht der Fall. Die Hinzunahme des Auswahlaxiomes löst unsere Probleme jedoch mit einem Schlag. Da nämlich in **ZFC** nach 8.1 jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann, haben wir einerseits einen kanonischen Repräsentanten für jede $\sim$-Äquivalenzklasse $[x]_\sim$, nämlich die kleinste Ordinalzahl, die zu $[x]_\sim$ gehört, und können andererseits je zwei Mengen größenmäßig vergleichen, indem wir die den entsprechenden $\sim$-Äquivalenzklassen zugeordneten Ordinalzahlrepräsentanten vergleichen.[64] **Wir setzen deshalb von nun an ZFC voraus.** Im Lichte der eben gemachten Überlegungen definieren wir:

9.4 Definition $\overline{\overline{x}} :\equiv \operatorname{card}(x) :\equiv \min([x]_\sim \cap \mathrm{On}) = \min\{\alpha \mid x \sim \alpha\}$ heißt die **Kardinalität** oder auch **Mächtigkeit** von x.

9.5 Definition α ist eine **Kardinalzahl** $:\equiv \exists x \overline{\overline{x}} = \alpha$. $\mathrm{Cd} :\equiv \{\alpha \mid \alpha \text{ ist eine Kardinalzahl}\}$ ist die **Klasse der Kardinalzahlen**, $\mathrm{Card} :\equiv \{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Cd} \wedge \alpha \geq \omega\}$ ist die **Klasse der unendlichen Kardinalzahlen**.

(Unendliche) Kardinalzahlen bezeichnen wir i.a. mit den Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Kardinalzahlen sind gerade diejenigen Ordinalzahlen, die nicht auf eine kleinere Ordinalzahl bijektiv abgebildet werden können. (Solche Ordinalzahlen werden manchmal als „initiale Ordinalzahlen" bezeichnet.) Dieses und weitere fundamentale Resultate über Kardinalzahlen sind in folgendem Lemma zusammengestellt.

9.6 Lemma *(a)* $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \forall \beta < \alpha \neg \beta \sim \alpha$.

(b) $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \alpha = \overline{\overline{\alpha}}$.

(c) $\alpha \in \mathrm{Card} \longrightarrow \mathrm{Lim}(\alpha)$.

BEWEIS. zu (a). „$\Rightarrow$". Sei $\alpha = \overline{\overline{x}}$. Gäbe es $\beta < \alpha$ mit $\beta \sim \alpha$, so wäre $\beta \sim x$ im Widerspruch zu $\alpha = \min\{\gamma \mid x \sim \gamma\}$.
„$\Leftarrow$". Es ist $\alpha = \min\{\beta \mid \alpha \sim \beta\}$.
zu (b). Dies folgt leicht aus (a).
zu (c). Wäre $\alpha = \beta + 1$, so wäre durch

$$f(\gamma) :\equiv \begin{cases} \gamma + 1, & \text{falls } \gamma \in \omega \\ \gamma, & \text{falls } \omega \leq \gamma < \beta \\ 0, & \text{falls } \gamma = \beta \end{cases}$$

[63] z.B. $[1]_\sim \supset \left\{\{V_\alpha\} \,\middle|\, \alpha \in \mathrm{On}\right\} \notin V$.

[64] Um auch in **ZF** den Begriff der Kardinalzahl zu definieren, „verkleinert" man die $\sim$-Äquivalenz*klassen* zu Äquivalenz*mengen*, indem man mit $\alpha(x) :\equiv \min\{\alpha \mid [x]_\sim \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ von $[x]_\sim$ übergeht zu $[x]_\sim \cap V_{\alpha(x)}$. Dieses Verfahren wird manchmal „SCOTTs Trick" genannt und oft angewendet, um echte Klassen in Mengen zu transformieren. Die hier angegebene Definition geht zurück auf DANA STEWART SCOTT (geb. 11.10.1932, Berkeley, Ca.) (1955), vgl. etwa die Einleitung zu [10] (p.8). Natürlich hat dieser Kardinalzahlbegriff weitaus weniger angenehme Eigenschaften als der in **ZFC** zur Verfügung stehende.

eine Bijektion $f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} \beta$ gegeben. Dies widerspricht (a).

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Die Aussagen des nächsten Lemmas setzen die Kardinalitäten von zwei Mengen in Verbindung mit der Existenz von Abbildungen zwischen diesen Mengen.

9.7 Lemma *Seien $x, y \in V$. Dann gilt:*

(a) $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \longleftrightarrow x \sim y$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(i) $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.

(ii) $\exists f\ f\colon x \xrightarrow{inj.} y$, *d.h.,* $x \preceq y$.

(iii) $\exists f\ f\colon y \xrightarrow{surj.} x$.

Beweis. zu (a). „⇒". Es gilt $x \sim \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \sim y$, also $x \sim y$ wegen der Transitivität von $\sim$.

„⇐". $x \sim y$ ist gleichwertig mit $[x]_\sim = [y]_\sim$, und dies impliziert $\overline{\overline{x}} = \min([x]_\sim \cap \mathrm{On}) = \min([y]_\sim \cap \mathrm{On}) = \overline{\overline{y}}$.

zu (b). „(i)⇒(ii)". Sei $g\colon x \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{x}}$ und $h\colon \overline{\overline{y}} \xrightarrow{bij.} y$. Setze $f :\equiv h \circ g$. Dann ist $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$.

„(ii)⇒(iii)". Sei $g\colon x \xrightarrow{inj.} y$. Ist $x = \emptyset$, so ist $\emptyset\colon y \xrightarrow{surj.} x$. Sei also $x \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Setze $a :\equiv \mathrm{ran}(g)$. Dann ist $g^{-1}\colon a \xrightarrow{bij.} x$, so daß im Fall $a = y$ $f :\equiv g^{-1}$ das Gewünschte leistet. Im Fall $a \neq y$ wähle mit **(AC)** ein $v_0 \in x$ und setze

$$f(u) :\equiv \begin{cases} g^{-1}(u), & \text{falls } u \in a \\ v_0, & \text{falls } u \in y \setminus a. \end{cases}$$

Dann gilt $f\colon y \xrightarrow{surj.} x$.

„(iii)⇒(ii)". Sei $g\colon y \xrightarrow{surj.} x$. Wir definieren f so, daß f jedem $u \in x$ ein Urbild von u unter g zuordnet. (Ein solches existiert, da $\mathrm{ran}(g) = x$ ist.) Formal geschieht das wie folgt: $a :\equiv \{g^{-1}[\{u\}] \mid u \in x\}$ ist eine Menge paarweise disjunkter Mengen, die wegen der Surjektivität von g sämtlich nicht leer sind. Sei h eine Auswahlfunktion für a. D.h., es ist $h\colon a \to y$ mit $h(z) \in z$ für alle $z \in a$. Definiere $f\colon x \to y$ durch $f(u) :\equiv h(g^{-1}[\{u\}])$. Man sieht leicht, daß f injektiv ist.

„(ii)⇒(i)". Sei $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$. Sei $g\colon y \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{y}}$. Dann ist $h :\equiv g \circ f\colon x \xrightarrow{inj.} \overline{\overline{y}}$. Sei $\beta :\equiv \mathrm{otp}(\mathrm{ran}(h))$; $\pi\colon \mathrm{ran}(h) \xrightarrow{bij.} \beta$ sei der Mostowski-Isomorphismus. Wegen $\mathrm{ran}(h) \subset \overline{\overline{y}}$ ist $\beta \leq \overline{\overline{y}}$, siehe 6.13. $h' :\equiv \pi \circ h$ ist eine Bijektion von x auf β:

$$x \overset{g\circ f = h}{\longleftrightarrow} \mathrm{ran}(h) \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \beta.$$

Nach Definition von $\overline{\overline{x}}$ muß dann $\overline{\overline{x}} \leq \beta$ sein. Da, wie gesehen, $\beta \leq \overline{\overline{y}}$ ist, folgt insgesamt folgt $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

9.8 Corollar $\alpha < \beta \longrightarrow \overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$.

Die Klasse der Kardinalzahlen ist unter der Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen:

9.9 Lemma *(a)* $x \subset \mathrm{Cd} \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Cd}$.

(b) $x \subset \mathrm{Card} \wedge x \neq \emptyset \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen zunächst, daß $\bigcup x$ eine Ordinalzahl ist. Da $\bigcup x \in V$ gilt und die einzigen transitiven Teilmengen von On die Ordinalzahlen sind, siehe 4.9, genügt es zu zeigen, daß $\bigcup x$ transitiv ist. Hierzu fixiere $u \in v \in \bigcup x$. Dann existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in x$ mit $u \in v \in \alpha$. Da α transitiv ist,

folgt $u \in \alpha$ und somit $u \in \bigcup x$. Also ist $\bigcup x$ eine Ordinalzahl λ. Wir zeigen $\lambda \in \mathrm{Cd}$, indem wir $\lambda = \overline{\overline{\lambda}}$ nachweisen.
zu $\geq$. Dies ist klar.
zu $\leq$. Sei $\alpha < \lambda$. Nach Definition von λ existiert dann eine Kardinalzahl $\kappa \in x$ mit $\alpha < \kappa$. Wegen $\kappa \in x$ ist $\kappa \leq \lambda$. Also ergibt sich $\alpha < \kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$.
zu (b). Nach (a) ist $\bigcup x \in \mathrm{Cd}$. Wegen $x \neq \emptyset$ existiert $\kappa \in x$. Dann gilt $\kappa \geq \omega$ (wegen $x \subset \mathrm{Card}$) und $\kappa \leq \bigcup \mathrm{Card}$. Also ist $\omega \leq \bigcup \mathrm{Card}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir können nun bereits gewisse Ordinalzahlen als Kardinalzahlen identifizieren:

9.10 Satz *(a)* $\omega \subset \mathrm{Cd}$.
(b) $\omega \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen durch Induktion nach $n < \omega$:

(1) $\forall m < n \neg m \sim n.$

$n = 0$. Dies ist klar.
$n = l + 1$. Angenommen es wäre $f\colon m \xrightarrow{bij.} n$ für ein $m < n$. Wegen $n \neq 0$ ist $m \neq 0$, d.h., es existiert ein $k < \omega$ mit $m = k + 1$. Es ist $k < l < n$ wegen $m < n = l + 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $f(k) = l$. In diesem Fall ist $f \restriction k\colon k \xrightarrow{bij.} l$, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.
Fall 2. $f(i_0) = l$ für ein $i_0 < k$. Durch

$$g(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } i < k,\ i \neq i_0 \\ f(k), & \text{falls } i = i_0 \end{cases}$$

ist dann eine Bijektion $g\colon k \xrightarrow{bij.} l$ gegeben, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.
Somit ist (1) und damit auch (a) bewiesen.
zu (b). Weil $\omega \subset \mathrm{Cd}$ und Cd unter Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen ist, folgt (b) aus

(2) $\bigcup \omega = \omega.$

Beweis. „$\subset$“. Sei $u \in \bigcup \omega$. Dann ist $u \in n$ für ein $n \in \omega$. Da ω transitiv ist, folgt hieraus $u \in \omega$.
„$\supset$“. Ist $n \in \omega$, so ist $n \in n + 1 \in \omega$ und deshalb $n \in \bigcup \omega$. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

9.3 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen.

Wir nennen eine Menge a endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß a genau n Elemente enthält; a ist abzählbar, wenn a gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, und überabzählbar, wenn a weder endlich noch abzählbar ist.

9.11 Definition Sei $a \in V$.
(a) a ist **endlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} < \omega$.
(b) a ist **unendlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} \geq \omega$.
(c) a ist **abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} = \omega$.
(d) a ist **höchstens abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} \leq \omega$.
(e) a ist **überabzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} > \omega$.

9.12 Lemma *Seien a und b endliche Mengen und es sei $x \in V$. Dann gilt:*

(a) $a \cup \{x\}$, $a \cup b$, $a \cap b$, $a \times b$, $a \setminus b$ *und* $\mathrm{Pot}(a)$ *sind endlich. Es ist* $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(a)}} = 2^{\overline{\overline{a}}}$.

(b) Wenn gilt $\forall z(z \in a \to z$ *ist endlich), so sind* $\bigcup a$ *und* $\times_{z \in a} z$ *endlich.*

(c) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis. zu (a). Ist $x \in a$, so ist $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} = \overline{\overline{a}} < \omega$. Ist $x \notin a$ und $f \colon a \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{a}}$, so ist durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in a \\ \overline{\overline{a}}, & \text{falls } u = x \end{cases}$$

eine Bijektion zwischen $a \cup \{x\}$ und $\overline{\overline{a}} + 1$ gegeben; hieraus folgt $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} \leq \overline{\overline{a}} + 1 < \omega$.

Die Endlichkeit von $a \cup b$ wird durch Induktion nach $\overline{\overline{b}} < \omega$ bewiesen: ist $\overline{\overline{b}} = 0$, so ist $b = \emptyset$ und $a \cup b = a$ ist endlich. Ist $\overline{\overline{b}} > 0$, so wähle $x_0 \in b$. Dann ist $\overline{\overline{b \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{b}}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a \cup (b \setminus \{x_0\})$ endlich, so daß nach dem bereits bewiesenen $a \cup b = (a \cup (b \setminus \{x_0\})) \cup \{x_0\}$ endlich ist.

Die Endlichkeit von $a \times b$ wird unter Benutzung des bereits gezeigten ebenfalls durch Induktion nach $\overline{\overline{b}}$ bewiesen. Beachte $a \times \emptyset = \emptyset$ und $a \times b = (a \times (b \setminus \{x_0\})) \cup (a \times \{x_0\})$, falls $x_0 \in b$.

Die Aussagen über die Endlichkeit der Komplementmenge und der Schnittmenge folgen aus (c).

Um die Aussage über die Kardinalität der Potenzmenge zu zeigen, genügt es, durch Induktion nach $n < \omega$ zu verifizieren:

(1) $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(n)}} = 2^n$.

Dies ist richtig für $n = 0$ ($\mathrm{Pot}(0) = \{\emptyset\}$). Im Fall $n = k + 1 > 0$ ist $\mathrm{Pot}(n) = \mathrm{Pot}(k) \cup \{u \cup \{k\} \mid u \in \mathrm{Pot}(k)\}$, und man sieht leicht, daß die Menge auf der rechten Seite des $=$-Zeichens die Kardinalität $2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^n$ hat.

zu (b). Durch Induktion über $\overline{\overline{a}}$ folgt die Endlichkeit von $\bigcup a$: Ist $\overline{\overline{a}} = 0$, so ist $a = \bigcup a = \emptyset$. Ist $\overline{\overline{a}} > 0$, so sei $x_0 \in a$. Es ist $\overline{\overline{a \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{a}}$ und $\bigcup a = \bigcup(a \setminus \{x_0\}) \cup x_0$ ist wegen der Induktionsvoraussetzung eine Vereinigung von zwei endlichen Mengen, also nach (a) endlich.

Die Aussage über $\times_{z \in a} z$ folgt wegen

$$\underset{z \in a}{\times} z = \left\{ f \mid f \colon a \to \bigcup a \wedge \forall z(z \in a \to f(z) \in z) \right\} \subset \mathrm{Pot}(a \times \bigcup a)$$

aus dem bereits bewiesenen und (c).

zu (c). Sei $u \subset a$. Durch die Inklusion ist dann eine injektive Funktion $u \xrightarrow{inj.} a$ gegeben. Also ist $\overline{\overline{u}} \leq \overline{\overline{a}} < \omega$. Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir charakterisieren die Endlichkeit einer Menge a durch Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Injektivität und der Surjektivität von Abbildungen $a \to a$. Wir beginnen mit dem Nachweis notwendiger Bedingungen:

9.13 Satz *Es gelte* **ZF**. *Sei* $a \in V$ *endlich. Dann gilt:*

(a) $\forall f\, (f \colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f \colon a \xrightarrow{surj.} a)$. *In Worten: jede Injektion von a in a ist surjektiv.*

(b) $\forall f (f \colon a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f \colon a \xrightarrow{inj.} a)$. *In Worten: jede Surjektion von a auf a ist injektiv.*

Beweis. zu (a). O.E. Sei $a = n < \omega$. Wir beweisen (a) durch Induktion nach n.

$n = 0$. In diesem Fall ist $f = \emptyset \colon \emptyset \to \emptyset$; also ist f surjektiv.

$n = k + 1$. Angenommen, f ist nicht surjektiv. Wir können dann o.E. annehmen, daß $k \notin \mathrm{ran}(f)$ ist. (Ansonsten wähle $k_0 \in n \setminus \mathrm{ran}(f)$ und gehe über von f zu f', das wie folgt definiert ist:

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \neq k \\ k_0, & \text{falls } f(i) = k. \end{cases}$$

Dann gilt $f'\colon n \xrightarrow{inj.} n$ und es ist $k \notin \mathrm{ran}(f')$.) Nun ist $f \restriction k\colon k \xrightarrow{inj.} k$, also nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{ran}(f \restriction k) = k$. Wegen $k \notin \mathrm{ran}(f)$ ist $f(k) < k$, also $f(k) \in \mathrm{ran}(f \restriction k)$. Somit existiert ein $l < k$ mit $f(k) = f(l)$. Dies widerspricht der Injektivität von f. Also muß f doch surjektiv sein.

zu (b). Wir nehmen wieder o.E. $a = n \in \omega$ an und beweisen (b) durch Induktion nach n.
$n = 0$. Dann ist $f = \emptyset$ und injektiv.
$n = 1$. Die einzige Abbildung von $1 = \{0\}$ auf 1 ist die Identität; diese ist injektiv und surjektiv.
$n = k + 1$ mit $k \geq 1$. Angenommen, f ist nicht injektiv. Wir modifizieren f wie folgt: definiere $f'\colon n \to n$ durch

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \notin \{f(k), k\} \\ f(k), & \text{falls } f(i) = k \\ k, & \text{falls } f(i) = f(k). \end{cases}$$

Dann ist $f'(k) = k$, und mit f ist auch f' nicht injektiv. Ist $f'(l) \neq k$ für $l < k$, so ist $f' \restriction k\colon k \xrightarrow{surj.} k$ und nicht injektiv. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung. Ist $f'(l) = k$ für ein $l < k$, so fixieren wir solches l und führen die folgende Modifikation durch: definiere $f''\colon n \to n$ durch

$$f''(i) :\equiv \begin{cases} f'(i), & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) \neq k \\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) = k \\ f'(k), & \text{falls } i = k. \end{cases}$$

Dann ist f'' surjektiv, $f''(i) < k$ für $i < k$, $f''(l) = 0$ und $f''(k) = k$. $f'' \restriction k$ ist nicht injektiv: um dies zu sehen wähle $i_0 < n$ mit $f'(i_0) = 0$. Dann ist $i_0 < k$ und $i_0 \neq l$ wegen $f'(l) = f'(k) = k > 0$. Aus der Definition von f'' folgt $f''(i_0) = 0$. Andererseits ist auch $f''(l) = 0$, also $f'' \restriction k$ nicht injektiv. Aus dem bisher über f'' gesagten folgt aber $f'' \restriction k\colon k \xrightarrow{surj.} k$. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Unter **ZFC** können wir auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen:

9.14 Satz *Sei $a \in V$ unendlich. Dann gilt:*
(a) $\exists f\, f\colon \omega \xrightarrow{inj.} a$.
(b) $\exists f\, (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.
(c) $\exists f\, (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

Beweis. zu (a). Die Unendlichkeit von a impliziert $\overline{\overline{\omega}} \leq \overline{\overline{a}}$ und dieses zieht $\omega \preceq a$ nach sich. Dies wird gerade in (a) behauptet.
zu (b), (c) Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{a}}$. Wir können o.E. $a = \kappa$ annehmen. Wegen $\kappa \geq \omega$ ist durch

$$(\alpha) :\equiv \begin{cases} \alpha + 1, & \text{falls } \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Injektion von a auf a gegeben, die nicht surjektiv ist und durch

$$g(\alpha) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = 1 \\ \alpha - 1, & \text{falls } 1 < \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Surjektion von a auf a gegeben, die nicht injektiv ist.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Insgesamt haben wir also unter **ZFC** das folgende Resultat:

9.15 Satz *Sei $a \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) a *ist endlich.*

(ii) $\forall f(f\colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.

(iii) $\forall f(f\colon a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

9.16 Bemerkung Dieser Satz ermöglicht es, den Begriff der endlichen Menge ohne Bezug auf Kardinalzahlen zu definieren. Eine derartige Definition des Endlichkeitsbegriffes stammt von Dedekind (1888): man nennt eine Menge a **Dedekind-endlich**, wenn jede Injektion $f\colon a \to a$ auch surjektiv ist, d.h., wenn (ii) des obigen Satzes gilt. Wir haben bewiesen, daß der Dedekindsche Endlichkeitsbegriff zu dem von uns gewählten äquivalent ist. Hierbei sind wir nicht ohne das Auswahlaxiom ausgekommen. In der Tat kann man zeigen, diese Äquivalenz auf der Basis **ZF** (also ohne Auswahlaxiom) *nicht* beweisbar ist.

Das folgende Resultat widerspricht unserer an endliche Objekte angepaßten Erfahrung, da es aussagt, daß im Bereich der unendlichen Mengen ein echter Teil eines Ganzen gleich groß sein kann wie das Ganze selbst.

9.17 Corollar *a ist unendlich* $\longleftrightarrow \exists u\,(u \subset a \wedge u \neq a \wedge u \sim a)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“. Sei $f\colon a \to a$ eine Injektion, die nicht surjektiv ist. Setze $u :\equiv f[a]$. Dann ist $u \subset a$ und $u \neq a$. Ferner ist $a \sim u$ wegen $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$.
„$\Leftarrow$“. Eine Bijektion $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$ kann als Injektion $f\colon a \xrightarrow{inj.} a$ aufgefaßt werden. Wegen $u \neq a$ ist f nicht surjektiv. QED

9.4 Die Klasse Card der Kardinalzahlen.

Bis jetzt wissen wir wenig über die Klassen Cd und Card. In der Tat haben wir bisher keine Aussage darüber, ob Card neben ω überhaupt noch irgendeine andere Ordinalzahl enthält. Daß dies der Fall ist, wird sich aus folgendem Satz ergeben, der die für endliche Mengen gezeigte Eigenschaft, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge a nicht gleichmächtig zur Menge a selbst ist, auf unendliche Mengen verallgemeinert.

9.18 Satz (Satz von Cantor) $\forall x\, x \not\sim \mathrm{Pot}(x)$.

Beweis. Angenommen, es ist $x \sim \mathrm{Pot}(x)$. Dann existiert $f\colon x \xrightarrow{bij.} \mathrm{Pot}(x)$. Sei

$$u :\equiv \{y \mid y \in x \wedge y \notin f(y)\}.$$

Wegen $u \in \mathrm{Pot}(x)$ ist $u = f(y)$ für ein $y \in x$. $y \in f(y)$ ist gleichwertig mit $y \in u$ und dies ist äquivalent zu $y \notin f(y)$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $x \sim \mathrm{Pot}(x)$ nicht gelten kann. QED

9.19 Bemerkung Das im Satz von Cantor angewendete Beweisverfahren ist eine Version des Cantorschen Diagonalverfahrens, das Cantor im Jahre 1891 in einem Vortrag mit dem Titel „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“ vorstellte, siehe auch [3], pp. 278–281. Um das *Diagonalargument* dieses Beweises zu verdeutlichen, stellen wir uns eine Matrix $A = (a_{y,z})_{y,z\in x}$ vor, wobei

$$a_{y,z} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in f(z) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

($\chi_z :\equiv (a_{y,z} \mid y \in x)$ ist also die charakteristische Funktion von $f(z)$.) Durch die *Diagonale* der Matrix ist die Funktion $\chi\colon y \mapsto a_{y,y} (= \chi_y(y))$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $1-\chi$. $1-\chi$ ist charakteristische Funktion einer Teilmenge u von x. Wegen $1-\chi(z) = 1-\chi_z(z) \neq \chi_z(z)$ ist aber $1-\chi \neq \chi_z$ für jedes $z \in x$, und somit $u \notin \{f(z) \mid z \in x\}$, d.h., f ist nicht surjektiv.

9.20 Corollar $\forall x\, \overline{\overline{x}} < \overline{\overline{\mathrm{Pot}(x)}}$.

Beweis. Da durch $i \mapsto \{i\}$ eine Injektion von x in $\mathrm{Pot}(x)$ definiert ist, ist $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Pot}(x)}}$. Nach dem Satz von Cantor ist andererseits $\overline{\overline{x}} \neq \overline{\overline{\mathrm{Pot}(x)}}$. QED

9.21 Corollar *Die Klasse der Kardinalzahlen ist nicht beschränkt in der Klasse der Ordinalzahlen:* $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \exists \kappa \in \mathrm{Card}\ \ \alpha < \kappa$. *Insbesondere ist* Card *eine echte Klasse.*

Beweis. O.E. sei $\alpha \geq \omega$ (sonst betrachte ω statt α). Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\alpha)}}$. Wäre $\kappa \leq \alpha$, so wäre $\kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$, also $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\alpha)}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$ im Widerspruch zu 9.20. Wäre schließlich $\mathrm{Card} \in V$, so wäre $\kappa :\equiv \bigcup \mathrm{Card} \in \mathrm{Cd}$ nach 9.9. Nach dem bereist gezeigten gibt es $\lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\lambda > \kappa$. Aus $\lambda \in \mathrm{Card}$ folgt aber $\lambda \leq \bigcup \mathrm{Card} = \kappa$, ein Widerspruch. QED

9.22 Bemerkung Wir bemerken ohne Beweis, daß 9.21 in Abwesenheit des Potenzmengenaxioms nicht gilt.

Da es zu jeder Ordinalzahl eine größere Kardinalzahl gibt, können wir von der kleinsten dieser Kardinalzahlen sprechen. Wir definieren:

9.23 Definition $\alpha^+ :\equiv \min\{\kappa \mid \kappa \in \mathrm{Card} \wedge \kappa > \alpha\}$. Im Fall $\alpha \in \mathrm{Card}$ heißt α^+ der **kardinale Nachfolger** von α.

9.24 Bemerkung Für $\alpha \leq \omega$ ist $\alpha^+ = \omega$; für $\alpha \geq \omega$ ist $\alpha^+ > \alpha + 1,\ \alpha + \omega,\ \alpha + \alpha,\ \alpha \cdot \omega,\ \alpha \cdot \alpha,\ \alpha^\alpha, \ldots$. Hierbei bezeichnen $+$, $\cdot$ und Exponentiation die jeweiligen Ordinalzahloperationen.

Ähnlich wie bei Ordinalzahlen können wir nun zwei verschiedene Arten von Kardinalzahlen unterscheiden, nämlich Nachfolgerkardinalzahlen und Limeskardinalzahlen:

9.25 Definition Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$.

(a) κ ist eine **Nachfolgerkardinalzahl** $:\equiv \exists \lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

(b) κ ist eine **Limeskardinalzahl** $:\equiv \neg \exists \lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

9.26 Bemerkung Beachten Sie, daß auch eine Nachfolger*kardinal*zahl eine Limes*ordinal*zahl ist, siehe 9.6.

9.27 Beispiel ω ist eine Limeskardinalzahl; für $\lambda \in \mathrm{Card}$ gilt nämlich $\lambda \geq \omega$ und somit $\lambda^+ > \omega$.

Das folgende Lemma rechtfertigt die Bezeichnung *Limes*kardinalzahl:

9.28 Lemma *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) κ *ist eine Limeskardinalzahl.*

(ii) $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$.

Beweis. „(i)⇒(ii)“. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ eine Limeskardinalzahl. Ist $\kappa = \omega$, so ist $\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \omega$ und die Behauptung folgt aus $\omega = \sup \omega$. Ist $\kappa > \omega$, so ist $\omega \in \{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$ und somit

$$\sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Card} \wedge \lambda < \kappa\}.$$

Sei $x :\equiv \{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Card} \wedge \lambda < \kappa\}$. Dann ist $\omega \in x$ und $\mu :\equiv \bigcup x \in \mathrm{Card}$, da Card nach 9.9 unter der Vereinigung von nicht-leeren Teilmengen abgeschlossen ist. Offenbar ist $\mu \leq \kappa$. Wäre $\mu < \kappa$, so wäre auch $\mu^+ < \kappa$, da κ eine Limeskardinalzahl ist. Also $\mu^+ \in x$, d.h., $\mu^+ \leq \mu$, ein Widerspruch. Damit ist $\mu = \kappa$ bewiesen, und dies war zu zeigen.

„(ii)⇒(i)“. $\kappa = \mu^+$ ist nur für $\mu < \kappa$ möglich. Im Fall $\kappa = \mu^+$ hätten wir also $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda \leq \mu\} = \mu < \kappa$, ein Widerspruch. Also ist κ eine Limeskardinalzahl. QED

Mit Hilfe der Ordinalzahlen können wir die Klasse Card aufzählen. Dies wird von der $\aleph$-Hierarchie geleistet, die wir nun rekursiv definieren.[65] Definition und Bezeichnung der $\aleph$-Hierarchie gehen auf Cantor zurück.

9.29 Definition Definiere rekursiv eine funktionale Klasse $\aleph\colon \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\aleph_0 = \omega$,
(ii) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,
(iii) $\aleph_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \aleph_\alpha$, falls $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Wir schreiben $\aleph_\alpha$ statt $\aleph(\alpha)$.

9.30 Satz *(a)* $\alpha < \beta \longrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
(b) $\mathrm{Card} = \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$.

Beweis. zu (a). Dies beweist man leicht durch Induktion nach β unter Benutzung der Ungleichung $\gamma^+ > \gamma$.
zu (b) „$\supset$“. Durch Induktion nach α zeigt man $\aleph_\alpha \in \mathrm{Card}$. Man benutzt $\kappa^+ \in \mathrm{Card}$ im Nachfolgerschritt und $\bigcup x \in \mathrm{Card}$ für $x \subset \mathrm{Card}$ im Limesschritt.
„$\subset$“. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$. Wir können $\kappa > \omega$ annehmen wegen $\aleph_0 = \omega$.

(1) $\exists\beta \in \mathrm{On}\ \aleph_\beta \geq \kappa$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann ist $A :\equiv \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\} \subset \kappa$, also nach **(Aus)** eine Menge. Andererseits ist durch $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ wegen (a) eine Bijektion $\aleph\colon \mathrm{On} \xrightarrow{bij.} A$ gegeben, so daß nach **(Ers)** $\mathrm{On} \in V$ gilt, was nicht der Fall ist. Also muß (1) doch richtig sein. qed(1)

Sei nun $\alpha :\equiv \min\{\beta \mid \aleph_\beta \geq \kappa\}$. Dann gilt

(2) $\kappa = \aleph_\alpha$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann gilt

(∗) $\beta < \alpha \longrightarrow \aleph_\beta < \kappa < \aleph_\alpha$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $\alpha = \beta + 1$. Aus (∗) folgt dann $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+ \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Fall 2. $\mathrm{Lim}(\alpha)$. In diesem Fall liefert (∗) $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Da $\alpha > 0$ gilt wegen $\kappa > \omega$, sind hiermit alle möglichen Fälle abgehandelt. Die sich ergebenden Widersprüche zeigen, daß (2) doch richtig sein muß. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

9.31 Bemerkung Es ist auch die Bezeichnung ω_α für $\aleph_\alpha$ üblich.

Ist eine Kardinalzahl κ vorgegeben, so läßt sich anhand der Platznummer von κ in der $\aleph$-Hierarchie bestimmen, ob κ Nachfolger oder Limes ist:

9.32 Lemma *Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$.*
(a) *κ ist eine Nachfolgerkardinalzahl* $\longleftrightarrow \exists\alpha\, \kappa = \aleph_{\alpha+1}$.
(b) *κ ist eine Limeskardinalzahl* $\longleftrightarrow \kappa = \aleph_0 \vee \exists\delta(\mathrm{Lim}(\delta) \wedge \kappa = \aleph_\delta)$.

[65] $\aleph$, lies: alef [mit Betonung auf dem a], ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabetes.

Beweis. Es genügt, (a) zu beweisen.
„$\Rightarrow$". Sei $\kappa = \lambda^+$. Wähle α mit $\lambda = \aleph_\alpha$. Dann ist $\kappa = \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.
„$\Leftarrow$". Es ist $\kappa = \aleph_\alpha^+$, also ein Nachfolger. QED

Im nächsten Kapitel werden wir erklären, was unter Summe, Produkt und Potenz von Kardinalzahlen zu verstehen ist und Rechenregeln für diese Operationen kennenlernen.

10 Kardinalzahlarithmetik.

10.1 Grundlagen der Kardinalzahlarithmetik.

Wir definieren, was unter Summe, Produkt und Potenz zweier Kardinalzahlen zu verstehen ist. Betrachten wir dies zunächst naiv: Es seien Kardinalzahlen κ und λ gegeben. Eine Menge der Kardinalität $\kappa + \lambda$ sollte dann in zwei Teilmengen zerfallen, wobei die eine Kardinalität κ, die andere Kardinalität λ hat. Eine Menge der Kardinalität $\kappa \cdot \lambda$ sollte in κ viele Teilmengen der Kardinalität λ zerlegbar sein, da wir

$$\kappa \cdot \lambda = \underbrace{\lambda + \cdots + \lambda}_{\kappa \text{ Summanden}}$$

intendieren. Schließlich sollte

$$\kappa^\lambda = \underbrace{\kappa \cdot \cdots \cdot \kappa}_{\lambda \text{ Faktoren}}$$

gelten. Mit Cantor[66] definieren wir deshalb:

10.1 Definition Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$.
(a) $\kappa + \lambda :\equiv \overline{\overline{(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})}}$ definiert die **Kardinalzahladdition**.
(b) $\kappa \cdot \lambda :\equiv \overline{\overline{\kappa \times \lambda}}$ definiert die **Kardinalzahlmultiplikation**.
(c) $\kappa^\lambda :\equiv \overline{\overline{{}^\lambda\kappa}}$ definiert die **Kardinalzahlexponentiation**.

10.2 Lemma *Auf ω stimmen die Kardinalzahloperationen mit den Ordinalzahloperationen überein.*

Beweis. Bezeichnen wir die Ordinalzahloperationen mit $\oplus$, $\odot$ bzw. exp, so zeigt der Leser leicht durch Induktion nach $n < \omega$ die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & \forall m < \omega\ m \oplus n = m + n, \\ & \forall m < \omega\ m \odot n = m \cdot n, \\ & \forall m < \omega\ \exp(m, n) = m^n. \end{aligned}$$

Dies beweist das Lemma. QED

10.3 Bemerkung Für unendliche Kardinalzahlen unterscheiden sich die ordinalen Operationen von den kardinalen Operationen, siehe z.B. 10.9. Aus dem Zusammenhang ist i.a. klar zu erkennen, welche Operationen gemeint sind. In Zweifelsfällen modifizieren wir wie im letzten Beweis geschehen die Symbole und Schreibweisen der ordinalen Operationen.

Mit Hilfe der kardinalen Operationen kann man Kardinalitäten von Mengen berechnen:

10.4 Lemma *Seien $x, y \in V$. Dann gilt:*
(a) $x \cap y = \emptyset \longrightarrow \overline{\overline{x \cup y}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}}$.

[66] siehe [3], pp. 285ff

(b) $\overline{\overline{x \times y}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}}$.

(c) $\overline{\overline{{}^{x}y}} = \overline{\overline{y}}^{\,\overline{\overline{x}}}$.

Beweis. Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{x}}$ und $\lambda :\equiv \overline{\overline{y}}$. Dann gilt $x \sim \kappa$ und $y \sim \lambda$. Es ist zu zeigen, daß gilt

(1) (a) $x \times \{0\} \sim \kappa \times \{0\}$, $y \times \{1\} \sim \lambda \times \{1\}$.
(b) $x \times y \sim \kappa \times \lambda$.
(c) ${}^{x}y \sim {}^{\kappa}\lambda$.

Die einzelnen Beweise sind elementar und können dem Leser überlassen bleiben. Als Beispiel skizzieren wir den Beweis für (1)(c):
Sei $\pi\colon x \xrightarrow{bij.} \kappa$ und $\rho\colon y \xrightarrow{bij.} \lambda$. Definiere $\sigma\colon {}^{x}y \to {}^{\kappa}\lambda$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & y \arrow[d, "\rho"] \\ \kappa \arrow[r, "\sigma(f)"] & \lambda \end{tikzcd}$$

Also $\sigma(f) :\equiv \rho \circ f \circ \pi^{-1}$. Man sieht leicht, daß σ eine Bijektion von ${}^{x}y$ auf ${}^{\kappa}\lambda$ definiert. QED

Wir formulieren die grundlegenden Rechenregeln für die kardinalen Operationen:

10.5 Lemma *Seien* $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Cd}$. *Dann gilt:*
(a) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$.
(b) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
(c) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.
(d) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
(e) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
(f) $0 + \kappa = 1 \cdot \kappa = \kappa$, $0 \cdot \kappa = 0$.
(g) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$.
(h) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.
(i) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \big(\kappa^{\mu}\big) \cdot \big(\lambda^{\mu}\big)$.
(j) $\kappa^{0} = 1$, $\kappa^{1} = \kappa$
(k) $0^{\kappa} = 0$, *falls* $\kappa \neq 0$.

Beweis. Die Beweise sind elementar und können leicht vom Leser erbracht werden. Wir skizzieren ein paar Beispiele:

zu (c). Es ist $(\kappa \times \lambda) \times \mu \sim \kappa \times (\lambda \times \mu)$, so daß 10.4 $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \overline{\overline{\kappa \times \lambda}} \cdot \mu = \overline{\overline{(\kappa \times \lambda) \times \mu}} = \overline{\overline{\kappa \times (\lambda \times \mu)}} = \cdots = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$ impliziert.
zu (e). Analog unter Verwendung von $\kappa \times \big((\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})\big) \sim \big((\kappa \times \lambda) \times \{0\}\big) \cup \big((\kappa \times \mu) \times \{1\}\big)$. (Eine Bijektion ist gegeben durch $\big(\alpha, (\beta, i)\big) \mapsto \big((\alpha, \beta), i\big)$.)

zu (g). Seien a, b und c paarweise disjunkte Mengen mit $\overline{\overline{a}} = \kappa$, $\overline{\overline{b}} = \lambda$ und $\overline{\overline{c}} = \mu$. Dann gilt $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \overline{\overline{{}^{b\cup c}a}}$, $\kappa^{\lambda} = \overline{\overline{{}^{b}a}}$ und $\kappa^{\mu} = \overline{\overline{{}^{c}a}}$. Um (g) zu beweisen, ist zu zeigen, daß ${}^{b\cup c}a \sim {}^{b}a \times {}^{c}a$ gilt. Man sieht leicht, daß eine derartige Bijektion durch $f \mapsto (f \restriction b, f \restriction c)$ gegeben ist.

zu (h). Eine Bijektion von ${}^{\kappa\times\lambda}\mu$ auf ${}^{\kappa}({}^{\lambda}\mu)$ ist gegeben durch $f \mapsto \big(f(\alpha, \cdot) \bigm| \alpha < \kappa\big)$. Also ist $\overline{\overline{{}^{\kappa\times\lambda}\mu}} = \overline{\overline{{}^{\kappa}({}^{\lambda}\mu)}}$, was (h) beweist.
zu (i). Es ist ${}^{\mu}(\kappa \times \lambda) \sim ({}^{\mu}\kappa) \times ({}^{\mu}\lambda)$ zu zeigen. Eine solche Bijektion erhält man wie folgt: ist $f\colon \mu \to \kappa \times \lambda$, so definiere $f_1 :\equiv \{(\alpha, \beta) \mid \exists\gamma\, f(\alpha) = (\beta, \gamma)\}$ und $f_2 :\equiv \{(\alpha, \gamma) \mid \exists\beta\, f(\alpha) = (\beta, \gamma)\}$. (D.h., es ist $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha))$.) Durch $f \mapsto (f_1, f_2)$ ist eine Bijektion der gewünschten Art definiert. QED

10.2 Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen.

Nach 6.17 gilt

10.6 Lemma $\forall\alpha(\alpha \geq \omega \longrightarrow \alpha \times \alpha \sim \alpha)$.

Für unendliche Kardinalzahlen impliziert dies folgendes verblüffendes Verhalten der Kardinalzahlmultiplikation:

10.7 Satz (Satz von Hessenberg[67]) $\forall\kappa(\kappa \in \mathrm{Card} \longrightarrow \kappa \cdot \kappa = \kappa)$.

Beweis. Für $\kappa \in \mathrm{Card}$ gilt

$$\begin{aligned}\kappa \cdot \kappa &= \overline{\overline{\kappa \times \kappa}}\\ &= \overline{\overline{\kappa}}, \quad \text{wegen } 10.6,\\ &= \kappa.\end{aligned}$$

QED

10.8 Bemerkung Ein erneuter Blick auf den Beweis von 6.17 zeigt, daß im Fall $\alpha \in \mathrm{Card}$ die auf $\alpha \times \alpha$ eingeschränkte Gödel-Pairing-Function eine Bijektion von $\alpha \times \alpha$ auf α ist.

Der Satz von Hessenberg hat weitreichende Auswirkungen auf die kardinale Addition und auf die kardinale Multiplikation:

10.9 Satz *Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{Cd}$ und es sei $\kappa \geq \omega$. Dann gilt:*
(a) $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
(b) $\lambda \neq 0 \longrightarrow \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Beweis. zu (a). Man sieht leicht die Richtigkeit der folgenden Ungleichungskette ein:

$$\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \underbrace{\max\{\kappa, \lambda\}}_{\in \mathrm{Card}} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.
zu (b). Sei $\lambda \neq 0$. Dann ist $\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa \cdot \lambda$, und es ergibt sich die folgende Ungleichungskette:

$$\max\{\kappa, \lambda\} \leq \kappa \cdot \lambda \leq \max\{\kappa, \lambda\} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. QED

10.10 Corollar *(a)* $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0$.
(b) $\forall m\big((0 < m \wedge m < \omega) \longrightarrow \overline{\overline{\mathbb{R}^m}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}\big)$.

Beweis. zu (a). Wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ gilt $\overline{\overline{\mathbb{N}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{Q}}}$. Aus der von uns gewählten Definition von $\mathbb{Q}$, vgl. 7.4, folgt andererseits die Existenz einer Surjektion von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$, so daß $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}\cdot\overline{\overline{\mathbb{N}}}\cdot\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}}} \geq \overline{\overline{\mathbb{Q}}}$ ist.
zu (b). Für $m = 1$ ist die Behauptung evident. Für $m \in [1, \omega[$ folgt induktiv $\overline{\overline{\mathbb{R}^{m+1}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}^m}} \cdot \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \cdot \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. QED

[67] Gerhard Hessenberg (16.8.1874, Frankfurt–16.11.1925, Berlin) Studium der Physik in Straßburg und der Mathematik in Berlin; 1899 Promotion in Berlin; 1901 Habilitation an der TH Berlin (darstellende Geometrie); 1903–1907 Dozent an der Militärtechnischen Akademie in Berlin; 1907–1910 Professor an der Landwirtschaftlichen Akademie in Bonn-Poppelsdorf, 1910–1919 an der TH Breslau, 1919–1925 an der Universität Tübingen, 1925 an der TH Berlin. Hessenbergs Arbeitsgebiet umfaßt die Bereiche Differentialgeometrie, Grundlagen der Geometrie und Mengenlehre.

Aus dem Corollar folgt insbesondere die Existenz einer Bijektion $f: \mathbb{R} \xrightarrow{bij.} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dieses Resultat geht auf CANTOR zurück, der es (in leicht modifizierter Form) 1874 in einem Brief an DEDEKIND als Vermutung äußert. Einen ersten Beweis teilt CANTOR im Jahre 1877 ebenfalls DEDEKIND mit. Die Grundidee dieses Beweises ist es, jedem Paar (x, y) reeller Zahlen eine reelle Zahl z eineindeutig zuzuordnen, indem z aus x und y „zusammengemischt" wird. DEDEKIND entdeckt in diesem Beweis noch eine kleine Ungenauigkeit, die JULIUS KÖNIG[68] später ohne gravierende Veränderung der Beweisidee ausmerzen kann, nachdem zwischenzeitlich bereits CANTOR mit einem neuen, komplizierteren Ansatz einen korrekten Beweis für seine Vermutung gegeben hat. Die Übertragung des Resultates auf höhere Dimensionen liegt auf der Hand: für $1 \leq m, n < \omega$ existiert $f: \mathbb{R}^m \xrightarrow{bij.} \mathbb{R}^n$.[69] In seiner Korrespondenz mit CANTOR vermutet DEDEKIND, daß eine solche Bijektion im Fall $m \neq n$ nicht stetig sein kann. CANTOR versucht, diese Vermutung zu beweisen, sein 1879 vorgelegter Beweis weist aber Lücken auf. Nach Vorarbeiten von JACOB LÜROTH[70] gelingt es L.E.J. BROUWER[71] im Jahre 1911 erst, diese Vermutung zu beweisen: für $1 \leq m < n < \omega$ sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph.

10.3 Exponentiation von Kardinalzahlen.

10.11 Satz $2^\kappa = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\kappa)}}$.

BEWEIS. Für $x \subset \kappa$ wird durch

$$\alpha \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha \in x \\ 0, & \text{falls } \alpha \notin x \end{cases}$$

eine Funktion $1_x: \kappa \to 2$ definiert. Man sieht leicht, daß durch $x \mapsto 1_x$ eine Bijektion $f: \mathrm{Pot}(\kappa) \xrightarrow{bij.} {}^\kappa 2$ gegeben ist. Also ist $\mathrm{Pot}(\kappa) \sim {}^\kappa 2$ und somit $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\kappa)}} = \overline{\overline{{}^\kappa 2}} = 2^\kappa$. QED

10.12 Corollar $\forall x\, \overline{\overline{\mathrm{Pot}(x)}} = 2^{\overline{\overline{x}}}$.

10.13 Satz *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$. *Dann gilt:*

(a) $\kappa^n = \kappa$ *für alle* n *mit* $1 \leq n < \omega$.

(b) $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

(c) $2^\kappa > \kappa$.

BEWEIS. zu (a). Wir zeigen dies durch Induktion nach n:
$n = 1$. Dies ist evident.
$n = m + 1$, $m \geq 1$. Mit 10.5 folgt aus der Induktionsvoraussetzung: $\kappa^n = \kappa^{m+1} = \kappa^m \cdot \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

---

[68] JULIUS KÖNIG (1849–1925)

[69] Als sie bekannt werden, verursachen die Resultate, daß euklidische Räume unterschiedlicher Dimension gleich groß sind, ein großes Maß an Irritation und Unglauben, da sie der damaligen Vorstellung vom Charakter der Dimension völlig widersprechen. In der Tat wird CANTORs Arbeit, siehe [3], pp. 119–133, in der er diese Resultate öffentlich machen will, wahrscheinlich auf Druck KRONECKERs erst ein Jahr nach ihrer Einreichung im CRELLEschen Journal veröffentlicht. (Die übliche Wartezeit beträgt damals wenige Wochen!)

[70] JAKOB LÜROTH (18.2.1844, Mannheim–14.9.1910, München) Studium in Bonn und Heidelberg, hier 1865 Promotion, danach weitere Studien in Berlin (bei WEIERSTRASS) und in Gießen; 1867 Habilitation in Heidelberg; 1869–1880 ordentlicher Professor an der TH Karlsruhe, 1880–1883 an der TH München, 1883–1910 an der Universität Freiburg (Br.). LÜROTH arbeitet auf vielen Gebieten der Mathematik, aber auch in der Physik; seine wichtigsten Resultate gehören in die Bereiche algebraische Geometrie und Topologie.

[71] LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (27.2.1881, Overschie–2.12.1966, Blaricum) ab 1897 Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften in Amsterdam; 1907 Promotion mit einer Arbeit, die erstmals die Grundlagen der Mathematik von der Position des „Intuitionismus"darlegt; 1909 Habilitation; 1909–1912 (unbezahlter) Privatdozent, 1912 außerordentlicher und von 1913 bis zu seiner Emeritierung 1951 ordentlicher Professor in Amsterdam. BROUWER arbeitet hauptsächlich im Bereich der Topologie, wo er fundamentale Resultate gewinnt. Weitere Arbeiten BROUWERs gelten der Grundlagenmathematik. Hier vertritt er einen ähnlichen Standpunkt wie KRONECKER: die „Konstruktion" ist das einzige Mittel zur Definition von mathematischen Objekten.

zu (c). Da nach 9.20 $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\kappa)}} > \kappa$ ist, folgt (c) aus $2^\kappa = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\kappa)}}$.
zu (b). $2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq \left(2^\kappa\right)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$. QED

Wir können nun die Kardinalität von $\mathbb{R}$ bestimmen.

10.14 Satz $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$.

Beweis. „$\leq$". Durch $r \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q <_\mathbb{R} r\}$ ist eine Injektion $f\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{Q})$ definiert. Also ist $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Pot}(Q)}}$. Da $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ gilt, folgt hieraus $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\mathbb{N})}}$.

„$\geq$". Definiere $f\colon \mathrm{Pot}(\omega) \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \sum_{i\in x}\left(\frac{1}{3}\right)^i$, wobei $\sum_{i\in\emptyset}\left(\frac{1}{3}\right)^i :\equiv 0$.

(1) f ist injektiv.

Beweis. Seien $x, y \subset \mathbb{N}$, $x \neq y$. Sei n kleinstes Element in $(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ und o.E. sei $n \in x$. Dann gilt

$$f(y) = \underbrace{\sum_{i\in y\cap n}\left(\frac{1}{3}\right)^i}_{=\sum_{i\in x\cap n}\left(\frac{1}{3}\right)^i} + \underbrace{\sum_{i\in y, i>n}\left(\frac{1}{3}\right)^i}_{\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n} < \sum_{i\in x\cap n}\left(\frac{1}{3}\right)^i + \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\leq\sum_{i\in x, i\geq n}\left(\frac{1}{3}\right)^i} \leq f(x).$$

Also ist $f(x) \neq f(y)$. qed(1)

Aus (1) folgt $2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\omega)}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. QED

Wie groß ist $2^{\aleph_0}$? Auf Cantor geht die folgende Sprechweise zurück:

10.15 Definition CH $:\equiv 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ heißt **Kontinuumshypothese**.

Cantor vermutet, daß jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ schon gleichmächtig zum *Kontinuum* (so bezeichnet Cantor die Menge der reellen Zahlen) selbst ist, siehe [3], pp. 132–133. Wie man leicht einsieht, bedeutet dann die Gültigkeit von **CH** gerade die Richtigkeit der Cantorschen Vermutung:

10.16 Satz CH $\longleftrightarrow \forall x\big(x \subset \mathbb{R} \to (\overline{\overline{x}} \leq \aleph_0 \lor x \sim \mathbb{R})\big)$.

Cantor versucht viele Jahre lang, seine Hypothese zu beweisen. Für spezielle Teilmengen $x \subset \mathbb{R}$ kann er nachweisen, daß sie entweder höchstens abzählbar und gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ sind, so etwa für offene, abgeschlossene oder perfekte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ein Beweis des allgemeinen Resultats wird von Cantor angekündigt aber nicht gefunden. Hilbert nimmt das Kontinuumsproblem als erstes Problem in seine berühmte, im Jahr 1900 in Paris vorgelegte Liste mit 23 ungelösten Problemen der Mathematik auf, wohl in der Annahme, daß die Frage über kurz oder lang entschieden werden kann. Im Jahre 1938 beweist aber Gödel das folgende Resultat: wenn **ZF** konsistent ist,[72] so ist auch **ZFC+CH** konsistent.[73] Dies bedeutet insbesondere, daß man in **ZFC** die Kontinuumshypothese zumindest nicht *widerlegen* kann. Cohen zeigte dann 1963 ein komplementäres Resultat: wenn **ZFC** konsistent ist, so ist auch **ZFC**$+\neg$**CH** konsistent.[74] Dies bedeutet insbesondere, daß man in **ZFC** die Kontinuumshypothese auch nicht *beweisen* kann. Wir fassen diese beiden Resultate mit den Worten „**CH** ist unabhängig von **ZFC**" zusammen.

Im Bereich der kardinalen Exponentiation stößt man sehr rasch in Regionen vor, in denen derartige Unabhängigkeiten eine Rolle spielen. In der Tat lassen sich für die Kardinalzahlexponentiation nur wenige allgemeine Regeln innerhalb von **ZFC** beweisen. Die wenigen, die man zeigen kann, benötigen sehr oft tiefliegendere mengentheoretische Begriffsbildungen, von denen wir einige im folgenden vorstellen.

[72] Zur Erinnerung: wir wollen ein Axiomensystem *konsistent* nennen, wenn sich aus ihm keine sich widersprechenden Aussagen ableiten lassen.
[73] siehe hierzu 31.3.
[74] siehe hierzu 31.8.

10.4 Die Konfinalität einer Kardinalzahl.

Die Konfinalität einer Kardinalzahl κ kann als „Maß" für die „Größe" von κ angesehen werden. Betrachten wir zum Beispiel die Kardinalzahl $\aleph_\omega$. Einerseits ist $\aleph_\omega$ „groß", da sie größer ist als jede der Kardinalzahlen $\aleph_n$, wobei $n < \omega$. Aus einem anderen Blickwinkel betrachtet ist $\aleph_\omega$ aber „klein", sehr klein sogar, in der Tat nicht „größer" als $\aleph_0$: wie $\aleph_0$ kann man $\aleph_\omega$ nämlich in abzählbar vielen Schritten „erreichen" (man „reise" etwa über die abzählbar vielen Stationen $\aleph_n$ mit $n < \omega$). Mit den gleich zu definierenden Begriffen bedeutet dies: $\{\aleph_n \mid n < \omega\}$ ist konfinal in $\aleph_\omega$ und $\aleph_\omega$ hat die Konfinalität $\aleph_0$.

10.17 Definition Sei $\alpha \in \mathrm{On}$, $\mathrm{Lim}(\alpha)$.
(a) x ist **konfinal** in α $:\equiv x \subset \alpha \wedge \forall \beta < \alpha\, \exists \gamma < \alpha\, (\gamma > \beta \wedge \gamma \in x)$.
(b) $\mathrm{cf}(\alpha) :\equiv \min\{\overline{\overline{x}} \mid x$ ist konfinal in $\alpha\}$ heißt **Konfinalität** von α.
(c) α ist **regulär** $:\equiv \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.
(d) α ist **singulär** $:\equiv \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

10.18 Bemerkung Statt **konfinal** ist auch der Begriff **unbeschränkt** (engl. **unbounded**) üblich: eine Menge ist genau dann konfinal in α, wenn sie von unterhalb α „beliebig nahe" an α heranreicht.

Ein paar einfache Folgerungen aus den Definitionen:

10.19 Lemma *Sei $\alpha \in \mathrm{On}$, $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Dann gilt:*
(a) $\mathrm{cf}(\alpha) = \min\big\{\beta \mid \exists f\, \big(f{:}\,\beta \to \alpha \wedge \forall \gamma_0, \gamma_1\, (\gamma_0 < \gamma_1 \to f(\gamma_0) < f(\gamma_1)) \wedge \bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha\big)\big\}$.
In Worten: die Konfinalität von α ist die kleinste Ordinalzahl, die durch eine ordnungserhaltende, in α unbeschränkte Funktion nach α abgebildet werden kann. Sie ist also die kleinste Ordinalzahl β, so daß es in α eine streng monoton wachsende, unbeschränkte β-Folge $(\alpha_i \mid i < \beta)$ gibt.
(b) $\mathrm{cf}(\alpha) \in \mathrm{Card}$.
(c) *α regulär* $\longrightarrow \alpha \in \mathrm{Card}$.
(d) $\mathrm{cf}(\alpha)$ *ist regulär.*

Beweis. zu (a). Sei

$$A :\equiv \big\{\beta \mid \exists f\, \big(f{:}\,\beta \to \alpha \wedge \forall \gamma_0, \gamma_1\, (\gamma_0 < \gamma_1 \to f(\gamma_0) < f(\gamma_1)) \wedge \bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha\big\}.$$

„$\leq$". Sei $\beta \in A$ und $f{:}\,\beta \to \alpha$ mit $\gamma_0 < \gamma_1 \to f(\gamma_0) < f(\gamma_1)$ und $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$. Sei $x :\equiv \mathrm{ran}(f)$. Dann ist x konfinal in α und somit $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{\beta}} \leq \beta$.
„$\geq$". Sei $\beta :\equiv \mathrm{cf}(\alpha)$. Es ist $\beta \in A$ zu zeigen. Hierzu fixiere x konfinal in α mit $\overline{\overline{x}} = \beta$. Sei $\{\alpha_\delta \mid \delta < \beta\}$ eine Aufzählung der Elemente von x. Wir definieren eine ordnungserhaltende Abbildung $f{:}\,\beta \to x$ mit $f(\delta) \geq \alpha_\delta$ für $\delta < \beta$ rekursiv wie folgt:
Sei $f(0) :\equiv \alpha_0$.
Sei $\delta < \beta$ und $f \restriction \delta{:}\,\delta \to x$ bereits mit den gewünschten Eigenschaften definiert. Wegen $\delta < \beta \leq \min A$ muß $\gamma :\equiv \bigcup \mathrm{ran}\big(f \restriction \delta\big) < \alpha$ sein. Da x konfinal in α ist, existiert ein $\eta \in x$ mit $\eta > \max\{\gamma, \alpha_\delta\}$. Setze $f(\delta) :\equiv \min\{\eta \mid \eta \in x \wedge \eta > \max\{\gamma, \alpha_\delta\}\}$.
Wir haben $\beta \in A$ verifiziert, wenn wir $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$ zeigen können. Dies folgt leicht aus $f(\delta) \geq \alpha_\delta$ und der Konfinalität von $x = \{\alpha_\delta \mid \delta < \beta\}$. Damit ist (a) bewiesen.
zu (b). Klar nach Definition.
zu (c). Nach (b) ist $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha) \in \mathrm{Card}$.
zu (d). Wir wenden (a) an. Sei $\gamma :\equiv \mathrm{cf}(\alpha)$. Sei $g{:}\,\mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ eine ordnungserhaltende Abbildung mit $\bigcup \mathrm{ran}(g) = \gamma$. Sei $f{:}\,\gamma \to \alpha$ eine ordnungserhaltende Abbildung mit $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$. Man sieht leicht, daß dann $f \circ g{:}\,\mathrm{cf}(\gamma) \to \alpha$ eine ordnungserhaltende Abbildung mit $\bigcup \mathrm{ran}(f \circ g) = \alpha$ ist. Also ist $\mathrm{cf}\big(\mathrm{cf}(\alpha)\big) \geq \mathrm{cf}(\alpha)$. Andererseits ist trivialerweise $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \mathrm{cf}\big(\mathrm{cf}(\alpha)\big)$, so daß (d) gezeigt ist.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Aus der Platznummer von κ in der $\aleph$-Hierarchie läßt sich die Konfinalität von κ bestimmen:

10.20 Satz *(a)* $\mathrm{Succ}(\alpha) \longrightarrow \aleph_\alpha$ *ist regulär.*
(b) $\mathrm{Lim}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Beweis. zu (a). Im Fall $\alpha = 0$ ist die Behauptung klar. Sei deshalb $\alpha = \beta+1$ vorausgesetzt. Angenommen, $\aleph_{\beta+1}$ ist singulär. Dann existiert ein x konfinal in $\aleph_{\beta+1}$ mit $\overline{\overline{x}} \leq \aleph_\beta$. O.E. sei $0 \notin x$. Wir konstruieren eine Surjektion $h\colon \aleph_\beta \times \aleph_\beta \to \aleph_\alpha$ und erhalten $\overline{\overline{\aleph_\beta \times \aleph_\beta}} \geq \aleph_\alpha$, was nach dem Satz von Hessenberg 10.7 auf $\aleph_\beta \geq \aleph_\alpha$ führt. Wegen $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$ ergibt sich hieraus ein Widerspruch. Es bleibt h zu konstruieren. Hierzu wähle eine Surjektion $f\colon \aleph_\beta \overset{surj.}{\longrightarrow} x$. f existiert wegen $\overline{\overline{x}} \leq \aleph_\beta$. Definiere $G\colon \aleph_\beta \to V$ durch $G(\gamma) :\equiv \{g \mid g\colon \aleph_\beta \overset{surj.}{\longrightarrow} f(\gamma)\}$. Wegen $f(\gamma) < \aleph_{\beta+1}$ ist $\overline{\overline{f(\gamma)}} \leq \aleph_\beta$. Somit ist $G(\gamma) \neq \emptyset$. Nach **(AC)** existiert dann $H \in \times_{\gamma \in \aleph_\beta} G(\gamma)$. (Also ist $H(\gamma)\colon \aleph_\beta \overset{surj.}{\longrightarrow} f(\gamma)$ für $\gamma < \aleph_\beta$.) Wegen $0 \notin x$ ist $f(\gamma) \neq 0$ und somit $H(\gamma) \neq \emptyset$. Durch $h(\gamma,\delta) :\equiv H(\gamma)(\delta)$ ist also eine Funktion $h\colon \aleph_\beta \times \aleph_\beta \to \aleph_\alpha$ definiert. h ist surjektiv: zu $\xi < \aleph_\alpha$ bestimme $\gamma < \aleph_\beta$ mit $\xi < f(\gamma)$. Da $H(\gamma)$ eine Surjektion von $\aleph_\beta$ auf $f(\gamma)$ ist, existiert ein $\delta < \aleph_\beta$ mit $h(\gamma,\delta) = H(\gamma)(\delta) = \xi$. Dies beweist die Surjektivität von h und vervollständigt den Beweis von (a).

zu (b). „$\leq$". Nach 10.19 genügt es, eine ordnungserhaltende, unbeschränkte Funktion $f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \aleph_\alpha$ zu konstruieren. Hierzu fixiere eine ordnungserhaltende, unbeschränkte Funktion $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$. Setze $f(\gamma) :\equiv \aleph_{g(\gamma)}$. Es ist leicht zu sehen, daß f das Gewünschte leistet.
„$\geq$". Fixiere x konfinal in $\aleph_\alpha$ mit $\overline{\overline{x}} = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Wir konstruieren y, so daß y konfinal in α ist und $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{x}}$ gilt. Dann ist $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \overline{\overline{y}} \leq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Setze $y :\equiv \big\{\min\{i \mid i < \alpha \wedge \aleph_i \geq \xi\} \bigm| \xi \in x\big\}$. Da $\{\aleph_i \mid i < \alpha\}$ konfinal in $\aleph_\alpha$ liegt, ist das Minimum stets definiert und eine Ordinalzahl unterhalb von α. Also ist $y \subset \alpha$. y ist unbeschränkt: sei $\beta < \alpha$. Da x unbeschränkt in $\aleph_\alpha$ ist, existiert $\xi \in x$ mit $\xi > \aleph_\beta$. Dann ist $\gamma :\equiv \min\{i \mid i < \alpha \wedge \aleph_i \geq \xi\} > \beta$ und $\gamma \in y$. Dies beweist die Konfinalität von y.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Der letzte Satz wirft die Frage auf, ob es reguläre Limeskardinalzahlen gibt. Diese müßten dann „sehr groß" sein: ist nämlich $\delta \in \mathrm{On}$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$, so daß $\aleph_\delta$ regulär ist, so folgt aus Teil (b) des letzten Satzes $\aleph_\delta = \delta$ (denn $\delta \leq \aleph_\delta = \mathrm{cf}(\aleph_\delta) = \mathrm{cf}(\delta) \leq \delta$). Also gibt es unterhalb von $\aleph_\delta$ genausoviele Kardinalzahlen wie Ordinalzahlen. Insbesondere ist die erste reguläre Limeskardinalzahl, wenn es überhaupt solche gibt, wesentlich größer als etwa $\aleph_\omega, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots$. Auf solche Kardinalzahlen macht erstmals Felix Hausdorff im Jahr 1908 aufmerksam. Wegen ihrer Größe bezeichnete er sie als *exorbitante Zahlen.* Wir haben heute eine andere Bezeichnung für diese Zahlen:

10.21 Definition Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$.
(a) κ ist **schwach unerreichbar** $:\equiv \kappa > \omega \wedge \forall\lambda\,(\lambda < \kappa \to \lambda^+ < \kappa) \wedge \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.
(b) κ ist **(stark) unerreichbar** $:\equiv \kappa > \omega \wedge \forall\lambda\,(\lambda < \kappa \to 2^\lambda < \kappa) \wedge \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Die exorbitanten Kardinalzahlen Hausdorffs sind dann gerade die schwach unerreichbaren Kardinalzahlen. Jede unerreichbare Kardinalzahl ist auch schwach unerreichbar, da stets $\lambda^+ \leq 2^\lambda$ gilt. Die erste unerreichbare Kardinalzahl ist, wenn es solche Zahlen überhaupt gibt, größer als $\aleph_\omega$, $\aleph_{\aleph_\omega}$, $2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_\omega} \ldots$. Existieren (schwach) unerreichbare Kardinalzahlen? Man kann zeigen, daß aus der Widerspruchsfreiheit[75] von **ZFC** die Widerspruchsfreiheit von **ZFC**$+ \neg\exists\kappa\ \kappa$ schwach unerreichbar folgt, siehe 22.11. Insbesondere läßt sich also in **ZFC** nicht die Existenz einer schwach unerreichbaren (also erst recht nicht die Existenz einer stark unerreichbaren) Kardinalzahl beweisen. Es ist unbekannt, ob **ZFC** $+ \exists\kappa\ \kappa$ unerreichbar widerspruchsfrei ist: wie wir in 22.12 zeigen werden, folgt aus dem 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatz 21.11, daß es keinen formalen Beweis gibt, der unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit von **ZFC** die Widerspruchsfreiheit von **ZFC** $+ \exists\kappa\ \kappa$ unerreichbar zeigt.

Schwach unerreichbare und unerreichbare Kardinalzahlen sind Beispiele für *Große Kardinalzahlen.* Als Große Kardinalzahlen bezeichnet man reguläre Kardinalzahlen, die gegen starke mengentheoretische Prozesse bezüglich kleinerer Parameter abgeschlossen sind. So sind etwa die schwach unerreichbaren Kardinalzahlen gegen die kardinale Nachfolgerbildung abgeschlossen; unerreichbare Kardinalzahlen sind

[75]„widerspruchsfrei" ist gleichbedeutend mit „konsistent".

unter der kardinalen Exponentiation kleinerer Kardinalzahlen abgeschlossen: ist κ unerreichbar und sind $\lambda, \mu < \kappa$, so ist $\lambda^\mu \leq (\lambda+\mu)^{\lambda+\mu} = 2^{\lambda+\mu} < \kappa$. Im Gegensatz zu HAUSDORFFs Meinung, die exorbitanten Zahlen könnten wegen ihrer Größe in der Mathematik keine Rolle spielen, sind Große Kardinalzahlen heute in vielen Bereichen der Mengenlehre von exorbitanter Bedeutung.[76]

10.5 Summen und Produkte unendlich vieler Kardinalzahlen.

10.22 Definition Sei $\theta \in \mathrm{On}$ und für $i < \theta$ sei $\kappa_i \in \mathrm{Cd}$.[77]

(a) $\sum_{i<\theta} \kappa_i :\equiv \overline{\overline{\bigcup_{i<\theta}(\kappa_i \times \{i\})}}$.

(b) $\prod_{i<\theta} \kappa_i :\equiv \overline{\overline{\times_{i<\theta} \kappa_i}}$.

Wir halten zuerst ein paar einfache Rechenregeln fest.

10.23 Lemma *(a)* $\sum_{i<\theta+1} \kappa_i = \left(\sum_{i<\theta} \kappa_i\right) + \kappa_\theta$, $\prod_{i<\theta+1} \kappa_i = \left(\prod_{i<\theta} \kappa_i\right) \cdot \kappa_\theta$.

(b) $\sum_{i<\theta} \kappa = \overline{\overline{\theta}} \cdot \kappa$, $\prod_{i<\theta} \kappa = \kappa^{\overline{\overline{\theta}}}$.

(c) $\lambda^{\left(\sum_{i<\theta} \kappa_i\right)} = \prod_{i<\theta} \lambda^{\kappa_i}$.

(d) $\left(\prod_{i<\theta} \kappa_i\right)^\lambda = \prod_{i<\theta} \kappa_i^\lambda$.

(e) **Umordnungssatz.** *Für $x \subset \theta$ definiere $\sum_{i\in x} \kappa_i :\equiv \overline{\overline{\bigcup_{i\in x}(\kappa_i \times \{i\})}}$ und $\prod_{i\in x} \kappa_i :\equiv \overline{\overline{\times_{i\in x} \kappa_i}}$. Sei $\theta = \bigcup\{x_\xi \mid \xi < \sigma\}$ wobei $x_\xi \cap x_\zeta = \emptyset$ für $\xi \neq \zeta$. Dann gilt $\sum_{\xi<\sigma} \sum_{i\in x_\xi} \kappa_i = \sum_{i<\theta} \kappa_i$ und $\prod_{\xi<\sigma} \prod_{i\in x_\xi} \kappa_i = \prod_{i<\theta} \kappa_i$.*

(f) Aus $\lambda_i \leq \kappa_i$ folgt $\sum_{i<\theta} \lambda_i \leq \sum_{i<\theta} \kappa_i$ und $\prod_{i<\theta} \lambda_i \leq \prod_{i<\theta} \kappa_i$.

(g) Ist $\kappa_i \geq 2$ für $i < \theta$, so gilt $\sum_{i<\theta} \kappa_i \leq \prod_{i<\theta} \kappa_i$.

BEWEIS. Wir skizzieren die Beweise nur. Die Details verbleiben dem Leser zur Übung.

zu (a). Z.B. ist $\times_{i<\theta+1} \kappa_i \sim \left(\times_{i<\theta} \kappa_i\right) \times \kappa_\theta$ durch die Zuordnung $f \mapsto \left(f \upharpoonright \theta, f(\theta)\right)$.

zu (b). Es ist $\bigcup_{i<\theta} \kappa \times \{i\} = \kappa \times \theta$ und $\times_{i<\theta} \kappa = {}^\theta\kappa$.

zu (c). Es ist ${}^{\left(\bigcup_{i<\theta} \kappa_i \times \{i\}\right)}\lambda \sim \times_{i<\theta} {}^{\kappa_i}\lambda$ aufgrund der Zuordnung $f \mapsto \left(f(\cdot, i) \mid i < \theta\right)$.

zu (d). Es ist ${}^\lambda\left(\times_{i<\theta} \kappa_i\right) \sim \times_{i<\theta} {}^\lambda\kappa_i$ durch die Zuordnung $f \mapsto \left(f(\cdot)(i) \mid i < \theta\right)$.

zu (e). Z.B. ist $\times_{i<\theta} \kappa_i \sim \times_{\xi<\sigma} \times_{i\in x_\xi} \kappa_i$ durch die Zuordnung $f \mapsto \left(f \upharpoonright x_\xi \mid \xi < \sigma\right)$.

zu (f). Dies ist klar.

zu (g). Es ist $\bigcup_{i<\theta} \kappa_i \times \{i\} \preceq \times_{i<\theta} \kappa_i$. Eine derartige Injektion ist definiert durch $(\alpha, i) \mapsto f_{(\alpha,i)}$ wobei $f_{(\alpha,i)} \colon \theta \to V$ gegeben ist durch

$$f_{(\alpha,i)}(j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq i \\ \alpha, & \text{falls } j = i. \end{cases}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wie lassen sich unendliche kardinale Summen und Produkte berechnen? Wir zeigen als Beispiel das folgende Resultat für die Summation.

10.24 Lemma *Sei $\theta \in \mathrm{On}$ und für $i < \theta$ sei $\kappa_i \in \mathrm{Cd}\setminus\{0\}$. Mindestens eine der Zahlen θ, κ_i $(i < \theta)$ sei unendlich. Dann gilt: $\sum_{i<\theta} \kappa_i = \overline{\overline{\theta}} \cdot \sup_{i<\theta} \kappa_i$.*

[76] Ein erster Antrieb für das Studium Großer Kardinalzahlen war die Hoffnung, m.H. Großer Kardinalzahlen die Kontinuumshypothese entscheiden zu können. Diese Hoffnung hat sich jedoch nicht erfüllt: wenn **ZFC**$+ \exists\kappa\ \kappa$ unerreichbar konsistent ist, so gibt es Mengenuniversen, in denen **ZFC**$+ \exists\kappa\ \kappa$ unerreichbar $+$ **CH** und solche, in denen **ZFC**$+ \exists\kappa\ \kappa$ unerreichbar $+$ $\neg$ **CH** gilt, siehe 31.13. M.a.W.: Die Kontinuumshypothese ist von Großen Kardinalzahlen unabhängig. Einen Überblick über dieses und verwandte Themen sowie das Kontinuumsproblem im allgemeinen gibt FELGNER in [9].

[77] D.h., es ist eine Funktion $f \colon \theta \to \mathrm{Cd}$ gegeben und es ist $\kappa_i :\equiv f(i)$ gesetzt.

Beweis. Ist $\theta < \omega$, so reduziert sich die Behauptung auf $\sum_{i<\theta}\kappa_i = \sup_{i<\theta}\kappa_i$. Die Gültigkeit dieser Aussage verifiziert man mit Hilfe von 10.23 (a) leicht durch Induktion nach θ. Sei deshalb nun $\theta \geq \omega$ vorausgesetzt. Sei $\kappa :\equiv \sup_{i<\theta}\kappa_i$ und $\lambda :\equiv \sum_{i<\theta}\kappa_i$. Es ist $\lambda = \max\{\overline{\overline{\theta}}, \kappa\}$ nachzuweisen.
zu „$\leq$". Wegen $\kappa_i \leq \kappa$ folgt $\sum_{i<\theta}\kappa_i \leq \sum_{i<\theta}\kappa = \overline{\overline{\theta}} \cdot \kappa$.
zu „$\geq$". Wegen $\kappa_i \geq 1$ für alle $i < \theta$ ist $\overline{\overline{\theta}} = \sum_{i<\theta} 1 \leq \sum_{i<\theta}\kappa_i = \lambda$. Andererseits ist $\lambda \geq \kappa_i$ für alle $i < \theta$, also $\lambda \geq \sup_{i<\theta}\kappa_i = \kappa$. Insgesamt folgt $\lambda \geq \max\{\overline{\overline{\theta}}, \kappa\}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Im Fall des Produktes haben wir kein so allgemeines Resultat. Mit etwas stärkeren Voraussetzungen beweisen wir:

10.25 Lemma *Sei $\theta \in \mathrm{Cd}\setminus\{0\}$ und für $i < \theta$ sei $\kappa_i > 0$ eine Kardinalzahl.*

(a) Ist $\theta < \omega$ und mindestens eines der κ_i unendlich, so ist $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \sup_{i<\theta}\kappa_i$.

(b) Ist $\theta \geq \omega$ und ist die Folge der κ_i monoton wachsend (d.h., $\kappa_i \leq \kappa_j$ für $i < j < \theta$), so ist $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \left(\sup_{i<\theta}\kappa_i\right)^\theta$.

Beweis. (a) beweist man leicht durch Induktion nach θ. Es bleibt, (b) zu zeigen. Setze $\kappa :\equiv \sup_{i<\theta}\kappa_i$. Es ist $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \kappa^\theta$ nachzuweisen.
zu „$\leq$". Wegen $\kappa_i \leq \kappa$ ist $\prod_{i<\theta}\kappa_i \leq \prod_{i<\theta}\kappa = \kappa^\theta$.
zu „$\geq$". Sei $(x_\xi \mid \xi < \theta)$ eine Zerlegung von θ in Mengen der Kardinalität θ. D.h., $\theta = \bigcup_{\xi<\theta} x_\xi$, $x_\xi \cap x_\zeta = \emptyset$ (für $\xi \neq \zeta$) und $\overline{\overline{x_\xi}} = \theta$. (Eine solche Zerlegung erhält man z.B. wie folgt: wähle $f\colon \theta \times \theta \xrightarrow{bij.} \theta$ und setze $x_\xi :\equiv f\big[\theta \times \{\xi\}\big]$.) Da θ eine Kardinalzahl ist, ist x_ξ konfinal in θ: aus $x_\xi \subset \alpha$ mit $\alpha < \theta$ folgt nämlich wegen $\overline{\overline{x_\xi}} = \theta$ die Existenz einer Injektion $\theta \to \alpha$, so daß sich $\theta \leq \overline{\overline{\alpha}} \leq \alpha < \theta$ ergibt, ein Widerspruch. Aus der Konfinalität von x_ξ und dem monotonen Wachstum der Folge der κ_i folgt $\sup_{i\in x_\xi}\kappa_i = \kappa$. Wegen $\prod_{i\in x_\xi}\kappa_i \geq \kappa_j$ für $j \in x_\xi$ haben wir also $\prod_{i\in x_\xi}\kappa_i \geq \kappa$. Mit Hilfe des in 10.23 gezeigten Umordnungssatzes folgt deshalb $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \prod_{\xi<\theta}\big(\prod_{i\in x_\xi}\kappa_i\big) \geq \prod_{i<\theta}\kappa = \kappa^\theta$. Dies war zu zeigen.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

10.26 Bemerkung Ist $\theta \notin \mathrm{Card}$, so gilt i.a. **nicht** $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \left(\sup_{i<\theta}\kappa_i\right)^{\overline{\overline{\theta}}}$. Setze etwa $\theta :\equiv \omega + 1$ (ordinale Nachfolgerbildung) sowie $\kappa_\omega :\equiv \aleph_0$ und $\kappa_i :\equiv 1$, falls $i < \omega$. Dann ist $\prod_{i<\theta}\kappa_i = \aleph_0 < \aleph_0^{\aleph_0} = \left(\sup_{i<\theta}\kappa_i\right)^{\overline{\overline{\theta}}}$.

10.6 Regeln der Kardinalzahlexponentiation.

Von fundamentaler Bedeutung sind die folgenden beiden Resultate:

10.27 Satz (Lemma von König[78]) *Sei $\theta \in \mathrm{Cd}$ und für $i < \theta$ seien $\kappa_i, \lambda_i \in \mathrm{Cd}$ mit $\kappa_i < \lambda_i$. Dann gilt $\sum_{i<\theta}\kappa_i < \prod_{i<\theta}\lambda_i$.*

Beweis. Angenommen, die Aussage des Lemmas ist falsch. Dann ist $\sum_{i<\theta}\kappa_i \geq \prod_{i<\theta}\lambda_i$. Also existiert eine Surjektion $g\colon \bigcup_{i<\theta}\kappa_i \times \{i\} \xrightarrow{surj.} \times_{i<\theta}\lambda_i$. (Dann ist für $i < \theta$, $\alpha < \kappa_i$ $g(\alpha, i)$ eine Funktion mit Definitionsbereich θ, so daß für $j < \theta$ gilt: $g(\alpha,i)(j) \in \lambda_j$.) Für $i < \theta$ setze $g_i :\equiv g(\cdot, i)(i)$. Dann ist $g_i\colon \kappa_i \to \lambda_i$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bigcup_{i<\theta}\kappa_i \times \{i\} & = & \kappa_0 & \uplus & \kappa_1 & \uplus & \cdots & \uplus & \kappa_i & \uplus & \cdots \\
\big\downarrow g & \supset & \big\downarrow g_0 & & \big\downarrow g_1 & & & & \big\downarrow g_i & & \\
\times_{i<\theta}\lambda_i & = & \lambda_0 & \times & \lambda_1 & \times & \cdots & \times & \lambda_i & \times & \cdots,
\end{array}$$

[78] Julius König, 1904

wobei das Symbol $\uplus$ andeutet, daß die Mengen vor ihrer Vereinigung disjunkt gemacht werden durch den Übergang von κ_i zu $\kappa_i \times \{i\}$. Wegen $\kappa_i < \lambda_i$ ist g_i nicht surjektiv. Also existiert $\eta_i \in \lambda_i \setminus \operatorname{ran}(g_i)$. (Zur Auswahl von η_i wird **(AC)** nicht benötigt, da man das $<$-minimale Element der Menge nehmen kann.) Sei $\eta :\equiv \big(\eta_i \bigm| i < \theta\big)$. Dann ist $\eta \in \times_{i<\theta} \lambda_i$. Wir zeigen

(1) $\quad \eta \notin \operatorname{ran}(g)$,

und haben damit einen Widerspruch zur Surjektivität von g, was den Satz beweist.
Beweis von (1). Wäre $g(\alpha, i) = \eta$, so wäre insbesondere $g(\alpha, i)(i) = \eta_i$. Also ist $\eta_i \in \operatorname{ran}(g_i)$, was der Wahl von η_i widerspricht. qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

10.28 Bemerkung (a) Gilt auch nur einmal $\kappa_i = \lambda_i$, so muß nicht mehr $\sum_{i<\theta} \kappa_i < \prod_{i<\theta} \lambda_i$ sein: setze etwa $\theta :\equiv \omega$, $\kappa_0 :\equiv \lambda_0 :\equiv 2^{\aleph_0}$ und für $1 \le i < \omega$ sei $\kappa_i :\equiv \aleph_0$, $\lambda_i :\equiv \aleph_1$. Nach 10.25 gilt dann $\sum_{i<\theta} \kappa_i = \aleph_0 \cdot \sup_{i<\omega} \kappa_i = 2^{\aleph_0}$ und $\prod_{i<\theta} \lambda_i = 2^{\aleph_0} \cdot \prod_{1\le i<\omega} \lambda_i = 2^{\aleph_0} \cdot \big(\sup_{1\le i<\omega} \lambda_i\big)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, wegen $2^{\aleph_0} \le \aleph_1^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

(b) Das Beweisargument im Lemma von König ist eine Variante des Cantorschen Diagonalschlusses.

10.29 Corollar *Sei* $\lambda \in \mathrm{Card}$ *und* $\kappa \in \mathrm{Cd}$, $\kappa \ge 2$. *Dann ist* $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Beweis. Angenommen, es ist $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) \le \lambda$. Dann existiert eine konfinale Menge $\{\alpha_i \,|\, i < \lambda\} \subset \kappa^\lambda$. Wegen $\overline{\overline{\alpha_i}} < \kappa^\lambda$ folgt mit 10.27:

$$\kappa^\lambda = \overline{\overline{\kappa^\lambda}} = \overline{\overline{\bigcup_{i<\lambda} \alpha_i}} \le \overline{\overline{\bigcup_{i<\lambda} \alpha_i \times \{i\}}} = \sum_{i<\lambda} \overline{\overline{\alpha_i}} \overset{\text{König}}{<} \prod_{i<\lambda} \kappa^\lambda = \big(\kappa^\lambda\big)^\lambda = \kappa^\lambda,$$

ein Widerspruch. QED

10.30 Bemerkung Manchmal wird auch das zuletzt bewiesene Corollar als Lemma von König bezeichnet. Gelegentlich werden auch wir uns dieser Sprechweise bedienen.

10.31 Beispiel Wegen $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ scheiden alle Kardinalzahlen, die abzählbare Konfinalität haben, als Wert für $2^{\aleph_0}$ aus. So ist etwa $2^{\aleph_0} \notin \{\aleph_{\omega\cdot\alpha} \,|\, \alpha < \omega_1\}$. ($\cdot$ bezeichnet hier die ordinale Multiplikation.)

Eine der wenigen allgemeinen Regeln für die Kardinalzahlexponentiation ist die folgende, von Hausdorff gefundene Rekursionsformel:

10.32 Satz (Hausdorffsche Rekursionsformel) *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *und* $\lambda \in \mathrm{Cd}\setminus\{0\}$. *Dann gilt* $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$.

Beweis. zu „$\ge$“. Wegen $\lambda \ge 1$ ist $\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ \le (\kappa^+)^\lambda \cdot (\kappa^+)^\lambda$.
zu „$\le$“. Wir unterscheiden 2 Fälle:
Fall 1. $\lambda \ge \kappa^+$. Dann ist $\kappa^+ \le \kappa^\kappa \le \kappa^\lambda$, also $(\kappa^+)^\lambda \le \kappa^{\lambda\cdot\lambda} = \kappa^\lambda \le \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$.
Fall 2. $\lambda \le \kappa$. Da κ^+ regulär ist, ist dann der Wertebereich einer jeden Funktion $f\colon \lambda \to \kappa^+$ beschränkt in κ^+. Es folgt

$$(\kappa^+)^\lambda = \overline{\overline{\{f \,|\, f\colon \lambda \to \kappa^+\}}} = \overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa^+} \{f \,|\, f\colon \lambda \to \alpha\}}} \le \sum_{\alpha<\kappa^+} \overline{\overline{{}^\lambda\alpha}} = \sum_{\alpha<\kappa^+} \underbrace{\overline{\overline{\alpha}}}_{\le\kappa}{}^\lambda \le \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda.$$

Damit ist alles bewiesen. QED

Wir wissen, daß $\kappa^\lambda = \kappa$ für $\lambda < \omega$ und $\kappa^\kappa > \kappa$ ist. Also gibt es ein λ_0 mit $\aleph_0 \le \lambda_0 \le \kappa$ mit

$$\kappa^\lambda \begin{cases} = \kappa & \text{falls } \lambda < \lambda_0, \\ > \kappa & \text{falls } \lambda \ge \lambda_0. \end{cases}$$

Der nächste Satz gibt eine obere Schranke für λ_0 an.

10.33 Satz *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *und* $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$*. Dann ist* $\kappa^\lambda > \kappa$*. Speziell: ist* $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$*, so ist* $\kappa^\lambda > \kappa$ *für alle* $\lambda \in \mathrm{Card}$.

Beweis. Natürlich ist $\kappa^\lambda \geq \kappa$. Wegen $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ kann hier keine Gleichheit gelten. QED

Wir haben gesehen, daß über den Wert von κ^λ wenig Aussagen gemacht werden können. Auch wenn wir uns auf den Fall $\kappa = 2$ beschränken, wissen wir wenig mehr, als daß $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$ ist. Dieses Problem läßt sich lösen, wenn man die Kontinuumshypothese auf jede Kardinalzahl $\lambda > \aleph_0$ verallgemeinert. Wir sprechen dann von der *verallgemeinerten Kontinuumshypothese*:

10.34 Definition GCH $:\equiv \forall\alpha\; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ heißt **verallgemeinerte Kontinuumshypothese** (engl.: **generalised continuum hypothesis**).

GCH wurde von Hausdorff in die Mathematik eingeführt. Man kann zeigen, daß **GCH** von **ZFC** unabhängig ist: ist **ZFC** konsistent, so sind auch **ZFC** + **GCH** und **ZFC** + ¬ **GCH** konsistent. Durch **GCH** ist das Verhalten der Kardinalzahlexponentiation vollständig bestimmt:

10.35 Satz *Es gelte* **ZFC** + **GCH**.
(a) *Für* $\kappa < \aleph_0$, $\kappa \geq 2$ *und* $\lambda \in \mathrm{Card}$ *gilt* $\kappa^\lambda = \lambda^+$.
(b) *Es sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *und* $\lambda \in \mathrm{Cd} \setminus \{0\}$*. Dann gilt*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa, & \text{falls } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^+, & \text{falls } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa, \\ \lambda^+, & \text{falls } \kappa \leq \lambda. \end{cases}$$

Beweis. zu (a). Es ist $\kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda \leq \kappa^\lambda$, also $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$ nach **GCH**.
zu (b). Sei zunächst $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Dann ist der Wertebereich einer jeden Funktion $f\colon \lambda \to \kappa$ beschränkt in κ.

$$\begin{aligned} \kappa^\lambda &= \overline{\overline{\{f \mid f\colon \lambda \to \kappa\}}} \\ &= \overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} \{f \mid f\colon \lambda \to \alpha\}}} \leq \sum_{\alpha<\kappa} \overline{\overline{{}^\lambda\alpha}} \\ &\leq \sum_{\alpha<\kappa} \overline{\overline{{}^{\max\{\lambda,\alpha\}}\max\{\lambda,\alpha\}}} \leq \sum_{\alpha<\kappa} \underbrace{\overline{\overline{\max\{\lambda,\alpha\}}}^{\overline{\overline{\max\{\lambda,\alpha\}}}}}_{\overset{\mathbf{GCH}}{=} \overline{\overline{\max\{\lambda,\alpha\}}}^+ \leq \kappa} \\ &\leq \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa \leq \kappa^\lambda. \end{aligned}$$

Nun sei $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$. Nach 10.33 ist dann $\kappa^\lambda \geq \kappa^+$. Es folgt: $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa \overset{\mathbf{GCH}}{=} \kappa^+ \leq \kappa^\lambda$. Dies war zu zeigen.

Sei abschließend $\kappa \leq \lambda$. Dann gilt $\lambda^+ \overset{\mathbf{GCH}}{=} 2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda \overset{\mathbf{GCH}}{=} \lambda^+$. Also sind in dieser Kette alle Werte gleich, d.h., $\lambda^+ = \kappa^\lambda$.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Die Operation $\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}$ ist im System **ZFC** im wesentlichen bestimmt durch

(i) $\alpha < \beta \longrightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$.

(ii) $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

Mit Hilfe der von Cohen entwickelten *Forcing*-Methode kann man z.B. Modelle von **ZFC** konstruieren, in denen $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ oder $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ oder $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$ ist, siehe etwa 31.10. Nach einem Resultat von Easton ist es – vereinfacht gesprochen – sogar möglich, für die Werte der Funktion $\lambda \mapsto 2^\lambda$ an den regulären Stellen λ jeden „vernünftigen“ Wert vorzuschreiben. Hierbei bedeutet „vernünftig“, daß die vorgeschriebenen Werte $F(\lambda)$ ($\lambda \in$ Card, λ regulär) den Bedingungen (i) und (ii) von oben genügen müssen: $F(\lambda_0) \leq F(\lambda_1)$ für $\lambda_0 < \lambda_1$, $\mathrm{cf}(F(\lambda)) > \lambda$ und $F(\lambda) > \lambda$.

An den singulären Stellen hat man dagegen weitaus weniger Freiheiten. Wir erwähnen das folgende Reflexionsresultat von Silver: Ist λ singulär aber $\mathrm{cf}(\lambda) > \aleph_0$, und „gilt **GCH** unterhalb von λ" (d.h., $\kappa < \lambda \longrightarrow 2^\kappa = \kappa^+$), so „gilt **GCH** auch an der Stelle λ" (d.h., $2^\lambda = \lambda^+$).[79]

11 Unendliche Kombinatorik.

11.1 Ein Schubfachprinzip.

Sollen n Objekte in $m < n$ Schubfächer abgelegt werden, so müssen in mindestens ein Schubfach zwei oder mehr Objekte eingelegt werden. Die Übertragung auf unendlich viele Objekte lautet:

11.1 Satz (Schubfachprinzip) *Sei κ regulär, $\lambda < \kappa$ und $f\colon \kappa \to \lambda$. Dann existiert $z \subset \kappa$ mit $\overline{\overline{z}} = \kappa$, so daß gilt: $\forall \alpha, \beta \in z\ f(\alpha) = f(\beta)$.*

Beweis. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Für $\gamma < \lambda$ ist dann $\overline{\overline{f^{-1}\big[\{\gamma\}\big]}} < \kappa$. Aus der Regularität von κ folgt deshalb $\alpha_\gamma :\equiv \sup f^{-1}\big[\{\gamma\}\big] < \kappa$. Andererseits ist $\kappa = \bigcup_{\gamma<\lambda} f^{-1}\big[\{\gamma\}\big] \subset \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_\gamma \subset \kappa$. Also ist $\{\alpha_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ eine in κ unbeschränkte Menge von Kardinalität $\leq \lambda < \kappa$. Dies widerspricht der Regularität von κ. QED

11.2 Der Satz von Ramsey.

Um das nächste Resultat, den Satz von Ramsey[80], einfach formulieren zu können, benötigen wir eine Bezeichnung für die Menge der n-elementigen Teilmengen einer Menge. Wir definieren allgemeiner:

11.2 Definition Sei $\kappa \in$ Cd und $x \in V$.

(a) $[x]^\kappa :\equiv \big\{u \bigm| u \subset x \wedge \overline{\overline{u}} = \kappa\big\}$.

(b) $[x]^{<\kappa} :\equiv \big\{u \bigm| u \subset x \wedge \overline{\overline{u}} < \kappa\big\}$.

Die Kardinalität von $[x]^\kappa$ läßt sich leicht berechnen:

11.3 Lemma *Sei $\overline{\overline{x}} \geq \aleph_0$ und $\kappa \in$ Cd mit $\kappa \leq \overline{\overline{x}}$. Dann gilt $\overline{\overline{[x]^\kappa}} = \overline{\overline{x}}^\kappa$. Ist x endlich, so gilt $\overline{\overline{x}} = \binom{\overline{\overline{x}}}{\kappa} \leq \overline{\overline{x}}^\kappa$.*

Beweis. Die Aussage über endliches x ist wohlbekannt. Wir beweisen die Aussage über unendliches x.
zu „$\leq$". Für $u \in [x]^\kappa$ sei $g_u\colon \kappa \xrightarrow{bij.} u$ und $\iota_u\colon u \hookrightarrow x$ sei die Inklusion. Dann ist durch $u \mapsto \iota_u \circ g_u$ eine Injektion von $[x]^\kappa$ in ${}^\kappa x$ gegeben. Also $\overline{\overline{[x]^\kappa}} \leq \overline{\overline{{}^\kappa x}}$.
zu „$\geq$". Wegen ${}^\kappa x \subset [\kappa \times x]^\kappa$ folgt $\overline{\overline{{}^\kappa x}} \leq \overline{\overline{[\kappa \times x]^\kappa}}$. Da $\overline{\overline{[y]^\kappa}}$ nur von $\overline{\overline{y}}$ (und κ) abhängt und $\overline{\overline{\kappa \times x}} = \kappa \cdot \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}}$ ist, folgt die Behauptung. QED

Um die Kardinalität von $[x]^{<\kappa}$ zu bestimmen, benötigen wir den in folgender Definition festgelegten Kardinalzahlterm.

11.4 Definition Seien $\kappa, \lambda \in$ Cd. Dann sei $\lambda^{<\kappa} :\equiv \sup_{\alpha \in \mathrm{Cd} \cap \kappa} \lambda^\alpha$.

11.5 Lemma *Ist $\kappa \geq \aleph_0$ und $\lambda \geq 2$ so gilt*

[79] Weitere Informationen hierzu findet man z.B. in [9].

[80] Frank Plumpton Ramsey (22.2.1903, Cambridge–19.1.1930, Cambridge) lehrte Mathematik und Logik in Cambridge; ab 1924 Mitglied des King's College und College's Director of Studies in Mathematics. Ramsey findet den im Haupttext angegebenen Satz im Jahr 1927.

(a) $\lambda^{<\kappa} \geq \kappa$.
(b) $\lambda^{<\kappa} = \sum_{\alpha\in \mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\alpha$.

Beweis. zu (a). Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1. $\kappa = \mu^+$. Dann gilt $\lambda^{<\kappa} = \lambda^\mu \geq 2^\mu > \mu$, woraus $\lambda^{<\kappa} \geq \mu^+ = \kappa$ folgt.
Fall 2. κ ist eine Limeskardinalzahl. Dann gilt $\lambda^{<\kappa} = \sup_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\alpha \geq \sup_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \alpha = \kappa$.
Damit ist (a) gezeigt.

zu (b). zu „$\leq$". Ist $\beta \in \mathrm{Cd}\cap\kappa$, so gilt $\lambda^\beta \leq \sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\alpha$ und somit $\sup_{\beta\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\beta \leq \sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\alpha$.
zu „$\geq$". Mit (a) folgt $\sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^\alpha \leq \sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \lambda^{<\kappa} \leq \kappa\cdot\lambda^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

11.6 Lemma *Ist* $\overline{\overline{x}} \geq \aleph_0$ *und* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *mit* $\kappa \leq \overline{\overline{x}}^{\,+}$, *so gilt* $\overline{\overline{[x]^{<\kappa}}} = \overline{\overline{x}}^{<\kappa}$.

Beweis. zu „$\leq$". Wegen $[x]^{<\kappa} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} [x]^\alpha$ folgt

$$\overline{\overline{[x]^\alpha}} \leq \sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \overline{\overline{[x]^\alpha}} = \sum_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\kappa} \overline{\overline{x}}^\alpha = \overline{\overline{x}}^{<\kappa}.$$

zu „$\geq$". Ist $\alpha \in \mathrm{Cd}\cap\kappa$, so ist $[x]^{<\kappa} \supset [x]^\alpha$ und folglich

$$\overline{\overline{[x]^{<\kappa}}} \geq \overline{\overline{[x]^\alpha}} = \overline{\overline{x}}^\alpha.$$

Dies impliziert $\overline{\overline{[x]^{<\kappa}}} \geq \sup_{\alpha\in\mathrm{Cd}\cap\mu} \overline{\overline{x}}^\alpha = \overline{\overline{x}}^{<\kappa}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir kommen nun zum bereits angesprochenen Satz von Ramsey.

11.7 Satz (Satz von Ramsey) *Sei* $n < \omega$ *und* $f\colon [\omega]^n \to 2$. *Dann existiert ein* $X \subset \omega$ *mit* $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, *so daß gilt:* $\forall u, v \in [X]^n\ f(u) = f(v)$. *Wir nennen* f *eine* **Partition**, *da* f *die Menge* $[\omega]^n$ *in zwei Teile zerlegt* ($f^{-1}\big[\{0\}\big]$ *und* $f^{-1}\big[\{1\}\big]$), *und sagen* X **ist homogen für die Partition** f.

Beweis. Wir machen Induktion nach $n < \omega$.

$n = 0$. Wegen $[\omega]^0 = \{\emptyset\}$ können wir $X :\equiv \omega$ wählen.

$n = m + 1$. *Idee:* Jedes $u \in [\omega]^{m+1}$ kann geschrieben werden als $u = \{i\} \cup u'$, wobei $i = \min u$ und $u' \in [\omega]^m$. Durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf Zuordnungen der Art $u' \mapsto f(\{i\} \cup u')$ ($\min u' \geq i + 1$, $\overline{\overline{u'}} = m$) finden wir eine unendliche Menge $Y \subset \omega$ mit $f(u) = f(v)$, falls $u, v \in [Y]^n$ mit $\min u = \min v$. Eine Anwendung des Schubfachprinzips läßt dann auf einer unendlich großen Menge die Abhängigkeit von dem Minimum verschwinden.
Ausführung: Für $i < \omega$ definiere $f_i\colon [\omega \setminus (i + 1)]^m \to 2$ durch $f_i(u') :\equiv f(\{i\} \cup u')$. Definiere rekursiv Mengen $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ wie folgt:
Sei $X_0 :\equiv \omega$.
Ist X_i mit $\overline{\overline{X_i}} = \aleph_0$ bereits definiert, so sei X_{i+1} homogen für $f_i \restriction [X_i]^m$ mit $\overline{\overline{X_{i+1}}} = \aleph_0$; die Existenz von X_{i+1} folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Es ist $X_{i+1} \subset X_i$.
Definiere für $k < \omega$ ein $i_k < \omega$ rekursiv wie folgt: $i_0 :\equiv 0$, $i_{k+1} :\equiv \min\big(X_{i_k} \setminus (i_k + 1)\big)$. Für $Y :\equiv \{i_k \mid k < \omega\}$ gilt dann:

(1) $\forall u, v \in [Y]^n\ \big(\min u = \min v \longrightarrow f(u) = f(v)\big)$.
M.a.W.: sind $u', v' \in [Y]^m$ und ist $i \in Y$ mit $\min u' > i$ und $\min v' > i$, so ist $f(\{i\} \cup u') = f(\{i\} \cup v')$.

Beweis. Sei $i :\equiv \min u = \min v$ und $u' :\equiv u \setminus \{i\}$ sowie $v' :\equiv v \setminus \{i\}$. Man sieht leicht, daß dann $u', v' \in [X_i]^m$ gilt, und es ist $f(u) = f_i(u') = f_i(v') = f(v)$. qed(1)

Definiere nun $g: Y \to 2$ durch $g(i) :\equiv f(\{i\} \cup u')$, wobei $u' \in [Y]^m$ beliebig mit $\min u' > i$. (Nach (1) ist g wohldefiniert.) Wähle nach Schubfachprinzip 11.1 ein $X \subset Y$ mit $\overline{\overline{X}} = \omega$, so daß g auf X konstant ist. Sind dann $u, v \in [X]^n$ beliebig vorgegeben, so folgt mit $i :\equiv \min u$, $u' :\equiv u \setminus \{i\}$ sowie $j :\equiv \min v$ und $v' :\equiv v \setminus \{i\}$: $f(u) = f(\{i\} \cup u') \overset{(1)}{=} g(i) = g(j) \overset{(1)}{=} f(\{j\} \cup v') = f(v)$.
Damit ist der Satz von Ramsey bewiesen. QED

Die Aussage des Satzes von Ramsey und ähnlicher Partitionstheoreme kann knapper durch die im folgenden definierte Schreibweise ausgedrückt werden:

11.8 Definition Seien $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Cd}$ und sei $n < \omega$.
Setze $\kappa \to (\mu)^n_\lambda :\equiv \forall f \exists x \left(f: [\kappa]^n \to \lambda \longrightarrow (x \subset \kappa \wedge \overline{\overline{x}} \geq \mu \wedge \forall u, v \in [x]^n \; f(u) = f(v))\right)$.

11.9 Bemerkung (a) Der Satz von Ramsey besagt: $\forall n < \omega \; \aleph_0 \to (\aleph_0)^n_2$.

(b) Natürlich kann man in der obigen Definition κ und λ durch beliebige Mengen der Kardinalität κ bzw. λ ersetzen.

(c) Gilt $\kappa \to (\mu)^n_\lambda$, so gilt eine entsprechende Aussage auch, wenn man die Zahl auf der linken Seite des Pfeils nicht verkleinert und die Zahlen auf der rechten Seite des Pfeiles nicht vergrößert: aus $\kappa \to (\mu)^n_\lambda$ folgt $\kappa' \to (\mu')^{n'}_{\lambda'}$, wobei $\kappa' \geq \kappa$, $\lambda' \leq \lambda$, $\mu' \leq \mu$ und $n' \leq n$. Wir werden diese Tatsache im folgenden häufiger benutzen, ohne stets darauf hinzuweisen.

Kann man den Satz von Ramsey auf überabzählbare Kardinalzahlen verallgemeinern, speziell: gilt $\aleph_1 \to (\aleph_1)^2_2$? Wir zeigen hierzu zunächst:

11.10 Satz $\forall \kappa \, \neg (2^\kappa \to (\kappa^+)^2_2)$.

Beweis. Angenommen, es gäbe κ mit $2^\kappa \to (\kappa^+)^2_2$. Sei $<$ die lexikographische Ordnung von ${}^\kappa 2$, d.h., $f < g :\equiv \exists \delta < \kappa \, (f \restriction \delta = g \restriction \delta \wedge f(\delta) < g(\delta))$. Dann gilt:

(1) Es gibt eine bzgl. $<$ strikt wachsende κ^+-Folge in ${}^\kappa 2$.

Beweis. Es genügt, eine Teilmenge $X \subset {}^\kappa 2$ mit $\overline{\overline{X}} = \kappa^+$ zu finden, so daß X von $<$ wohlgeordnet wird. Wegen $\overline{\overline{X}} = \kappa^+$ ist dann nämlich $\kappa^+ \leq \mathrm{otp}(X, <)$, so daß X eine bezüglich $<$ strikt wachsende κ^+-Folge enthält. Zum Nachweis der Existenz einer derartigen Menge sei $\prec$ eine Wohlordnung von ${}^\kappa 2$. Definiere $F: [{}^\kappa 2]^2 \to 2$ durch

$$F(\{f, g\}) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } < \text{ und } \prec \text{ auf } \{f, g\} \text{ übereinstimmen,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Widerspruchsannahme existiert ein $X \subset {}^\kappa 2$ mit $\overline{\overline{X}} = \kappa^+$, so daß F auf $[X]^2$ konstant ist. Ist $F(u) = 0$ für alle $u \in [X]^2$, so stimmt $<$ auf X mit der Wohlordnung $\prec$ überein. Also wird X von $<$ wohlgeordnet, und X ist wie benötigt. Ist $F(u) = 1$ für alle $u \in [X]^2$, so stimmt $>$ auf X mit der Wohlordnung $\prec$ überein. Definiere $\pi: {}^\kappa 2 \to {}^\kappa 2$ durch $\pi(f) :\equiv 1 - f$. Dann stimmt $<$ auf $X' :\equiv \{\pi(f) \mid f \in X\}$ mit der Wohlordnung $\prec$ überein und X' ist wie benötigt. qed(1)

Sei $X = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subset {}^\kappa 2$ eine strikt wachsende κ^+-Folge. Sei $\gamma \leq \kappa$ minimal mit $\overline{\overline{\{f_\alpha \restriction \gamma \mid \alpha < \kappa^+\}}} = \kappa^+$. Dann existiert ein $Y \subset X$ mit $\overline{\overline{Y}} = \kappa^+$ und $f \restriction \gamma \neq g \restriction \gamma$ für alle $f, g \in Y$. Durch Übergang zu einer Teilfolge von X können wir $Y = X$ erreichen. Dann gilt $f_\alpha < f_{\alpha+1}$ sowie $f_\alpha \restriction \gamma \neq f_{\alpha+1} \restriction \gamma$ für alle $\alpha < \kappa^+$. Also existiert für jedes $\alpha < \kappa^+$ ein $\delta_\alpha < \gamma$ mit $f_\alpha \restriction \delta_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \delta_\alpha$ und $f_\alpha(\delta_\alpha) = 0$, $f_{\alpha+1}(\delta_\alpha) = 1$. Nach dem Schubfachprinzip existiert dann ein $\delta < \gamma$ mit $\delta_\alpha = \delta$ für κ^+-viele $\alpha < \kappa^+$. Wir können o.E. annehmen: $\delta_\alpha = \delta$ für alle $\alpha < \kappa^+$. (Sonst gehen wir zu einer Teilfolge von X über.) Es gilt:

(2) $\quad \alpha < \beta < \kappa^+ \longrightarrow f_\alpha \restriction \delta \neq f_\beta \restriction \delta.$

Beweis. Andernfalls wäre $f_{\alpha+1} \restriction \delta = f_\alpha \restriction \delta = f_\beta \restriction \delta$ und $f_{\alpha+1}(\delta) = 1$ wegen $\delta = \delta_\alpha$; wegen $\delta = \delta_\beta$ ist andererseits $f_\beta(\delta) = 0$. Insgesamt folgt $f_\beta < f_{\alpha+1}$. Wegen $\alpha < \beta$ ist aber $f_{\alpha+1} \leq f_\beta$, ein Widerspruch. Also muß (2) doch richtig sein. qed(2)

Aus (2) folgt $\overline{\overline{\{f_\alpha \restriction \delta \,|\, \alpha < \kappa^+\}}} = \kappa^+$. Wegen $\delta < \gamma$ widerspricht dies der Wahl von γ. Damit ist der Satz bewiesen. QED

11.11 Corollar $\forall \alpha \neg (\aleph_{\alpha+1} \to (\aleph_{\alpha+1})^2_2)$.

Beweis. Hätten wir $\aleph_{\alpha+1} \to (\aleph_{\alpha+1})^2_2$, so wegen $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$ auch $2^{\aleph_\alpha} \to (\aleph_{\alpha+1})^2_2$, was dem Satz widerspricht. QED

11.11 zeigt, daß es nur „sehr wenige“ Kardinalzahlen $\kappa > \aleph_0$ geben kann, auf die sich die Aussage des Satzes von Ramsey übertragen läßt, für die also $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gilt. Diese heißen „schwach kompakt“:

11.12 Definition κ ist **schwach kompakt** $:\equiv \kappa > \omega \wedge \kappa \to (\kappa)^2_2$.

Aus 11.11 folgt, daß schwach kompakte Kardinalzahlen Limeskardinalzahlen sein müssen. Sie sind ein weiteres Beispiel für Große Kardinalzahlen. Wir zeigen:

11.13 Satz *Ist κ schwach kompakt, so ist κ unerreichbar.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Regularität von κ. Angenommen, $\lambda :\equiv \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Dann ist $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} x_\xi$, wobei die x_ξ paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen und von kleinerer Kardinalität als κ sind. (Wähle etwa eine strikt wachsende Folge $(\kappa_\xi | \xi < \lambda)$ mit Supremum κ (wobei o.E. $\kappa_0 = 0$ sei) und setze $x_\xi :\equiv [\kappa_\xi, \kappa_{\xi+1}[$.) Definiere $f\colon [\kappa]^2 \to 2$ durch

$$f(\{\alpha,\beta\}) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha,\beta \in x_\xi \text{ für ein } \xi < \lambda, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da κ schwach kompakt ist, existiert ein $X \subset \kappa$ mit $\overline{\overline{X}} = \kappa$, so daß f auf $[X]^2$ konstant ist.
Ist $f(u) = 0$ für $u \in [X]^2$, so existiert wegen der Disjunktheit der x_ξ ein $\zeta < \lambda$ mit $X \subset x_\zeta$. Also ist $\overline{\overline{x_\zeta}} \geq \overline{\overline{X}} = \kappa$, im Widerspruch zur Wahl der x_ξ.
Ist $f(u) = 1$ für alle $u \in [X]^2$, so liegen je zwei Elemente von X in verschiedenen Mengen der Partition $(x_\xi | \xi < \lambda)$. Hierdurch wird auf kanonische Weise eine Injektion $g\colon X \to \lambda$ induziert: man ordnet $\alpha \in X$ dasjenige $\xi < \lambda$ zu, für das $\alpha \in x_\xi$ gilt. Dann ist aber $\kappa = \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, im Widerspruch zur Annahme $\lambda < \kappa$.
Damit ist die Regularität von κ bewiesen.
Sei nun $\lambda < \kappa$ beliebig. Wäre $2^\lambda \geq \kappa$, so hätten wir $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$ wegen der schwachen Kompaktheit von κ, was 11.10 widerspricht. Es muß also $2^\lambda < \kappa$ sein.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir haben bei der Einführung des Begriffes „unerreichbar“ erwähnt, daß die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl in **ZFC** nicht bewiesen werden kann, siehe auch 22.12. 11.13 impliziert also:

11.14 Corollar *Die Existenz einer schwach kompakten Kardinalzahl kann in* **ZFC** *nicht bewiesen werden.*

11.15 Bemerkung Eine schwach kompakte Kardinalzahl ist in der Tat sehr groß. Sie ist die κ-te unerreichbare Kardinalzahl.[81]

[81] Dieses und weiteres zu schwach kompakten Kardinalzahlen findet man z.B. in [21], pp.381ff.

Wir beschließen unsere Untersuchungen den Satz von RAMSEY betreffend mit der Darstellung einer geometrisch-topologischen Konsequenz dieses Satzes. Bei ihrer Formulierung helfen die in der folgenden Definition erklärten Begriffe.

11.16 Definition Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$. Dann bezeichne

$$\triangle(x_1, x_2, x_3) :\equiv \{r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \wedge r_1 + r_2 + r_3 = 1 \wedge r_1, r_2, r_3 \geq 0\}$$

das **von x_1, x_2, x_3 aufgespannte Dreieck**. Mit $\triangle^\circ(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnen wir das (topologische) Innere von $\triangle(x_1, x_2, x_3)$.

11.17 Bemerkung Wenn x_1, x_2, x_3 nicht alle auf einer Geraden liegen, so ist $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ das Dreieck (genauer: die Dreiecksfläche inkl. der Seitenstrecken) mit den Eckpunkten x_1, x_2, x_3. $\triangle^\circ(x_1, x_2, x_3)$ ist in diesem Fall die Dreiecksfläche ohne die Seitenstrecken. Liegen x_1, x_2, x_3 auf einer Geraden, etwa x_2 zwischen x_1 und x_3, so ist $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ die Strecke zwischen x_1 und x_3 (inkl. x_1 und x_3)[82] und $\triangle^\circ(x_1, x_2, x_3) = \emptyset$.

Aus dem Satz von RAMSEY folgt:

11.18 Satz *Sei $Z \subset \mathbb{R}^2$ unendlich. Dann existiert ein unendliches $X \subset Z$, so daß folgendes gilt: sind x_0, x_1, x_2, x_3 vier paarweise verschiedene Elemente von X, so liegt x_0 nicht im Inneren des von x_1, x_2, x_3 aufgespannten Dreiecks.*

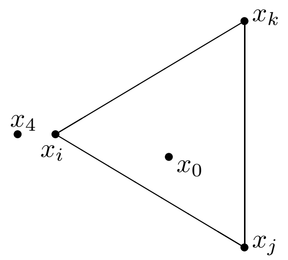
BEWEIS. Wenn es eine unendliche Teilmenge G von Z gibt, so daß alle Punkte von G auf einer Geraden liegen, so leistet G das Verlangte, da das topologische Innere eines zu einer Strecke ausgearteten Dreiecks leer ist. Wir können also nun annehmen:

(∗) Z trifft jede Gerade des $\mathbb{R}^2$ nur in endlich vielen Punkten.

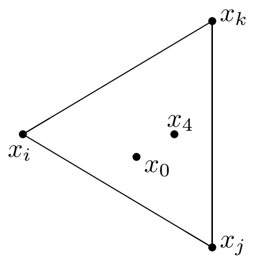
Durch Ausdünnen können wir $\overline{\overline{Z}} = \aleph_0$ erreichen. Definiere nun $f\colon [Z]^4 \to 2$ durch

$$f(u) :\equiv \begin{cases} 1, & \text{falls es paarweise verschiedene } x_0, x_1, x_2, x_3 \in u \text{ gibt mit } x_0 \in \triangle^\circ(x_1, x_2, x_3), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

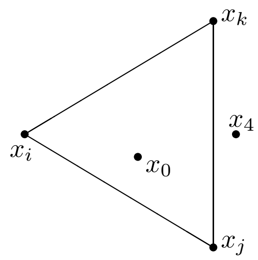
Sei $X \subset Z$ mit $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, so daß X homogen für f ist. Es ist zu zeigen, daß $f\big[[X]^4\big] = \{0\}$ ist. Nehmen wir also das Gegenteil an, d.h., $f\big[[X]^4\big] = \{1\}$. Wähle paarweise verschiedene Punkte $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, so daß nur jeweils zwei von ihnen auf einer Geraden liegen.[83] Wegen $f(\{x_0, \ldots, x_3\}) = 1$ können wir außerdem $x_0 \in \triangle^\circ(x_1, x_2, x_3)$ annehmen. Für die Lage von x_4 relativ zu x_1, x_2, x_3 sind dann genau drei Fälle möglich:



Fall 1



Fall 2



Fall 3

wobei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. In Fall 1 ist $f(\{x_0, x_i, x_j, x_4\}) = 0$; in Fall 2 ist $f(\{x_0, x_i, x_k, x_4\}) = 0$; in Fall 3 ist $f(\{x_0, x_j, x_k, x_4\}) = 0$. Dies widerspricht der Voraussetzung $f\big[[X]^4\big] = \{1\}$. Da wir in jedem Fall zu einem Widerspruch kommen, muß diese Annahme falsch sein, d.h., $f\big[[X]^4\big] = \{0\}$ gelten. Dies war zu zeigen. QED

[82] Wir wollen dies als ausgeartetes Dreieck bezeichnen.
[83] Diese Wahl ist möglich wegen (∗) und weil X unendlich ist.

11.3 Delta-Systeme.

Wir betrachten eine Familie von Mengen. Haben je zwei verschiedene dieser Mengen dieselbe Schnittmenge, so nennen wir die Familie ein Δ-System:

11.19 Definition $(a_i|i \in I)$ sei eine eine Sequenz von Mengen. $(a_i|i \in I)$ heißt **Δ-System** (mit **Wurzel** d), falls gilt: $\forall i, j \in I\ (i \neq j \longrightarrow a_i \cap a_j = d)$.

In vielen Bereichen[84] ist es wichtig zu wissen, daß eine vorgelegte Familie von Mengen zu einem Δ-System ausgedünnt werden kann. Der nächste Satz gibt ein Kriterium dafür an, unter welchen Umständen ein derartiges Ausdünnen möglich ist.

11.20 Satz (Allgemeiner Δ-System-Satz) *Seien $\kappa < \lambda$ Kardinalzahlen. λ sei regulär und es gelte $\forall \alpha < \lambda\, \forall \beta < \kappa\ \overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\beta}}} < \lambda$. Sei $(a_i|i \in I)$ eine Folge und es gelte $\overline{\overline{I}} \geq \lambda$ sowie $\forall i \in I\ \overline{\overline{a_i}} < \kappa$. Dann existiert ein $J \subset I$ mit $\overline{\overline{J}} \geq \lambda$, so daß $(a_i|i \in J)$ ein Δ-System ist.*

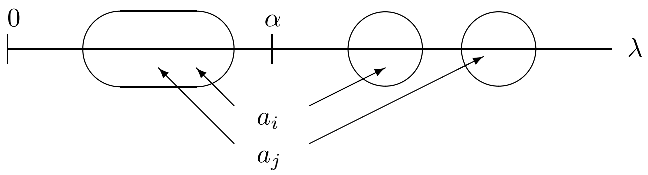
Beweis. Wegen $\overline{\overline{I}} \geq \lambda$ können wir o.E. $I = \lambda$ annehmen. Dann ist $\overline{\overline{\bigcup_{i \in I} a_i}} = \overline{\overline{\bigcup_{i<\lambda} a_i}} \leq \lambda \cdot \kappa = \lambda$, so daß wir o.E. $a_i \subset \lambda$ für alle $i \in I$ annehmen können.

Wir dünnen I zunächst soweit aus, daß alle Mengen a_i denselben Ordnungstyp haben. Hierzu sei $\tau_i :\equiv \mathrm{otp}(a_i, <)$ und $h_i \colon \tau_i \xrightarrow{bij.} a_i$ die Inverse des Mostowski-Isomorphismus' von a_i. Wegen $\overline{\overline{a_i}} < \kappa$ ist $\tau_i < \kappa$; nach dem Schubfachprinzip existiert also ein $I_0 \subset I$ mit $\overline{\overline{I_0}} = \lambda$ und ein $\tau < \kappa$, so daß $\tau_i = \tau$ für alle $i \in I_0$ gilt.

Für $\xi < \tau$ und $i \in I_0$ ist dann $h_i(\xi)$ das ξ-te Element von a_i. Setze $\alpha_\xi :\equiv \sup\{h_i(\xi) \,|\, i \in I_0\}$. Wegen $h_i(\xi) < \lambda$ für alle $i \in I_0$ ist $\alpha_\xi \leq \lambda$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $\forall \xi < \tau\ \alpha_\xi < \lambda$. (D.h., für jedes ξ ist die Folge der ξ-ten Elemente der a_i beschränkt unter λ.) Da $\tau < \lambda$ und λ regulär ist, ist die Menge $\{\alpha_\xi \,|\, \xi < \tau\}$ beschränkt in λ. Also existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $\alpha_\xi < \alpha$ für alle $\xi < \tau$. Für $i \in I_0$ ist dann $h_i(\xi) \leq \alpha_\xi < \alpha$ für alle $\xi < \tau$. Also gilt $h_i \in {}^\tau\alpha$ für alle $i \in I_0$. Wegen $\overline{\overline{{}^\tau\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\tau}}} < \lambda$ und $\overline{\overline{I_0}} = \lambda$ folgt aus dem Schubfachprinzip die Existenz einer Menge $I_1 \subset I_0$ mit $\overline{\overline{I_1}} = \lambda$ und eines $h \in {}^\tau\alpha$, so daß $h_i = h$ für alle $i \in I_1$ gilt. Für $i, j \in I_1$ ist dann $a_i = h_i[\tau] = h[\tau] = h_j[\tau] = a_j$. Also ist $(a_i|i \in I_1)$ trivialerweise ein Δ-System, und der Beweis ist für Fall 1 abgeschlossen.

Fall 2. $\exists \xi < \tau\ \alpha_\xi = \lambda$. (D.h., für mindestens ein $\xi < \tau$ reicht die Folge der ξ-ten Elemente der a_i bis an λ heran.) Unser Ziel ist, I_0 zunächst soweit auszudünnen, daß die a_i unterhalb eines geeigneten $\alpha < \lambda$ übereinstimmen, und dann nochmals auszudünnen, bis die a_i oberhalb von α disjunkt sind.



(Dann ist der Schnitt eines a_i mit einem a_j für $i \neq j$ gerade der für alle verbleibenden Mengen übereinstimmende Teil unterhalb von α.) Sei ξ_0 minimal mit $\alpha_{\xi_0} = \lambda$. Um die folgenden Überlegungen leichter darstellen zu können, nehmen wir o.E. folgende Vereinfachungen der Schreibweise vor:

1. Wegen $\overline{\overline{I_0}} = \lambda$ können wir o.E. $I_0 = \lambda$ annehmen.
2. Da λ regulär und $\{h_i(\xi_0) \,|\, i < \lambda\}$ konfinal in λ ist, muß diese Menge Ordnungstyp λ haben. Durch Übergang zu einer Teilfolge und Umnumerieren der a_i $(i < \lambda)$ können wir dann o.E. $h_i(\xi_0) < h_j(\xi_0)$ für $i < j < \lambda$ annehmen:[85] um dies einzusehen sei $f \colon \lambda \xrightarrow{bij.} \{h_i(\xi_0) \,|\, i < \lambda\}$ die Inverse des Mostowski-Isomorphismus'. Für $\eta < \lambda$ sei $i_\eta :\equiv \min\{i < \lambda \,|\, h_i(\xi_0) = f(\eta)\}$. Für $\eta < \nu < \lambda$

[84] z.B. bei Kompatibilitätsbeweisen in Forcing-Konstruktionen.

[85] Diese Modifikation wird durchgeführt, damit wir für jedes $I' \subset \lambda$ mit $\overline{\overline{I'}} = \lambda$ auch $\sup\{h_i(\xi_0) \,|\, i \in I'\} = \lambda$ haben.

gilt dann $h_{i_\eta}(\xi_0) = f(\eta) < f(\nu) = h_{i_\nu}(\xi_0)$. Ferner ist $\{h_{i_\eta}(\xi_0) \mid \eta < \lambda\} = \{h_i(\xi_0) \mid i < \lambda\}$, also $\sup\{h_{i_\eta}(\xi_0) \mid \eta < \lambda\} = \lambda$. Für $\xi < \xi_0$ ist $\sup\{h_{i_\eta}(\xi) \mid \eta < \lambda\} \le \sup\{h_i(\xi) \mid i < \lambda\} = \alpha_\xi < \lambda$. Betrachten wir also $(a_{i_\eta} | \eta < \lambda)$ statt $(a_i | i < \lambda)$ und definieren die α_ξ für diese Sequenz (d.h., $\alpha_\xi = \sup\{h_{i_\eta}(\xi) \mid \eta < \lambda\}$), so ist weiterhin $\xi_0 = \min\{\xi < \tau \mid \alpha_\xi = \lambda\}$; zusätzlich ist $(h_{i_\eta}(\xi_0) | \eta < \lambda)$ strikt wachsend mit Supremum λ.

Da $\xi_0 < \lambda$, λ regulär und $\alpha_\xi < \lambda$ für $\xi < \xi_0$ ist, existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $\alpha_\xi < \alpha$ für $\xi < \xi_0$. Da $\{h_i(\xi_0) \mid i < \lambda\}$ konfinal in λ und strikt wachsend ist, existiert ein Endstück I_1 von λ, so daß $h_i(\xi_0) > \alpha$ für alle $i \in I_1$ ist. Für diese i gilt dann $h_i(\xi) < \alpha$ falls $\xi < \xi_0$ und $h_i(\xi) \geq \alpha$ falls $\tau > \xi \ge \xi_0$. Hieraus folgt $a_i \cap \alpha = h_i[\xi_0]$ wegen $a_i = h_i[\tau]$; speziell: $h_i \upharpoonright \xi_0 \in {}^{\xi_0}\alpha$. Wegen $\overline{\overline{{}^{\xi_0}\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\xi_0}}} < \lambda$ impliziert das Schubfachprinzip die Existenz einer Menge $I_2 \subset I_1$ mit $\overline{\overline{I_2}} = \lambda$, so daß für alle $i, j \in I_2$ gilt $h_i \upharpoonright \xi_0 = h_j \upharpoonright \xi_0$. Hieraus folgt $a_i \cap \alpha = a_j \cap \alpha$ für solche i, j. Diese Schnittmenge sei mit d bezeichnet.
Um weiter auszudünnen, bis die a_i oberhalb von α disjunkt sind, definiere rekursiv eine Funktion $f\colon \lambda \to I_2$ durch $f(0) :\equiv \min I_2$ und $f(\gamma) :\equiv \min\{i \in I_2 \mid h_i(\xi_0) > \sup \bigcup_{\delta<\gamma} a_{f(\delta)}\}$, falls $\gamma > 0$. f ist wohldefiniert: sind nämlich die Werte $f(\delta)$ für $\delta < \gamma$ bereits gemäß der Rekursionsvorschrift bestimmt, so gilt

$$\overline{\overline{\bigcup_{\delta<\gamma} a_{f(\delta)}}} \le \sum_{\delta<\gamma} \overline{\overline{a_{f(\delta)}}} = \underbrace{\overline{\overline{\gamma}}}_{<\lambda} \cdot \underbrace{\sup_{\delta<\gamma} \underbrace{\overline{\overline{a_{f(\delta)}}}}_{<\lambda}}_{<\lambda,\text{ da }\lambda\text{ regulär ist.}} < \lambda.$$

Also ist diese Menge beschränkt in λ. Da I_2 wegen $\overline{\overline{I_2}} = \lambda$ in λ nicht beschränkt und die Folge $(h_i(\xi_0)|i < \lambda)$ strikt wachsend und konfinal in λ ist, ist auch $(h_i(\xi_0)|i \in I_2)$ konfinal in λ. Also existiert ein $i \in I_2$, so daß $\sup \bigcup_{\delta<\gamma} a_{f(\delta)} < h_i(\xi_0)$ gilt; dies beweist die Wohldefiniertheit von f. Da f injektiv ist ($\delta < \gamma$ impliziert $h_{f(\gamma)}(\xi_0) > \sup a_{f(\delta)} \ge h_{f(\delta)}(\xi_0)$), ist $J :\equiv \operatorname{ran}(f)$ von Kardinalität λ. Wir zeigen, daß $(a_i|i \in J)$ ein Δ-System mit Wurzel d ist. Hierzu seien $i, j \in J$ mit $i \neq j$, etwa $i = f(\delta)$, $j = f(\gamma)$ mit $\delta < \gamma$. Dann ist $\sup a_i < h_j(\xi_0)$ nach Definition von f, also $a_i \subset h_j(\xi_0)$. Da $a_j \cap [\alpha, h_j(\xi_0)[= \emptyset$ gilt, folgt $a_i \cap a_j \subset \alpha$ und somit $a_i \cap a_j = (a_i \cap \alpha) \cap (a_j \cap \alpha) = d$.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Der Δ-System-Satz wird oft auf überabzählbare Familien endlicher Mengen angewendet:

11.21 Corollar *Sei $(a_i|i \in I)$ eine Folge mit $\forall i \in I\ \overline{\overline{a_i}} < \aleph_0$ und $\overline{\overline{I}} \ge \aleph_1$. Dann existiert eine Menge $J \subset I$ mit $\overline{\overline{J}} \ge \aleph_1$, so daß $(a_i|i \in J)$ ein Δ-System ist.*

Beweis. Setze im Satz $\kappa :\equiv \aleph_0$ und $\lambda :\equiv \aleph_1$ und beachte, daß für $n < \aleph_0$ sowie $\alpha < \aleph_1$ gilt $\overline{\overline{\alpha}}^n \le \aleph_0^n = \aleph_0 < \aleph_1$. QED

11.4 Abgeschlossen unbeschränkte und stationäre Mengen und der Satz von Fodor.

Ist x eine Teilmenge einer Limesordinalzahl δ, so daß x jede Limesordinalzahl α enthält, in der $x \cap \alpha$ konfinal[86] ist, so sagen wir, x ist abgeschlossen in δ:

11.22 Definition Sei δ eine Limesordinalzahl.

(a) x ist **abgeschlossen** in δ $:\equiv x \subset \delta \wedge \forall\alpha < \delta\big((\operatorname{Lim}(\alpha) \wedge \underbrace{\forall\beta < \alpha \exists\gamma < \alpha\, (\gamma > \beta \wedge \gamma \in x)}_{\text{d.h., } x\cap\alpha \text{ ist konfinal in } \alpha}) \to \alpha \in x\big)$.

(b) x ist **abgeschlossen unbeschränkt** in δ $:\equiv$ x ist abgeschlossen in δ und unbeschränkt in δ.

[86] siehe 10.21.

11.23 Bemerkung (a) Die Bezeichnung *abgeschlossen* erklärt sich so: betrachtet man die Topologie auf δ, die von der Subbasis $\mathcal{S} :\equiv \{\emptyset\} \cup \{[0,\alpha[\,|\,\alpha < \delta\} \cup \{]\alpha,\delta[\,|\,\alpha < \delta\}$ erzeugt wird,[87] so sind die gemäß 11.22 als abgeschlossen bezeichneten Mengen gerade die bzgl. dieser Topologie abgeschlossenen Mengen.

(b) Statt *abgeschlossen unbeschränkt* ist auch der englische Begriff **closed unbounded** bzw. dessen Abkürzung **club** üblich.

11.24 Satz *Sei* $\mathrm{cf}(\delta) > \aleph_0$*. Ferner sei* $\theta < \mathrm{cf}(\delta)$ *und für* $i < \theta$ *sei* c_i *club in* δ*. Dann ist auch* $\bigcap_{i<\theta} c_i$ *club in* δ*.*

Beweis. Sei $c :\equiv \bigcap_{i<\theta} c_i$.

(1) c ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $\alpha < \delta$ eine Limesordinalzahl und es sei $c \cap \alpha$ konfinal in α. Leicht folgt, daß dann auch $c_i \cap \alpha$ konfinal in α ist für jedes $i < \theta$. Da c_i abgeschlossen ist, folgt $\alpha \in c_i$ für jedes $i < \theta$, also $\alpha \in c$. qed(1)

(2) c ist unbeschränkt.

Beweis. Sei $\alpha < \delta$ beliebig. Es ist $c \cap]\alpha, \delta[\neq \emptyset$ zu verifizieren. Wir konstruieren hierzu unten durch Rekursion nach $n < \omega$ Folgen $(\alpha_{n,i} | i < \theta)$ und Ordinalzahlen $\beta_n < \delta$, so daß folgendes gilt:

(i) $\alpha < \beta_n < \beta_{n+1}$.

(ii) $\forall i < \theta\ (\beta_n < \alpha_{n,i} < \beta_{n+1} \wedge \alpha_{n,i} \in c_i)$.

(iii) $\forall i < j\ \alpha_{n,i} < \alpha_{n,j}$.

Setzt man dann $\beta :\equiv \sup_{n<\omega} \beta_n$, so ist $\alpha < \beta < \delta$ wegen (i) und $\mathrm{cf}(\delta) > \aleph_0$. Wir zeigen $\beta \in c_i$ für jedes $i < \theta$, was $\beta \in c$ impliziert. Sei also $i < \theta$. Da β wegen (i) eine Limesordinalzahl und c_i abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß $c_i \cap \beta$ konfinal in β ist. Sei also $\gamma < \beta$. Nach Definition von β existiert ein $n < \omega$ mit $\beta_n > \gamma$. Nach (ii) ist $\alpha_{n,i} > \beta_n$ und $\alpha_{n,i} \in c_i$. Damit ist die Konfinalität von $c_i \cap \beta$ in β gezeigt.
Es bleibt, die Konstruktion durchzuführen. Setze $\beta_0 :\equiv \alpha + 1$. Ist β_n definiert so definiere $(\alpha_{n,i} | i < \theta)$ durch Rekursion über i wie folgt: sei $\alpha_{n,j}$ für $j < i$ definiert. Da $i < \theta < \mathrm{cf}(\delta)$ gilt, ist $\eta :\equiv \sup\big(\{\alpha_{n,j}\,|\,j < i\} \cup \{\beta_n\}\big) < \delta$. Da c_i unbeschränkt in δ ist, existiert $\nu \in c_i$ mit $\nu > \eta$. $\alpha_{n,i} :\equiv \nu$ leistet dann das Verlangte.
Setze abschließend $\beta_{n+1} :\equiv \sup\{\alpha_{n,i}\,|\,i < \theta\}$. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

11.25 Bemerkung Die Aussage des Satzes gilt nicht, falls $\mathrm{cf}(\delta) = \aleph_0$: als Gegenbeispiel betrachte $\delta :\equiv \omega_\omega$, $\theta :\equiv 2$ sowie $c_0 :\equiv \{\omega_{2n}\,|\,n < \omega\}$ und $c_1 :\equiv \{\omega_{2n+1}\,|\,n < \omega\}$. Der Satz gilt ebenfalls nicht, falls $\theta \geq \mathrm{cf}(\delta)$: wähle nämlich eine strikt wachsende Folge $(\delta_i | i < \mathrm{cf}(\delta))$ mit Supremum δ und setze für $i < \theta$

$$c_i :\equiv \begin{cases} [\delta_i, \delta[, & \text{falls } i < \mathrm{cf}(\delta) \\ \delta, & \text{falls } \mathrm{cf}(\delta) \leq i < \theta. \end{cases}$$

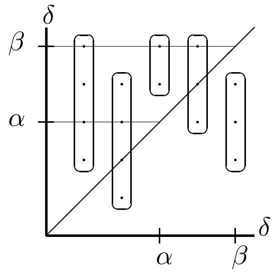
Dann ist $\bigcap_{i<\theta} c_i = \emptyset$, also nicht unbeschränkt.

Wenn wir die Durchschnittbildung auf geeignete Weise modifizieren, ist bei regulärem und überabzählbarem δ auch der (so modifizierte) Schnitt von δ-vielen club-Mengen wieder eine club-Menge in δ:

11.26 Definition Sei $c_i \subset \delta$ für $i < \delta$.

$$\mathop{\Delta}_{i<\delta} c_i :\equiv \left\{ \alpha < \delta \,\middle|\, \alpha \in \bigcap_{i<\alpha} c_i \right\}$$

heißt **Diagonalschnitt** von $\{c_i | i < \delta\}$.



(hier ist $\alpha \in \Delta_{i<\delta}\, c_i$ und $\beta \notin \Delta_{i<\delta}\, c_i$)

[87] Eine Menge y ist bzgl. dieser Topologie genau dann offen, wenn y eine Vereinigung von Mengen ist, von denen jede ein Schnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{S}$ ist.

11.27 Satz *Sei $\delta > \omega$ regulär. Für $i < \delta$ sei c_i abgeschlossen unbeschränkt in δ. Dann ist auch $\Delta_{i<\delta} c_i$ abgeschlossen unbeschränkt in δ.*

Beweis. Sei $c :\equiv \Delta_{i<\delta} c_i$.

(1) c ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $\alpha < \delta$ eine Limesordinalzahl und $c \cap \alpha$ sei konfinal in α. Es ist $\alpha \in c$, d.h., $\alpha \in c_i$ für alle $i < \alpha$ zu zeigen. Sei also $i < \alpha$. Da c_i abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß $c_i \cap \alpha$ konfinal in α ist. Hierzu genügt es, eine in α konfinale Menge $x \subset c_i \cap \alpha$ zu finden. Da $c \cap \alpha$ konfinal in α und $i < \alpha$ ist, ist $x :\equiv c \cap]i, \alpha[$ konfinal in α. Wegen $x = (c \cap]i, \delta[) \cap \alpha = \{\gamma < \delta \mid \gamma \in \bigcap_{j<\gamma} c_j \wedge \gamma > i\} \cap \alpha \subset c_i \cap \alpha$ ist also x wie benötigt. qed(1)

(2) c ist unbeschränkt.

Beweis. Sei $\alpha < \delta$ beliebig. Definiere rekursiv eine strikt wachsende Folge $(\beta_n | n < \omega)$ wie folgt:
Sei $\beta_0 :\equiv \alpha + 1$. Sei nun $\beta_n < \delta$ bereits definiert. Da δ regulär und überabzählbar ist, ist nach 11.24 $\bigcap_{i<\beta_n} c_i$ abgeschlossen unbeschränkt in δ. Also ist $]\beta_n, \delta[\cap \bigcap_{i<\beta_n} c_i \neq \emptyset$ und wir können $\beta_{n+1} :\equiv \min\big(]\beta_n, \delta[\cap \bigcap_{i<\beta_n} c_i\big)$ setzen.
Sei dann $\beta :\equiv \sup_{n<\omega} \beta_n$. Da $\delta > \omega$ und regulär ist, ist $\beta < \delta$. Nach Wahl der β_n ist $\alpha < \beta$. Es bleibt zu zeigen, daß $\beta \in c$, d.h., $\beta \in c_i$ für $i < \beta$ ist. Sei also $i < \beta$. Es genügt es zu verifizieren, daß $c_i \cap \beta$ konfinal in β ist. Sei also $\gamma < \beta$. Wir können o.E. $\gamma > i$ annehmen. Es ist $c_i \cap]\gamma, \beta[\neq \emptyset$ zu zeigen. Wähle hierzu $n < \omega$ mit $\beta_n > \gamma$. Dann ist $i < \beta_n$, und es folgt $\beta_{n+1} \in \bigcap_{j<\beta_n} c_j \subset c_i$. Wegen $\beta_{n+1} > \beta_n > \gamma$ und $\beta_{n+1} < \beta$ ist also β_{n+1} wie benötigt. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

11.28 Bemerkung Die Aussage des Satzes gilt nicht, falls δ singulär ist. Ist nämlich $\mathrm{cf}(\delta) < \delta$ so wähle eine strikt wachsende Folge $(\delta_i | i < \mathrm{cf}(\delta))$ mit Supremum δ und setze

$$c_i :\equiv \begin{cases} [\delta_i, \delta[, & \text{falls } i < \mathrm{cf}(\delta) \\ \delta, & \text{falls } \mathrm{cf}(\delta) \leq i < \delta. \end{cases}$$

Dann ist $\bigcap_{i<\theta} c_i = \emptyset$, falls $\mathrm{cf}(\delta) \leq \theta < \delta$ und folglich $\Delta_{i<\delta} c_i \subset \mathrm{cf}(\delta) < \delta$. Auch im Fall $\delta = \omega$ gilt die Aussage des Satzes nicht: setzt man

$$c_i :\equiv \begin{cases} \{2n \mid n < \omega\}, & \text{falls } i = 0 \\ \{2n+1 \mid n < \omega\}, & \text{falls } 1 \leq i < \omega, \end{cases}$$

so ist $\Delta_{i<\omega} c_i = \{0\}$.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung einer regulären, überabzählbaren Kardinalzahl κ.

11.29 Definition s ist **stationär** in $\kappa :\equiv s \subset \kappa \wedge \forall c\,(c \text{ club in } \kappa \longrightarrow s \cap c \neq \emptyset)$.

„Stationär“ ist schwächer als „club“ aber stärker als „unbeschränkt“:

11.30 Lemma *(a) x ist club in $\kappa \Rightarrow x$ ist stationär in $\kappa \Rightarrow x$ ist unbeschränkt in κ.*
(b) Der Schnitt einer stationären mit einer club-Menge ist stationär.

Beweis. Dies ist eine leichte Übung. QED

Das folgende Resultat besagt, daß Funktionen von einer überabzählbaren, regulären Kardinalzahl in sich selbst, die nicht „zu stark“ wachsen, auf einer „großen“ Menge konstant sind:

11.31 Satz (Satz von Fodor[88]) *Sei $\kappa > \omega$ regulär, s sei stationär in κ und $f\colon s \to \kappa$ sei* **regressiv**, *d.h., es gilt $\forall \alpha \in s\ f(\alpha) < \alpha$. Dann existiert ein $t \subset s$, so daß t stationär in κ und f auf t konstant ist.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann ist $u_i :\equiv f^{-1}\big[\{i\}\big]$ für $i < \kappa$ nicht stationär in κ. D.h., es existiert eine club-Menge c_i mit $c_i \cap u_i = \emptyset$. $c :\equiv \Delta_{i<\kappa}\, c_i$ ist abgeschlossen unbeschränkt. Da s stationär ist, existiert ein $\alpha \in c \cap s$. Dann ist einerseits $f(\alpha)$ definiert, andererseits ist $\alpha \in c_i$ für $i < \alpha$, was auf $\alpha \notin u_i$ für $i < \alpha$ führt. Somit ist $f(\alpha) \neq i$ für alle $i < \alpha$, was der Regressivität von f widerspricht. QED

Mit Hilfe des Begriffes der stationären Menge kann man eine weitere Familie von Großen Kardinalzahlen definieren.

11.32 Definition κ ist eine **Mahlo[89]-Kardinalzahl**, falls κ regulär und $\{\lambda < \kappa \,|\, \lambda \text{ ist unerreichbar}\}$ stationär in κ ist.

11.33 Bemerkung Statt „κ ist eine Mahlo-Kardinalzahl“ sagt man manchmal kurz: „κ ist Mahlo“.

Mahlo-Kardinalzahlen sind Große Kardinalzahlen:

11.34 Satz *Ist κ Mahlo, so ist κ unerreichbar.*

Beweis. Nach Definition ist κ regulär.
Ist $\mu < \kappa$, so ist $]\mu, \kappa[$ club in κ. Also ist $]\mu, \kappa[\cap \{\lambda < \kappa \,|\, \lambda \text{ ist unerreichbar}\} \neq \emptyset$, d.h., es existiert ein unerreichbares $\lambda < \kappa$ mit $\lambda > \mu$. Dann ist $2^\mu < \lambda < \kappa$. Dies war zu zeigen. QED

11.35 Corollar *Die Existenz einer Mahlo-Kardinalzahl kann in* **ZFC** *nicht bewiesen werden.*

11.36 Bemerkung Ohne Beweis[90] notieren wir, daß jede schwach kompakte Kardinalzahl Mahlo ist. Außerdem ist die Menge der Mahlo-Kardinalzahlen unterhalb einer schwach kompakten Kardinalzahl κ stationär in κ. Die kleinste schwach kompakte Kardinalzahl ist also „viel größer“ als die kleinste Mahlo-Kardinalzahl, und diese ist „viel größer“ als die kleinste unerreichbare Kardinalzahl (falls derartige Zahlen überhaupt existieren).

12 Filter und Ultrafilter.

12.1 Filter auf partiellen Ordnungen.

Wir fixieren eine schwache partielle Ordnung $(P, \leq) \in V$.

12.1 Definition Seien $p, q \in P$.

(a) p und q sind **kompatibel** $:\equiv p \parallel q :\equiv \exists r \in P\ (r \leq p \wedge r \leq q)$.

(b) p und q sind **inkompatibel** $:\equiv p \perp q :\equiv \neg\, p \parallel q$.

12.2 Definition Sei $F \subset P$, $F \neq \emptyset$. F ist ein **Filter** auf P genau dann, wenn die folgenden Aussagen gelten:

(i) F ist **nach oben abgeschlossen**, d.h., $\forall p, q \in P\ \big((p \in F \wedge p \leq q) \longrightarrow q \in F\big)$.

(ii) Je zwei Elemente von F sind kompatibel in F, d.h., $\forall p, q \in F\, \exists r \in F\ (r \leq p \wedge r \leq q)$.

Ein Filter F heißt **eigentlicher Filter**, falls $F \neq P$ ist, und **uneigentlicher Filter**, falls $F = P$ gilt.

[88] Geza Fodor
[89] Derartige Kardinalzahlen wurden erstmals 1911–1913 von Paul Mahlo betrachtet.
[90] Er geht über den Rahmen eines einführenden Textes hinaus und kann etwa in [21], p.386f, gefunden werden.

12.3 Beispiel Sei a eine Menge und $P :\equiv \mathrm{Pot}(a)$. Die Inklusion $\subset$ induziert auf P eine partielle Ordnung, bzgl. der je zwei Elemente kompatibel sind. Für $F \subset P$, $F \neq \emptyset$ gilt: F ist ein Filter genau dann, wenn folgende Aussagen gelten:

(i) F ist gegen Obermengenbildung abgeschlossen: $\forall p \in F\, \forall q \in P\, (p \subset q \longrightarrow q \in F)$.

(ii) F ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen: $\forall p, q \in F\; p \cap q \in F$.

Jeder Filter F enthält zumindest a. F ist genau dann ein eigentlicher Filter, wenn $\emptyset \notin F$ gilt. Aufgrund dieser Tatsachen sagt man manchmal, ein eigentlicher Filter F legt fest, welche Elemente von P „groß“ und welche „klein“ sind. Wir vereinbaren: In der Situation $P = \mathrm{Pot}(a)$, $\leq = \subset$ stehe „Filter“ immer für „eigentlicher Filter“. Weiter vereinbaren wir: statt „Filter auf $\mathrm{Pot}(a)$“ sagen wir meist kurz „Filter auf a“.

Beweis. Die Beweise der oben stehenden Aussagen sind leicht und verbleiben dem Leser. QED

Man sieht leicht durch Induktion nach $n < \omega$, daß unterhalb von je endlich vielen Elementen eines Filters noch ein weiteres Filterelement liegt: $\forall n < \omega\, \forall E \subset F\, (\overline{\overline{E}} < n \longrightarrow \exists p \in F\, \forall q \in E\; p \leq q)$. Da dies für unendliche Mengen E nicht gelten muß, definieren wir:

12.4 Definition Sei F ein Filter und $\kappa \in \mathrm{Card}$.
F ist **κ-vollständig** $:\equiv \forall E \subset F\, (\overline{\overline{E}} < \kappa \longrightarrow \exists p \in F\, \forall q \in E\; p \leq q)$.

12.5 Beispiel Ein Filter auf $\mathrm{Pot}(a)$ ist genau dann κ-vollständig, wenn $\bigcap E \in F$ ist für alle $E \subset F$ mit $\overline{\overline{E}} < \kappa$.

Ein sehr einfaches Beispiel für Filter sind die „Hauptfilter“:

12.6 Definition Sei $F \subset P$. F heißt **Hauptfilter**, falls es ein $p_0 \in P$ gibt mit $F = \{p \in P \,|\, p_0 \leq p\}$.

12.7 Bemerkung Man sieht leicht, daß jeder Hauptfilter ein Filter ist.

12.2 Filter auf Potenzmengen.

Von besonderer Bedeutung sind die „Ultrafilter“, die für jede Teilmenge entweder diese Menge selbst oder deren Komplement enthalten:

12.8 Definition Sei F ein (eigentlicher) Filter auf a.
F heißt **Ultrafilter**, falls gilt: $\forall x \subset a\, (x \in F \longleftrightarrow a \setminus x \notin F)$.
Ein Ultrafilter, der ein Hauptfilter ist, heißt **Hauptultrafilter** oder auch **prinzipaler Ultrafilter**.

12.9 Lemma *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) F ist ein prinzipaler Ultrafilter.

(ii) Es gibt ein $x_0 \in a$ mit $\{x_0\} \in F$.

In diesem Fall ist x_0 eindeutig bestimmt und $F = \{p \subset a \,|\, x_0 \in p\}$.

Beweis. „(i)⇒(ii)“. Da F ein Hauptfilter ist, existiert ein $p_0 \subset a$ mit $F = \{p \subset a \,|\, p_0 \subset p\}$. Da F ein eigentlicher Filter ist, ist $p_0 \neq \emptyset$. Gäbe es andererseits in p_0 zwei verschiedene Elemente x_0, x_1, so könnte weder $\{x_0\}$ noch $a \setminus \{x_0\}$ zu F gehören, was der Ultrafiltereigenschaft widerspricht. Also ist $p_0 = \{x_0\}$ für ein x_0. Wäre noch $\{x_1\} \in F$ mit $x_1 \neq x_0$, so wäre $\emptyset = \{x_0\} \cap \{x_1\} \in F$, im Widerspruch dazu, daß F ein eigentlicher Filter ist.

„(ii)⇒(i)“. Sei $p_0 :\equiv \{x_0\}$. Es genügt, $F = \{p \subset a \,|\, p_0 \subset p\}$ zu zeigen, da die Menge auf der rechten Seite ein Hauptfilter ist, der wegen $p_0 \neq \emptyset$ ein eigentlicher Filter ist, und ein Ultrafilter, da er für jedes $p \subset a$ genau diejenige der beiden Mengen p bzw. $a \setminus p$ enthält, die x_0 enthält.
zu „$\subset$“. Sei $p \in F$. Dann ist $p_0 \cap p \in F$ wegen $p_0 \in F$ und somit $p_0 \cap p \neq \emptyset$, was $p_0 \subset p$ impliziert.

zu „$\supset$“. Dies folgt sofort aus der Abgeschlossenheit von F gegen Obermengen und $p_0 \in F$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Ultrafilter sind $\subset$-maximale Filter:

12.10 Lemma *U ist genau dann ein Ultrafilter auf a, wenn U $\subset$-maximales Element in*

$$\mathcal{F} :\equiv \{F \subset \mathrm{Pot}(a) \,|\, F \text{ ist ein (eigentlicher) Filter auf } a\}$$

ist.

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Sei U ein Ultrafilter auf a. Dann ist $U \in \mathcal{F}$. Ist $F \in \mathcal{F}$ beliebig mit $U \subset F$ und ist $x \in F$ beliebig, so ist entweder $x \in U$ oder $a \setminus x \in U$. Im letzten Fall wäre wegen $U \subset F$ auch $a \setminus x \in F$, was auf $\emptyset = x \cap (a \setminus x) \in F$ führt, im Widerspruch dazu, daß F ein eigentlicher Filter ist. Also ist $x \in U$, so daß $U = F$ gilt.

zu „$\Leftarrow$“. Sei U $\subset$-maximales Element von $\mathcal{F}$. Dann ist U ein Filter. Um zu sehen, daß U ein Ultrafilter ist, fixiere $x \subset a$ beliebig. Es ist $x \in U$ bzw. $a \setminus x \in U$ zu zeigen. Ist $x \notin U$, so ist $x \neq a$ und somit $x^* :\equiv a \setminus x \neq \emptyset$. Betrachte $F :\equiv \{y \subset a \,|\, \exists p \in U \; y \supset p \cap x^*\}$: Es ist $U \cup \{x^*\} \subset F$ und F ist ein Filter auf a, da für $y_1, y_2 \in F$ mit $y_i \supset p_i \cap x^*$, $p_i \in U$, gilt

$$y_1 \cap y_2 \supset \underbrace{(p_1 \cap p_2)}_{\in U} \cap x^*.$$

Der Filter F ist eigentlich: $\emptyset \in F$ impliziert $p \cap x^* = \emptyset$ für ein $p \in U$, was $p \subset x$ und damit wegen des Abschlusses von U gegen Obermengen $x \in U$ nach sich zieht. Dies widerspricht der Voraussetzung. Damit ist gezeigt, daß F ein eigentlicher Filter auf a ist, der $U \cup \{x^*\}$ erweitert. Wegen der Maximalität von U muß dann $U = F$ sein, was $x^* \in U$ impliziert. Also ist U ein Ultrafilter.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

12.3 Das Ultrafiltertheorem.

Wir entwickeln nun ein Kriterium dafür, wann sich eine Teilmenge $E \subset \mathrm{Pot}(a)$ zu einem Ultrafilter erweitern läßt. Hierzu ist der folgende Begriff der Schlüssel:

12.11 Definition Sei $E \subset \mathrm{Pot}(a)$.
E hat die **endliche Durchschnittseigenschaft** $:\equiv \forall E' \subset E\, (\overline{\overline{E'}} < \aleph_0 \longrightarrow \bigcap E' \neq \emptyset)$.

12.12 Satz (Ultrafiltertheorem) *$E \subset \mathrm{Pot}(a)$ kann genau dann zu einem Ultrafilter F auf a erweitert werden, wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft hat.*

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Wenn es einen Ultrafilter U gibt mit $E \subset U$, so hat E die endliche Durchschnittseigenschaft, da U als eigentlicher Filter $\aleph_0$-vollständig ist und $\emptyset$ nicht enthält.

zu „$\Leftarrow$“. E habe die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei

$$F :\equiv \left\{ y \subset a \,\middle|\, \exists E' \subset E \left(\overline{\overline{E'}} < \aleph_0 \wedge y \supset \bigcap E'\right)\right\}.$$

F heißt **der von E erzeugte Filter**.

(1) F ist ein eigentlicher Filter auf a, der E umfaßt.

Beweis. Da E die endliche Durchschnittseigenschaft hat, ist $\emptyset \notin F$. Daß F gegen Obermengenbildung abgeschlossen ist, ist klar. Gilt $y_1 \supset \bigcap E'$ und $y_2 \supset \bigcap E''$ mit $E', E'' \subset E$ endlich, so ist

$$y_1 \cap y_2 \supset \bigcap \underbrace{(E' \cup E'')}_{\subset E \text{ endlich}},$$

also $y_1 \cap y_2 \in F$. Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Nach dem Lemma von Zorn wähle nun ein $\subset$-maximales Element U in

$$\mathcal{F} :\equiv \{G \subset \operatorname{Pot}(a) \mid F \subset G \wedge G \text{ ist ein eigentlicher Filter auf } a\}.$$

(Zorns Lemma darf angewendet werden, da für eine $\subset$-Kette von Filtern deren Vereinigung wiederum ein Filter ist.) Als $\subset$-maximaler Filter ist U ein Ultrafilter, siehe 12.10. QED

12.13 Corollar *Jeder (eigentliche) Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.*

Beweis. Jeder eigentliche Filter hat die endliche Durchschnittseigenschaft. QED

12.14 Beispiel Sei a eine unendliche Menge. Dann ist $F :\equiv \{x \subset a \mid a \setminus x \text{ ist endlich}\}$ ein Filter auf a. Er heißt **Filter der coendlichen Mengen**. Jeder Ultrafilter $U \supset F$ ist ein nicht-prinzipaler Ultrafilter auf a. Insbesondere existiert auf jeder unendlichen Menge ein nicht-prinzipaler Ultrafilter. Ist a endlich, so ist jeder Ultrafilter U auf a ein Hauptfilter, da $p_0 :\equiv \bigcap U$ als Durchschnitt endlich vieler Mengen wieder in U liegt; es gilt offenbar $U = \{p \subset a \mid p_0 \subset p\}$.

12.4 Normale Ultrafilter und meßbare Kardinalzahlen.

12.15 Definition Sei $\kappa > \aleph_0$ und U ein Ultrafilter auf κ. U heißt **normal**, falls folgende Aussagen gelten:

(NU1) U ist nichtprinzipal.

(NU2) U ist κ-vollständig.

(NU3) U ist unter Diagonalschnitten abgeschlossen, d.h., ist $x_i \in U$ für $i < \kappa$, so ist $\Delta_{i<\kappa} x_i \in U$.

12.16 Lemma *Die Bedingung (NU3) kann ersetzt werden durch:*

(NU3') Ist $x \in U$ und $f\colon x \to \kappa$ regressiv, so existiert ein $y \in U$ mit $y \subset x$, so daß f auf y konstant ist.[91]

Beweis. zu „(NU3)⇒(NU3')". Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Satzes von Fodor 11.31: Gilt (NU3') nicht, so ist für jedes $i < \kappa$ $f^{-1}\big[\{i\}\big] \notin U$. Da U ein Ultrafilter ist, ist dann $x_i :\equiv \kappa \setminus f^{-1}\big[\{i\}\big] \in U$. Aus (NU3) folgt $\Delta_{i<\kappa} x_i \in U$. Da U eigentlich ist, existiert $\alpha \in x \cap \Delta_{i<\kappa} x_i$. Dann ist $\alpha \in x_i$ für $i < \alpha$, also $f(\alpha) \neq i$ für $i < \alpha$, was der Regressivität von f widerspricht.

zu „(NU3')⇒(NU3)". Sei $x_i \in U$ für $i < \kappa$. Angenommen, $\Delta_{i<\kappa} x_i \notin U$. Dann ist $x :\equiv \kappa \setminus \Delta_{i<\kappa} x_i \in U$. Wegen

$$x = \Big\{ i < \kappa \;\Big|\; i \notin \bigcap_{j<i} x_j \Big\} = \Big\{ i < \kappa \;\Big|\; i \in \bigcup_{j<i} (\kappa \setminus x_j) \Big\}$$

ist durch $f(i) :\equiv \min\{j < i \mid i \in \kappa \setminus x_j\}$ eine regressive Funktion $f\colon x \to \kappa$ gegeben. Nach (NU3') existiert ein $y \in U$, so daß f auf y konstant ist. f nehme auf y den Wert i an. Dann ist $y \subset \kappa \setminus x_i$, also $\kappa \setminus x_i \in U$ im Widerspruch zu $x_i \in U$. Also muß doch $\Delta_{i<\kappa} x_i \in U$ sein.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Mit Hilfe normaler Ultrafilter lassen sich Große Kardinalzahlen definieren:

[91] vgl. 11.31.

12.17 Definition κ heißt **meßbare Kardinalzahl**, falls es einen normalen Ultrafilter auf κ gibt.

12.18 Bemerkung Die Bezeichnung „meßbar" erklärt sich dadurch, daß durch

$$\mu(x) :\equiv \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in U, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein κ-additives[92], nicht-triviales[93] zweiwertiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Pot}(\kappa)$ definiert ist.

12.19 Satz *Ist κ meßbar, so ist κ schwach kompakt.*

Beweis. Der Beweis dieses allgemeinen Resultates würde den Rahmen dieses einführenden Textes sprengen. Er kann z.B. in [21], p.327, gefunden werden. Wir zeigen hier ein schwächeres Resultat und beweisen, daß jede meßbare Kardinalzahl unerreichbar ist. Sei also U ein normaler Ultrafilter auf κ.

(1) $\quad \forall \alpha < \kappa\ [\alpha, \kappa[\in U$.

Beweis. Wenn nicht gibt es ein kleinstes $\alpha \in]0, \kappa[$ mit $[\alpha, \kappa[\notin U$. Da U ein Ultrafilter ist, ist dann $\alpha \in U$; nach Definition von α ist $[\beta, \kappa[\in U$ für $\beta < \alpha$. Wegen der κ-Vollständigkeit von U ist also

$$p :\equiv \alpha \cap \bigcap_{\beta<\alpha} [\beta, \kappa[\in U.$$

Andererseits ist $p = \emptyset$, falls α eine Limesordinalzahl ist, und p ist einelementig, falls $\alpha = \beta + 1$. Ein nicht-prinzipaler Ultrafilter enthält aber keine derartigen Mengen! Der Widerspruch zeigt, daß (1) doch gelten muß. qed(1)

Aus (1) ergibt sich sofort die Regularität von κ: wäre nämlich $\lambda :\equiv \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, so wähle eine streng isotone Folge $(\alpha_i | i < \lambda)$ mit Limes κ. Wegen der κ-Vollständigkeit von U ist dann $\emptyset = \bigcap_{i<\lambda} [\alpha_i, \kappa[\in U$, ein Widerspruch.

Um zu sehen, daß $2^\lambda < \kappa$ für $\lambda < \kappa$ ist, nehmen wir an, daß ein $\lambda < \kappa$ existiert mit $2^\lambda \geq \kappa$. Dann existiert eine Teilmenge $X \subset {}^\lambda 2$ mit $\overline{\overline{X}} = \kappa$. Sei $h\colon X \xrightarrow{bij.} \kappa$. Dann ist $U' :\equiv \{h^{-1}[y] \mid y \in U\}$ ein κ-vollständiger nicht-prinzipaler Ultrafilter auf $\mathrm{Pot}(X)$. Für $\alpha < \lambda$ sei x_α diejenige der beiden Mengen $\{f \in X \mid f(\alpha) = 0\}$ bzw. $X \setminus \{f \in X \mid f(\alpha) = 0\} = \{f \in X \mid f(\alpha) = 1\}$, die zu U' gehört. i_α sei der von den Funktionen aus x_α angenommene Funktionswert. Da U' κ-vollständig ist, ist $x :\equiv \bigcap_{\alpha<\lambda} x_\alpha \in U'$. x kann aber nur eine Funktion, nämlich die durch $\alpha \mapsto i_\alpha$ gegebene Funktion enthalten. Da nicht-prinzipale Ultrafilter keine einelementigen Mengen enthalten, siehe 12.9, ergibt sich ein Widerspruch. Es kann also kein $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$ geben.

Damit ist die Unerreichbarkeit von κ bewiesen. QED

12.20 Bemerkung Für die bisher eingeführten Großen Kardinalzahlen ergibt sich somit:

meßbar $\Rightarrow$ schwach kompakt $\Rightarrow$ Mahlo $\Rightarrow$ unerreichbar.

Meßbare Kardinalzahlen sind also „sehr groß".

---

[92] D.h., ist $\alpha < \kappa$, $x_i \subset \kappa$ für $i < \alpha$, mit $x_i \cap x_j = \emptyset$ für $i < j$, so gilt $\mu\Big(\bigcup_{i<\alpha} x_i\Big) = \sum_{i<\alpha} \mu(x_i) (= \max\{\mu(x_i) \mid i < \alpha\})$.

[93] D.h., es ist $\mu(\{\alpha\}) = 0$ für jedes $\alpha < \kappa$.

Teil II.
Mathematische Logik.

13 Mathematische Strukturen.

13.1 Strukturen, Substrukturen und Redukte.

Wenn wir den angeordneten Körper der reellen Zahlen betrachten, so haben wir es mit einer Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit einer Relation $<_{\mathbb{R}}$, zwei Funktionen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nämlich der Addition und der Multiplikation) sowie zwei Elementen aus $\mathbb{R}$ (nämlich 0 und 1), die wir als Konstanten bezeichnen können, zu tun. Wir haben dies bei unserem Aufbau des Zahlsystems so ausgedrückt, daß wir von der *Struktur* der reellen Zahlen gesprochen haben. Auch andere mathematischen Objekte lassen sich in der Form

eine nicht-leere Menge + gewisse Relationen + gewisse Funktionen + gewisse Konstanten

darstellen, man denke etwa an Gruppen oder Ringe, aber z.B. auch an topologische Räume (man interpretiere die Menge der offenen Mengen als Sequenz von einstelligen Relationen). Dies motiviert die folgende Definition:

13.1 Definition Eine **(mathematische) Struktur** ist ein 5-Tupel

$$\mathfrak{A} = \big(A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K), t\big),$$

wobei folgendes gilt:

(i) A ist eine Menge, $A \neq \emptyset$. A heißt **Trägermenge** oder auch **Universum** von $\mathfrak{A}$. Wir setzen $|\mathfrak{A}| :\equiv A$.

(ii) I, J und K sind paarweise disjunkte Mengen.[94]

(iii) $t\colon I \cup J \to \omega$.

(iv) $\forall\, i \in I\ R_i \subset A^{t(i)}$.[95] R_i ist eine $t(i)$**-stellige Relation** auf A.

(v) $\forall\, j \in J\ f_j\colon A^{t(j)} \to A$. f_j ist eine $t(j)$**-stellige Funktion** auf A.

(vi) $\forall\, k \in K\ c_k \in A$. c_k ist eine **Konstante** aus A.

$L(\mathfrak{A}) :\equiv (I, J, K, t)$ heißt die **Sprache** von $\mathfrak{A}$ oder auch der **Typ** von $\mathfrak{A}$. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} :\equiv \overline{\overline{A}}$ ist die **Kardinalität** der Struktur $\mathfrak{A}$.

13.2 Definition Sei $\mathfrak{A}$ eine mathematische Struktur vom Typ (I, J, K, t).

(a) $\mathfrak{A}$ heißt **Algebra**, falls $I = \emptyset$.

(b) $\mathfrak{A}$ heißt **relationale Struktur**, falls $J = \emptyset$.

Eine Algebra umfaßt also keine Relationen, eine relationale Struktur umfaßt keine Funktionen.

13.3 Beispiel Die früher definierte Struktur der reellen Zahlen kann in unserer neuen, ausführlicheren Notation geschrieben werden als

$$\big(\mathbb{R}, \{(0, <_{\mathbb{R}})\}, \{(1, +_{\mathbb{R}}), (2, \cdot_{\mathbb{R}})\}, \{(3, 0), (4, 1)\}, \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\}\big),$$

wobei wir $I :\equiv \{0\}$, $J :\equiv \{1, 2\}$ und $K :\equiv \{3, 4\}$ gewählt haben. Die Sprache dieser Struktur ist also $(\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\})$.

Wir benennen im folgenden gewisse Beziehungen zwischen zwei Strukturen

$$\mathfrak{A} = \big(A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K), t\big) \text{ und } \mathfrak{A}' = \big(A', (R'_i|i \in I'), (f'_j|j \in J'), (c'_k|k \in K'), t'\big).$$

Wir setzen zur Abkürzung $L :\equiv L(\mathfrak{A})$ und $L' :\equiv L(\mathfrak{A}')$.

13.4 Definition $\mathfrak{A}$ ist ein **Redukt von** $\mathfrak{A}'$ (bzw. $\mathfrak{A}'$ ist eine **Expansion von** $\mathfrak{A}$), falls folgendes gilt:

[94] Es wird ausdrücklich zugelassen daß eine, zwei oder sogar alle drei dieser Mengen leer sind.

[95] Hierbei definieren wir B^n für jede Menge B und jedes $n < \omega$ rekursiv durch $B^0 :\equiv \emptyset$, $B^1 :\equiv B$, $B^{n+1} :\equiv B^n \times B$ falls $n \geq 1$.

(i) $A = A'$;
(ii) $I \subset I'$, $J \subset J'$, $K \subset K'$;
(iii) $t \subset t'$ (d.h., $t = t' \restriction I \cup J$);
(iv) $\forall i \in I\ R_i = R_i'$, $\forall j \in J\ f_j = f_j'$, $\forall k \in K\ c_k = c_k'$.

Bei Kenntnis von $\mathfrak{A}'$ ist $\mathfrak{A}$ durch (i) bis (iv) eindeutig festgelegt, und wir nennen $\mathfrak{A}$ **das L-Redukt** von $\mathfrak{A}'$. Wir schreiben dann auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction L$. Gelten (ii) und (iii) der obigen Aussagen, so nennen wir L ein **Redukt von** L' (bzw. L' eine **Expansion von** L) und schreiben $L \subset L'$ (bzw. $L' \supset L$).

Oft expandiert man eine Struktur $\mathfrak{A}$ durch Hinzufügen neuer Konstanten. Hierfür führen wir eine zweckmäßige Abkürzung ein:

13.5 Definition Sei $C \subset A$. Dann sei $(\mathfrak{A}, C)$ (bzw. $\big(\mathfrak{A}, (c|c \in C)\big)$) die Struktur $\big(A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k'|k \in K'), t\big)$, wobei $K' :\equiv K \cup C$ und

$$c_k' :\equiv \begin{cases} c_k, & \text{falls } k \in K \\ k, & \text{falls } k \in C. \end{cases}$$

Hierbei nehmen wir o.E. an, daß die Mengen I, J, K und C paarweise disjunkt sind.

13.6 Definition $\mathfrak{A}$ ist eine **Substruktur** von $\mathfrak{A}'$ (bzw. $\mathfrak{A}'$ eine **Oberstruktur** von $\mathfrak{A}$), falls gilt:
(i) $L = L'$;
(ii) $A \subset A'$;
(iii) $\forall i \in I\ R_i = R_i' \cap A^{t(i)}$;
(iv) $\forall j \in J\ f_j = f_j' \restriction A^{t(j)}$;
(v) $\forall k \in K\ c_k = c_k'$.

In diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

Beachten Sie den Unterschied zwischen „Redukt“ und „Substruktur“. Das Redukt erhält man durch Entfernen von Relationen bzw. Funktionen bzw. Konstanten aus der ursprünglichen Struktur unter Beibehaltung der Trägermenge. Ein „echtes“ Redukt hat also einen anderen Typ als die Ursprungsstruktur. Eine Substruktur dagegen hat denselben Typ wie die entsprechende Oberstruktur. Ihre Trägermenge ist (im Falle einer echten Substruktur ein echter) Teil der Trägermenge der Oberstruktur. Ihre Relationen und Funktionen sind die Einschränkungen der entsprechenden Relationen und Funktionen der Oberstruktur auf die Trägermenge der Substruktur. (Insbesondere ist also die Trägermenge der Substruktur gegen die Funktionen der Oberstruktur abgeschlossen: $f_j'\big[A^{t(j)}\big] \subset A$ für alle $j \in J$.) Die Konstanten von Ober- und Substruktur sind identisch, insbesondere enthält die Trägermenge der Substruktur alle Konstanten der Oberstruktur.

13.2 Homomorphismen.

Wir betrachten eine Abbildung $h: A \to A'$ zwischen den Trägermengen zweier mathematischer Strukturen, *die denselben Typ haben.* Zunächst vereinbaren wir folgende Schreibweise:

13.7 Definition Ist $1 \leq n < \omega$ und $\vec{x} \in A^n$, so definieren wir $h(\vec{x})$ durch Induktion nach n wie folgt:
$n = 1$: $h\big((x)\big) :\equiv \big(h(x)\big)$
$n = m+1$. Jedes $\vec{x} \in A^{m+1}$ ist von der Form $\vec{x} = (y, z)$ mit $y \in A^m$ und $z \in A$. Setze $h(\vec{x}) :\equiv \big(h(y), h(z)\big)$.

13.8 Definition h heißt **Homomorphismus** von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$, falls folgendes gilt:
(i) $L = L'$;
(ii) $\forall i \in I\, \forall \vec{x} \in A^{t(i)}\ \big(R_i\vec{x} \longrightarrow R_i'h(\vec{x})\big)$;

(iii) $\forall j \in J \, \forall \vec{x} \in A^{t(j)} \; h(f_j(\vec{x})) = f'_j(h(\vec{x}))$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & \cdots & \times & A & \xrightarrow{f_j} & A \\ \downarrow h & & \cdots & & \downarrow h & & \downarrow h \\ A' & \times & \cdots & \times & A' & \xrightarrow{f'_j} & A' \end{array}$$

kommutiert;

(iv) $\forall k \in K \; h(c_k) = c'_k$.

Wir schreiben in diesem Fall $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$.

Beachten Sie, daß wir in obiger Definition nur fordern, daß in der Urbildstruktur bestehende Relationen bewahrt werden müssen; nicht bestehende Relationen müssen nicht unbedingt bewahrt werden. D.h., gilt $R_i\vec{x}$ so gilt auch $R'_i h(\vec{x})$; wenn $R_i\vec{x}$ *nicht* gilt, so kann aber durchaus $R'_i h(\vec{x})$ gelten.

13.9 Definition h heißt **Einbettung** von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:

(i) $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$;

(ii) h ist injektiv;

(iii) $\forall i \in I \, \forall \vec{x} \in A^{t(i)} \; \big(R_i\vec{x} \longleftrightarrow R'_i h(\vec{x})\big)$.

In diesem Fall schreiben wir $h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$.

13.10 Definition h heißt **Isomorphismus** von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:

(i) $h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$;

(ii) h ist bijektiv.

In diesem Fall schreiben wir $h: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ und sagen, $\mathfrak{A}$ ist **isomorph** zu $\mathfrak{A}'$. Die Schreibweise $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ bedeute, daß es einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ gibt.

Läßt sich eine Struktur $\mathfrak{A}$ in eine Struktur $\mathfrak{A}'$ einbetten, so kann man $\mathfrak{A}$ als Substruktur von $\mathfrak{A}'$ auffassen. Genauer gilt:

13.11 Satz *Es gelte $h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$. Dann ist $A'' :\equiv \mathrm{ran}(h)$ Träger einer Substruktur $\mathfrak{A}''$ von $\mathfrak{A}'$, und es gilt $h: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}''$.*

Beweis. Für $i \in I$ sei $R''_i :\equiv R'_i \cap (A'')^{t(i)}$. Sei $j \in J$. Für $\vec{y} = h(\vec{x}) \in (A'')^{t(j)}$ (mit $\vec{x} \in A^{t(j)}$) ist $f'_j(\vec{y}) = f'_j(h(\vec{x})) = h(f_j(\vec{x})) \in A''$, so daß $f''_j :\equiv f'_j \restriction (A'')^{t(j)}$ eine Funktion $(A'')^{t(j)} \to A''$ definiert. Da außerdem $c'_k = h(c_k) \in A''$ für $k \in K$ gilt, ist durch $\mathfrak{A}'' :\equiv \big(A'', (R''_i | i \in I), (f''_j | j \in J), (c'_k | k \in K), t\big)$ eine Struktur definiert. Aus den Definitionen folgt sofort, daß $\mathfrak{A}''$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}'$ ist. Man verifiziert nun leicht, daß $h: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}''$ gilt. QED

14 Formale Sprachen.

Um „interne“ Eigenschaften von mathematischen Strukturen auszudrücken und zu untersuchen, also solche Eigenschaften, die für die Relationen, Funktionen und Konstanten einer Struktur innerhalb dieser Struktur gelten, präzisieren wir in mengentheoretischem Kontext, was wir unter einer Sprache (genauer: formalen Sprache) verstehen wollen. Unsere jetzt zu definierende formale Sprache soll nur Aussagen über die Elemente, nicht aber über (beliebige) *Teilmengen* des Universums einer mathematischen Struktur ermöglichen. Sie ist deshalb der *Logik 1.Stufe* angemessen.

14.1 Alphabete, Zeichenreihen und Sprachen.

14.1 Definition Ein **Alphabet** A ist eine nicht-leere Menge. Jedes $x \in A$ wird wird als **Zeichen aus** A bezeichnet. Es sei $A^* :\equiv {}^{<\omega}A :\equiv \bigcup_{n<\omega} {}^{n}A \equiv \{f \mid \exists n < \omega\; f{:}\, n \to A\}$. $w \in A^*$ heißt **Zeichenreihe** (oder auch **String** bzw. **Wort**) über A, $|w| :\equiv \mathrm{dom}(w)$ heißt **Länge** von w. $\Box :\equiv \emptyset$ bezeichnet das **leere Wort**.

14.2 Bemerkung Wir identifizieren das Zeichen $a \in A$ mit der Zeichenreihe $(a|i < 1) \in A^*$. Wir können also $A \subset A^*$ annehmen. Einen String $f = (f(i)|i < n) \in A^*$ schreiben wir manchmal auch in der Form $f(0)f(1)\ldots f(n-1)$.

Wir definieren die folgenden Operationen und Relationen auf den Wörtern:

14.3 Definition Seien $v, w \in A^*$.

(a) Wir definieren die **Verkettung** (auch: **Konkatenation**) von v und w durch $v^\frown w :\equiv vw :\equiv v \cup \big\{(|v| + i, w(i)) \bigm| i < |w|\big\}$.
Wir definieren das **Anhängen eines Zeichens** $a \in A$ an v durch $v^\frown a :\equiv va :\equiv v^\frown\{(0, a)\}$.

(b) $v \sqsubseteq w :\equiv \exists m \le \mathrm{dom}(w)\; v = w \restriction m$. D.h., v ist ein **Anfangsstück** von w.

14.4 Lemma *Sei A ein Alphabet. Dann ist* $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}} + \aleph_0$.

Beweis. Sei $a \in A$. Wegen $(a|i < n) \in A^*$ für jedes $n < \omega$ und $A \subset A^*$ ist $\max\{\overline{\overline{A}}, \aleph_0\} \le \overline{\overline{A^*}}$. Andererseits ist

$$\overline{\overline{A^*}} \le \sum_{n<\omega} \overline{\overline{{}^{n}A}} = \sum_{n<\omega} \underbrace{\overline{\overline{A}}^{\,n}}_{\le \overline{\overline{A}} + \aleph_0} \le \aleph_0 \cdot (\overline{\overline{A}} + \aleph_0) = \max\{\overline{\overline{A}}, \aleph_0\}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir haben in 13.1 definiert, was wir unter der Sprache einer mathematischen Struktur verstehen wollen. Wir können den Begriff *Sprache* auch leicht unabhängig vom Strukturbegriff definieren.

14.5 Definition Eine **(formale) Sprache** ist ein 4-Tupel (I, J, K, t), wobei I, J und K paarweise disjunkte Mengen sind und $t{:}\, I \cup J \to \omega$ gilt.

14.6 Bemerkung Die Sprache $L(\mathfrak{A})$ einer Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine formale Sprache.

14.2 Terme und Formeln.

Fixiere eine Sprache $L = (I, J, K, t)$. Wir definieren mengentheoretisch ein zu dieser Sprache „passendes“ Alphabet A_L, so daß nach gewissen vorgegebenen Regeln gebildete Zeichenreihen über A_L, die wir als Terme und Formeln bezeichnen, alle internen Eigenschaften einer jeden Struktur $\mathfrak{A}$ mit $L(\mathfrak{A}) = L$ „ausdrücken“ können.

14.7 Definition Das **Alphabet** A_L **von** L ist diejenige Menge, die genau die folgenden Elemente enthält:[96]

(i) **Klammern**: $\dot{(} :\equiv (0, 0)$, $\dot{)} :\equiv (1, 0)$;
(ii) **Variablen**: für jedes $n < \omega$ das Element $\dot{v}_n :\equiv (2, n)$;
(iii) **Konnektoren**: $\dot{\wedge} :\equiv (3, 0)$ (**und**, **Konjunktion**), $\dot{\neg} :\equiv (4, 0)$ (**nicht**, **Negation**);
(iv) **Quantor**: $\dot{\forall} :\equiv (5, 0)$;
(v) **Identität**: $\dot{=} :\equiv (6, 0)$;

[96]Wir geben direkt die intendierte Bedeutung mit an.

(vi) **Relationssymbole**: für jedes $i \in I$ das Element $\dot{R}_i :\equiv (7, i)$;
(vii) **Funktionssymbole**: für jedes $j \in J$ das Element $\dot{f}_j :\equiv (8, j)$;
(viii) **Konstantensymbole**: für jedes $k \in K$ das Element $\dot{c}_k :\equiv (9, k)$.

Wir erklären nun, was ein *Term* der Sprache L ist. Hierzu benötigen wir folgende Verallgemeinerung der Konkatenationsfunktion $\frown$:

14.8 Definition Sei A ein Alphabet, $n < \omega$ und $s\colon n \to A^*$.

(a) Durch Rekursion nach $i \leq n$ definieren wir das Element $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(i-1)$ von A^* wie folgt:
im Fall $i = 0$ sei $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(0-1) :\equiv \Box$;
im Fall $i = j+1$ sei $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(i-1) :\equiv \big(s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(j-1)\big)^\frown s((j+1)-1)$.[97]

(b) Sind $i \leq j \leq n$, so sei $s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j) :\equiv s_{i,j}(0)^\frown \cdots {}^\frown s_{i,j}((j-i+1)-1)$, wobei $s_{i,j}\colon (j-i+1) \to A^*$ definiert sei durch $s_{i,j}(k) :\equiv s(i+k)$ für $0 \leq k \leq (j-i)$.

14.9 Bemerkung Man zeigt leicht, daß für $s\colon n \to A^*$ und $j \leq i \leq n$ gilt: $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(i-1) = \big(s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(j-1)\big)^\frown \big(s(j)^\frown \cdots {}^\frown s(i-1)\big)$.

14.10 Definition Die Menge $\mathrm{Tm}(L)$ der ***L*-Terme** ist die $\subset$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die folgendes gilt:

(T1) $\forall n < \omega\ \dot{v}_n \in \mathrm{Tm}(L)$;
(T2) $\forall k \in K\ \dot{c}_k \in \mathrm{Tm}(L)$;
(T3) $\forall j \in J\, \forall s\ \big(s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L) \longrightarrow \dot{f}_j{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(j)-1) \in \mathrm{Tm}(L)\big)$.

14.11 Bemerkung (a) Es ist also $\mathrm{Tm}(L) = \bigcap\{x \subset A_L^* \mid x \text{ erfüllt (T1), (T2) und (T3)}\}$.

(b) Die von uns gewählte Schreibweise, in der die Operatoren, also hier die Funktionen (bzw. die Funktionsbezeichnungen), vorne stehen, gefolgt von den Operanden, also hier den Argumenten der jeweiligen Funktion, bezeichnet man auch als **polnische Notation**. Ausdrücke in polnischer Notation sind ohne Klammern eindeutig lesbar. In der Praxis betrachten wir oft Terme, die nicht in polnischer Notation sind. So schreiben wir z.B normalerweise $x + y$ statt $+xy$. Solche Terme lassen sich aber leicht in solche in polnischer Notation umformen.

Die einfachsten Formeln sind Formeln, in denen keine Konnektoren und Quantoren vorkommen. Wir nennen sie atomare Formeln:

14.12 Definition Die Menge der **atomaren Formeln**, $\mathrm{At}(L)$, ist definiert durch

$$\mathrm{At}(L) :\equiv \{s_1 \doteq s_2 \mid s_1 \in \mathrm{Tm}(L) \land s_2 \in \mathrm{Tm}(L)\} \cup \{\dot{R}_i{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(i)-1) \mid i \in I \land s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)\}.$$

Formeln werden mit Hilfe der Konnektoren und des Quantors aus atomaren Formeln nach den in der folgenden Definition angegebenen Bildungsgesetzen konstruiert.

14.13 Definition Die Menge $\mathrm{Fml}(L)$ der ***L*-Formeln** ist die $\subset$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die folgendes gilt:

(F1) $\mathrm{At}(L) \subset \mathrm{Fml}(L)$;
(F2) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{(}\varphi \dot{\land} \psi\dot{)} \in \mathrm{Fml}(L)$;
(F3) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\neg}\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$;
(F4) $\forall n < \omega\, \forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\forall}\dot{v}_n \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$.

Wir analysieren den Aufbau von Termen und Formeln; wir beginnen mit den Termen:

[97] $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(n-1)$ ist also die Verkettung der Funktionswerte von s in der durch s induzierten Reihenfolge ($s(i)$ liegt vor $s(j)$ genau dann, wenn $i < j$ gilt).

14.14 Lemma *Sei* $s \in \mathrm{Tm}(L)$.

(a) *s ist entweder eine Variable oder ein Konstantensymbol oder es existiert ein* $j \in J$ *und ein* $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$ *mit* $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$.

(b) $s \neq \square$.

(c) $\forall s' \in \mathrm{Tm}(L)\ \big(s' \neq s \longrightarrow \neg\,(s' \sqsubseteq s \vee s \sqsubseteq s')\big)$.

(d) $\forall m, n < \omega\, \forall r, r'\ \big((r\colon m \to \mathrm{Tm}(L)\ \wedge\ r'\colon n \to \mathrm{Tm}(L)\ \wedge\ r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(m-1) = r'(0)^\frown \cdots {}^\frown r'(n-1)) \longrightarrow (m = n\ \wedge\ \forall\, i < m\ r(i) = r'(i))\big)$.

Beweis. zu (a). Man beweist leicht, daß

$$T :\equiv \{\dot{v}_n \mid n < \omega\} \cup \{\dot{c}_k \mid k \in K\} \cup \{\dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1) \mid j \in J\ \wedge\ r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\}$$

die Bedingungen (T1), (T2) und (T3) (mit T statt $\mathrm{Tm}(L)$) aus 14.10 erfüllt, wegen der $\subset$-Minimalität von $\mathrm{Tm}(L)$ also $\mathrm{Tm}(L) \subset T$ gilt.

zu (b). Dies folgt sofort aus (a).

zu (c) Wir führen eine Induktion über $|s| < \omega$ durch. Angenommen, (c) gilt für jedes $\bar{s} \in \mathrm{Tm}(L)$ mit $|\bar{s}| < |s|$. Es sei dann $s' \in \mathrm{Tm}(L)$ beliebig mit $s \neq s'$. Es kann dann nicht $s' \sqsubseteq s$ gelten: aus $s' \sqsubseteq s$ folgt nämlich $|s'| < |s|$, so daß wir die Induktionsvoraussetzung auf s' anwenden können. Diese impliziert dann insbesondere $\neg\, s' \sqsubseteq s$, was unserer Annahme widerspricht. Auch $s \sqsubseteq s'$ kann nicht gelten: aus $s \sqsubseteq s'$ folgt nämlich $|s'| \geq 2$. (Beachte, daß $|s| \geq 1$ wegen $\square \notin \mathrm{Tm}(L)$ und s wegen $s \neq s'$ sogar ein echtes Anfangsstück von s' ist.) Nach (a) ist dann $s' = \dot{f}_j{}^\frown r'(0)^\frown \cdots {}^\frown r'(t(j)-1)$ für ein $j \in J$ und ein $r'\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$. Aus $s \sqsubseteq s'$ (und $s \neq \square$) folgt außerdem $s(0) = \dot{f}_j$, so daß nach (a) ein $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$ existiert mit $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$. Wir zeigen

(1) $\quad \forall n < t(j)\ r(n) = r'(n)$,

woraus $s = s'$ folgt, was unserer Annahme widerspricht.
Beweis von (1). Wir führen eine Induktion nach n durch. Angenommen, wir haben für $m < n$ bereits $r(m) = r'(m)$ bewiesen. Wir haben dann

$$\underbrace{\dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(n-1)^\frown r(n)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)}_{=s} \sqsubseteq \underbrace{\dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(n-1)^\frown r'(n)^\frown \cdots {}^\frown r'(t(j)-1)}_{=s'}.$$

Hieraus ergibt sich $r(n) \sqsubseteq r'(n)\ \vee\ r'(n) \sqsubseteq r(n)$. Da außerdem $|r(n)| < |s|$ gilt, folgt $r(n) = r'(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung (der Induktion über $|s|$). qed(1)

Damit ist (c) bewiesen.

zu (d). Seien $r\colon m \to \mathrm{Tm}(L)$ und $r'\colon n \to \mathrm{Tm}(L)$ mit $r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(m-1) = r'(0)^\frown \cdots {}^\frown r'(n-1)$ vorgelegt. Wir können o.E. $m \leq n$ annehmen. Wir zeigen

(2) $\quad \forall\, i < m\ r(i) = r'(i)$.

Beweis. Haben wir für $j < i$ bereits $r(j) = r'(j)$ gezeigt, so folgt analog zur parallelen Stelle im Beweis von (1), daß $r(i) \sqsubseteq r'(i)$ oder $r'(i) \sqsubseteq r(i)$ gilt, was nach (c) auf $r(i) = r'(i)$ führt. qed(2)

In Hinblick auf (2) genügt es nun $m = n$ zu verifizieren. Wäre $m < n$, so wäre nach (2) $r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(m-1) = r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(m-1)^\frown r'(m)^\frown \cdots {}^\frown r'(n-1)$, woraus $r'(m)^\frown \cdots {}^\frown r'(n-1) = \square$ folgt. Wegen $m \leq n-1$ und weil nach (b) $r'(m) \neq \square$ gilt, ist dies unmöglich. Somit muß doch $m = n$ sein.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

14.15 Satz (Eindeutige Lesbarkeit der Terme) *Terme sind auf eindeutige Weise in Subterme (Unterterme) zerlegbar. D.h., ist* $s \in \mathrm{Tm}(L)$, *so gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) *Es gibt genau ein* $n < \omega$, *so daß* $s = \dot{v}_n$;

(ii) *Es gibt genau ein $k \in K$, so daß $s = \dot{c}_k$;*

(iii) *Es existiert genau ein $j \in J$ und genau ein $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$.*

Beweis. Ist $s = \dot{v}_n$, so ist $s \neq \dot{v}_m$ für $m \neq n$, und s ist auch nicht von der in (ii) oder (iii) spezifizierten Form; Analoges gilt im Fall $s = \dot{c}_k$. (Dies folgt sofort aus der Definition der Variablen und Konstantensymbole in 14.7.) Sei also $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$ für ein $j \in J$ und ein $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$. Mit 14.7 folgt, daß s mit keiner Variablen und keinem Konstantensymbol übereinstimmt. Sind andererseits $j' \in J$ und $r'\colon t(j') \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1) = s = \dot{f}_{j'}{}^\frown r'(0)^\frown \cdots {}^\frown r'(t(j)-1)$ gilt, so ist nach 14.14(d) zunächst $\dot{f}_j = \dot{f}_{j'}$, was nach 14.7 $j = j'$ impliziert. 14.14(d) liefert ebenfalls $r(i) = r'(i)$ für $i < t(j)$; also ist $r = r'$. Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir vereinbaren folgende Vereinfachungen der Schreibweisen: Statt $\dot{f}_j{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(j)-1)$ schreiben wir nur noch $\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)$; statt $\dot{R}_i{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(i)-1)$ schreiben wir nur noch $\dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$.

Nun wenden wir uns dem Nachweis der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln zu. Wir beginnen mit atomaren Formeln.

14.16 Lemma *(a)* $\mathrm{Tm}(L) \cap \mathrm{At}(L) = \emptyset$.

(b) $\forall s_1, s_2, s_1', s_2' \in \mathrm{Tm}(L) \big(s_1 \doteq s_2 \sqsubseteq s_1' \doteq s_2' \longrightarrow (s_1 = s_1' \wedge s_2 = s_2')\big)$.

(c) $\forall i, i' \in I\, \forall s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)\, \forall s'\colon t(i') \to \mathrm{Tm}(L)\, \big(\dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1) \sqsubseteq \dot{R}_{i'} s'(0) \ldots s'(t(i')-1)$
$\longrightarrow (i = i' \wedge \forall n < t(i)\; s(n) = s'(n))\big)$.

Beweis. zu (a). Dies ist klar, da jede atomare Formel ein $\doteq$ oder ein Relationssymbol enthält, Terme jedoch nicht.

zu (b). Sei $\varphi :\equiv s_1 \doteq s_2$ und $\psi :\equiv s_1' \doteq s_2'$. Aus $\varphi \sqsubseteq \psi$ folgt $n :\equiv |\varphi| = |\psi| \equiv: m$. Außerdem existiert genau ein i mit $i < n$ und $\varphi(i) = \doteq$, da $\doteq$ in keinem Term vorkommt. Wegen 14.14(b) ist $i \notin \{0, n-1\}$. Es ist dann auch $\psi(i) = \doteq$ und $\psi(j) \neq \doteq$ für $j \neq i$. Aus $\varphi \sqsubseteq \psi$ folgt nun $s_1 = \varphi(0)^\frown \cdots {}^\frown \varphi(i-1) = \psi(0)^\frown \cdots {}^\frown \psi(i-1) = s_1'$ sowie $s_2 = \varphi(i+1)^\frown \cdots {}^\frown \varphi(n-1) \sqsubseteq \psi(i+1)^\frown \cdots {}^\frown \psi(m-1) = s_2'$. Aus letzterem folgt nach 14.14(c) $s_2 = s_2'$. Also gilt (b).

zu (c). Sei $\varphi :\equiv \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$ und $\psi :\equiv \dot{R}_{i'} s'(0) \ldots s'(t(i')-1)$. Aus $\varphi \sqsubseteq \psi$ folgt dann $\dot{R}_i = \varphi(0) = \psi(0) = \dot{R}_{i'}$; dies impliziert einerseits $i = i'$, andererseits $s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(i)-1) \sqsubseteq s'(0)^\frown \cdots {}^\frown s'(t(i)-1)$. Da beide Strings dieselbe Länge haben, gilt hier sogar „$=$“, so daß aus 14.14(d) $s(n) = s'(n)$ für alle $n < t(j)$ folgt.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

14.17 Lemma *(a)* $\mathrm{Tm}(L) \cap \mathrm{Fml}(L) = \emptyset$.

(b) *Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt $\varphi \in \mathrm{At}(L)$ oder es ist $\varphi = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}$ mit $\psi, \chi \in \mathrm{Fml}(L)$ oder es ist $\varphi = \dot{\neg}\psi$ mit $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ oder es gibt $n < \omega$ mit $\varphi = \dot{\forall} \dot{v}_n \psi$ mit $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$.*

(c) *Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$ und es gelte $\psi \sqsubseteq \varphi$. Dann ist $\psi = \varphi$.*

Beweis. Entfernt man aus $\mathrm{Fml}(L)$ die Menge $\mathrm{Tm}(L)$ sowie alle Elemente, die nicht von einer der in (b) spezifizierten Formen sind, so erfüllt die resultierende Menge immer noch (F1) bis (F4), muß also wegen der $\subset$-Minimalität von $\mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{Fml}(L)$ übereinstimmen. Es kann also in der Tat kein Element aus $\mathrm{Fml}(L)$ entfernt worden sein. Also gelten (a) und (b).

Um (c) zu beweisen, bezeichne mit n_φ die Anzahl der Konnektoren und Quantoren in $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. D.h., es ist $n_\varphi :\equiv \overline{\overline{\{i < |\varphi| \mid \varphi(i) \in \{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}\}\}}}$. Wir beweisen die folgende Behauptung, aus der sofort (c) folgt:

(1) $\forall n < \omega\, \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L) \big((n = n_\varphi \wedge \psi \sqsubseteq \varphi) \longrightarrow \psi = \varphi\big)$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $n < \omega$ durch.

$n = 0$. Sei $n_\varphi = 0$ und $\psi \sqsubseteq \varphi$. Dann sind sowohl φ als auch ψ atomare Formeln, da beide keine Konnektoren und Quantoren enthalten. Es sind also zwei Fälle möglich:
Fall 1. $\varphi = s_1 \doteq s_2$ mit $s_1, s_2 \in \mathrm{Tm}(L)$. Wegen $\psi \sqsubseteq \varphi$ beginnt dann ψ nicht mit einem Relationssymbol und muß deshalb von der Form $\psi = s_1' \doteq s_2'$ mit $s_1', s_2' \in \mathrm{Tm}(L)$ sein. Nach 14.16(b) ist dann $s_1' = s_1$ und $s_2' = s_2$, woraus $\psi = \varphi$ folgt.
Fall 2. $\varphi = \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$ mit $i \in I$ und $s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$. In diesem Fall muß $\psi = \dot{R}_i s'(0) \ldots s'(t(i)-1)$ sein mit $s'\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$, und 14.14(c) impliziert $s(n) = s'(n)$ für alle $n < t(i)$, woraus $\psi = \varphi$ folgt.

Sei nun die Behauptung für alle $m < n$ bewiesen und seien $\psi, \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $n_\varphi = n$ und $\psi \sqsubseteq \varphi$. (Dann ist natürlich $n_\psi \leq n$.) Nach (b) sind nun drei Fälle möglich:
Fall 1. $\varphi = \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Fml}(L)$. Wegen $\psi \sqsubseteq \varphi$ muß dann auch ψ mit einer Klammer $\dot{(}$ beginnen. Nach (b) ist also ψ von der Form $\psi = \dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt $\psi_1 \sqsubseteq \varphi_1$ oder $\varphi_1 \sqsubseteq \psi_1$. Wegen $n_{\varphi_1} < n_\varphi = n$ bzw. $n_{\psi_1} < n_\psi \leq n$ folgt in beiden Fällen aus der Induktionsvoraussetzung $\psi_1 = \varphi_1$. Hieraus ergibt sich wegen $\psi \sqsubseteq \varphi$ weiter $\psi_2 \sqsubseteq \varphi_2$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert dann $\psi_2 = \varphi_2$. Insgesamt ist $\psi = \varphi$ nachgewiesen.
Fall 2. $\varphi = \dot{\neg}\, \varphi_1$ mit $\varphi_1 \in \mathrm{Fml}(L)$. Wegen $\psi \sqsubseteq \varphi$ beginnt dann auch ψ mit einer Negation, d.h., $\psi = \neg\, \psi_1$ mit $\psi_1 \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir haben dann $\psi_1 \sqsubseteq \varphi_1$ und $n_{\varphi_1} < n_\varphi = n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\psi_1 = \varphi_1$, und dies impliziert $\psi = \varphi$.
Fall 3. $\varphi = \dot{\forall} \dot{v}_l \varphi_1$ mit $l < \omega$ und $\varphi_1 \in \mathrm{Fml}(L)$. Diesen Fall behandelt man analog zum Fall 2.

Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Der Beweis des Lemmas ist hiermit erbracht. QED

14.18 Satz (Eindeutige Lesbarkeit der Formeln) *Jede Formel kann auf eindeutige Weise in Subformeln zerlegt werden. D.h., ist $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$, so gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) *Es gibt genau ein $s_1 \in \mathrm{Tm}(L)$ und genau ein $s_2 \in \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = s_1 \doteq s_2$.*
(ii) *Es gibt genau ein $i \in I$ und genau ein $s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$.*
(iii) *Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ und genau ein $\chi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\varphi = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}$.*
(iv) *Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\varphi = \dot{\neg}\, \psi$.*
(v) *Es gibt genau ein $n < \omega$ und genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\varphi = \dot{\forall} \dot{v}_n \psi$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Nach 14.17(b) sind genau die folgenden fünf Fälle möglich:

Fall 1. $\varphi = s_1 \doteq s_2$. Betrachtung von $\varphi(0)$ zeigt, daß φ von keiner der in (ii) – (v) spezifizierten Formen sein kann. 14.16 (b) zeigt, daß s_1 und s_2 eindeutig bestimmt sind.

Fall 2. $\varphi = \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$. Diesen Fall behandelt man analog zu Fall 1.

Fall 3. $\varphi(0) = \dot{(}$. Dann ist $\varphi = \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Fml}(L)$. φ kann dann mit keiner Formel übereinstimmen, die von der in (i) bzw. (ii) bzw. (iv) bzw. (v) spezifizierten Form ist. Die Darstellung von φ ist eindeutig: angenommen $\varphi = \dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt $\psi_1 \sqsubseteq \varphi_1$ oder $\varphi_1 \sqsubseteq \psi_1$. Nach 14.17(c) ist dann $\psi_1 = \varphi_1$. Hieraus folgt weiter $\psi_2 \sqsubseteq \varphi_2$, also $\psi_2 = \varphi_2$ nach 14.17(c).

Fall 4. $\varphi(0) = \dot{\neg}$. Dann ist $\varphi = \dot{\neg}\, \psi$ für ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$. Analog zu Fall 3 folgt, daß ψ eindeutig durch φ bestimmt ist.

Fall 5. $\varphi(0) = \dot{\forall}$. Dann ist $\varphi = \dot{\forall} \dot{v}_n \psi$, und analog zu Fall 3 folgt, daß $n < \omega$ und ψ eindeutig bestimmt sind.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

14.3 Induktion und Rekursion über den Aufbau der Terme und Formeln.

Die spezielle Struktur der Terme und Formeln ermöglicht es, das Beweisprinzip Induktion und das Konstruktionsprinzip Rekursion (in einer geeigneten Form) auf Terme und Formeln zu übertragen.

14.19 Satz (Induktion über den Termaufbau) *Sei Φ eine $\in$-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall n < \omega\ \Phi(\dot{v}_n)$ *und* $\forall\, k \in K\ \Phi(\dot{c}_k)$;

(ii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ \big(\forall\, i < t(j)\ \Phi(s(i)) \longrightarrow \Phi(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1))\big)$.

Dann gilt $\forall s \in \mathrm{Tm}(L)\ \Phi(s)$.

Beweis. $T :\equiv \{s \in \mathrm{Tm}(L) \,|\, \Phi(s)\}$ erfüllt (T1), (T2) und (T3). Wegen der $\subset$-Minimalität von $\mathrm{Tm}(L)$ ist also $T = \mathrm{Tm}(L)$. QED

Eine mathematische Eigenschaft Φ trifft also auf alle L-Terme zu, wenn sie auf alle Variablen und alle Konstantensymbole zutrifft, und wenn für jedes $j \in J$ aus der Gültigkeit von Φ für je $t(j)$-viele Terme $s(0), \ldots, s(t(j)-1)$ die Gültigkeit von Φ für $\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)$ folgt.

14.20 Satz (Induktion über den Formelaufbau) *Sei Φ eine $\in$-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall \psi \in \mathrm{At}(L)\ \Phi(\psi)$;

(ii) $\forall \psi, \chi \in \mathrm{Fml}(L)\ \big((\Phi(\psi) \wedge \Phi(\chi)) \longrightarrow (\Phi(\dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}) \wedge \Phi(\dot{\neg}\, \psi))\big)$;

(iii) $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall n < \omega\ \big(\Phi(\psi) \longrightarrow \Phi(\dot{\forall} \dot{v}_n \psi)\big)$.

Dann gilt $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \Phi(\psi)$.

Beweis. Analog zu Beweis des Induktionssatzes für Terme. QED

Eine mathematische Eigenschaft trifft also auf alle Formeln zu, wenn sie auf alle atomaren Formeln zutrifft, wenn ferner aus der Gültigkeit dieser Eigenschaft für irgendeine Formel ihre Gültigkeit für die Negation und jede Quantifizierung dieser Formel folgt, und wenn aus der Gültigkeit dieser Eigenschaft für je zwei Formeln ihre Gültigkeit für die Konjunktion dieser Formeln folgt.

14.21 Satz (Rekursion über den Termaufbau) *Seien $G_{var}, G_{const}, G_{fun}\colon V \to V$. Dann existiert genau ein $H\colon \mathrm{Tm}(L) \to V$ mit:*

(i) $\forall\, n < \omega\ H(\dot{v}_n) = G_{var}(\dot{v}_n)$;

(ii) $\forall\, k \in K\ H(\dot{c}_k) = G_{const}(\dot{c}_k)$;

(iii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ H(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)) = G_{fun}(j, s, (H(s(i))|i < t(j)))$.

Beweis. Definieren wir

$$T_0 :\equiv \{\dot{v}_n \,|\, n < \omega\} \cup \{\dot{c}_k \,|\, k \in K\}, \quad T_{n+1} :\equiv T_n \cup \{\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1) \,|\, j \in J \wedge s\colon t(j) \to T_n\},$$

so ist $\mathrm{Tm}(L) = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Wegen der eindeutigen Lesbarkeit der Terme läßt sich $H \restriction T_n$ leicht rekursiv so definieren, daß (i), (ii) und (iii) gelten. Damit ist die Existenz von H gesichert. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls leicht aus der eindeutigen Lesbarkeit der Terme. QED

14.22 Satz (Rekursion über den Formelaufbau) *Seien $G_{at}, G_{\dot{\wedge}}, G_{\dot{\neg}}, G_{\dot{\forall}}\colon V \to V$. Dann existiert genau ein $H\colon \mathrm{Fml}(L) \to V$ mit:*

(i) $\forall \varphi \in \mathrm{At}(L)\ H(\varphi) = G_{at}(\varphi)$;

(ii) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) = G_{\dot{\wedge}}(\varphi, \psi, H(\varphi), H(\psi))$;

(iii) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{\neg}\varphi) = G_{\dot{\neg}}(\varphi, H(\varphi))$;

(iv) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall n < \omega\ H(\dot{\forall} \dot{v}_n \varphi) = G_{\dot{\forall}}(n, \varphi, H(\varphi))$.

Beweis. Dies beweist man ganz analog zum Rekursionssatz über den Termaufbau. QED

Beispiele für die Anwendung der Rekursionssätze liefern die folgenden Definitionen.

14.23 Definition Für $t \in \mathrm{Tm}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von t, $\mathrm{var}(t)$, wie folgt: $\mathrm{var}(\dot{v}_n) :\equiv \{\dot{v}_n\}$, $\mathrm{var}(\dot{c}_k) = \emptyset$, $\mathrm{var}(\dot{f}_j s(0) \dots s(t(j)-1)) = \bigcup_{i<t(j)} \mathrm{var}(s(i))$.

14.24 Bemerkung Um diese Rekursion formal durchzuführen setzen wir $G_{var} :\equiv \{(x, \{x\}) \mid x \in V\}$, $G_{const} :\equiv \{(x, \emptyset) \mid x \in V\}$ und $G_{fun} :\equiv \{((j, f, g), \bigcup \mathrm{ran}(g)) \mid j \in V \wedge f \in V \wedge g \in V\}$.

14.25 Definition Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von φ, $\mathrm{var}(\varphi)$, und die **Menge der freien Variablen** von φ, $\mathrm{fr}(\varphi)$, wie folgt:

(i) $\mathrm{var}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{fr}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{var}(s_1) \cup \mathrm{var}(s_2)$;

(ii) $\mathrm{var}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \mathrm{fr}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \bigcup_{j<t(i)} \mathrm{var}(s(j))$;

(iii) $\mathrm{var}(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \mathrm{var}(\psi)$; $\mathrm{fr}(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$;

(iv) $\mathrm{var}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi)$; $\mathrm{fr}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi)$;

(v) $\mathrm{var}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \{\dot{v}_n\}$; $\mathrm{fr}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{\dot{v}_n\}$.

Ist $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$, so sei $\mathrm{fr}(\Phi) :\equiv \bigcup\{\mathrm{fr}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$ die Menge der freien Variablen von Φ.

14.26 Bemerkung $\mathrm{fr}(\varphi)$ betseht gerade aus denjenigen Variablen aus $\mathrm{var}(\varphi)$, die an mindestens einer Stelle von φ nicht „im Wirkungsbereich“ eines Quantors stehen. Wir verzichten hier auf eine formale Durchführung der Definition von $\mathrm{var}(\varphi)$ bzw. $\mathrm{fr}(\varphi)$ gemäß des Rekursionssatzes.

14.27 Definition Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ und $n < \omega$. Wir sagen, $\dot{v}_n$ ist **gebunden** in φ, falls $\dot{\forall}\dot{v}_n$ in φ vorkommt, es also ein $i < |\varphi| - 1$ gibt mit $\varphi(i) = \dot{\forall}$ und $\varphi(i+1) = \dot{v}_n$.

14.28 Bemerkung Eine Variable kann in φ sowohl frei als auch gebunden vorkommen. Betrachte etwa $\dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0 \dot{\wedge} \dot{\forall}\dot{v}_0\, \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$.

Manchmal ist es sinnvoll, sich auf bestimmte freie Variablen zu beschränken. Wir definieren deshalb:

14.29 Definition Für $n < \omega$ sei $\mathrm{Fml}_n(L) :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \mid \mathrm{fr}(\varphi) \subset \{\dot{v}_i \mid i < n\}\}$. $\mathrm{Fml}_0(L)$ ist dann die Menge aller Formeln, die keine freien Variablen haben, und heißt Menge der **L-Sätze**.

Wir vereinbaren, daß wir zukünftig statt der Variablen $\dot{v}_n$ auch die Buchstaben $x, y, z \dots$ (auch mit Indices) schreiben werden. Die Schreibweise $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bedeute, daß $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ gilt mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

14.4 Die Kardinalität einer Sprache.

14.30 Definition Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache. $\overline{\overline{L}} :\equiv \overline{\overline{I \cup J \cup K}} + \aleph_0$ heißt die **Kardinalität der Sprache** L.

14.31 Bemerkung In der obigen Definition von $\overline{\overline{L}}$ wird $\aleph_0$ addiert, weil wir abzählbar viele Variablen haben, und diese als zur Sprache gehörend angesehen werden.

14.32 Lemma *Sei L eine Sprache. Dann ist $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$.*

Beweis. Wegen $\mathrm{Fml}(L) \subset A_L^*$ folgt $\overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}} \leq \overline{\overline{A_L^*}} = \overline{\overline{A_L}} + \aleph_0 = \overline{\overline{L}}$. Da andererseits für jedes $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ und $n < \omega$ gilt $\dot{R}_i\dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$, $\dot{f}_j\dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_j\dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$, $\dot{c}_k = \dot{c}_k \in \mathrm{Fml}(L)$ sowie $\dot{v}_n \doteq \dot{v}_n \in \mathrm{Fml}(L)$, ergibt sich $\overline{\overline{L}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$. QED

14.5 Die fehlenden Konnektoren und Quantoren.

Wir führen die folgenden Konnektoren und Quantoren als Abkürzungen für gewisse Zeichenreihen der Sprache der Logik erster Stufe ein. Mit ihrer Hilfe lassen sich viele Formeln einfacher schreiben.

14.33 Definition Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$.
(a) $\dot{(}\varphi \dot{\vee} \psi\dot{)} :\equiv \dot{\neg}\,\dot{(}\dot{\neg}\,\varphi \,\dot{\wedge}\, \dot{\neg}\,\psi\dot{)}$ (**oder**).
(b) $\dot{(}\varphi \dot{\rightarrow} \psi\dot{)} :\equiv \dot{(}\dot{\neg}\,\varphi \,\dot{\vee}\, \psi\dot{)}$ (**Implikation**).
(c) $\dot{(}\varphi \dot{\leftrightarrow} \psi\dot{)} :\equiv \dot{(}\dot{(}\varphi \dot{\rightarrow} \psi\dot{)} \,\dot{\wedge}\, \dot{(}\psi \dot{\rightarrow} \varphi\dot{)}\dot{)}$ (**Äquivalenz, Biimplikation**).
(d) $\dot{\exists}\dot{v}_n\varphi :\equiv \dot{\neg}\,\dot{\forall}\dot{v}_n \dot{\neg}\,\varphi$ (**Existenzquantor**).

Folgende Abkürzungen sind ebenfalls sehr nützlich:

14.34 Definition (a) Sei $n < \omega$ und seien $x_1, \dots, x_n \in \{\dot{v}_i \mid i < \omega\}$ und $Q_1, \dots, Q_n \in \{\dot{\forall}, \dot{\exists}\}$. Ferner sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $Q_n x_n \dots Q_1 x_1 \,\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ durch $Q_0 x_0 \dots Q_1 x_1 \varphi :\equiv \varphi$ und $Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_1 x_1 \varphi :\equiv Q_{n+1} x_{n+1} Q_n x_n \dots Q_1 x_1 \varphi$.
(b) Sei $n < \omega$ und für $i < n$ sei $\varphi_i \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $\bigwedge_{i<n} \varphi_i$ bzw. $\bigvee_{i<n} \varphi_i$ durch
$\bigwedge_{i<0} \varphi_i :\equiv \dot{\forall}\dot{v}_0\, \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$, $\bigvee_{i<0} \varphi_i :\equiv \dot{\neg}\,\dot{\forall}\dot{v}_0\, \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$,
$\bigwedge_{i<1} \varphi_i :\equiv \bigvee_{i<1} \varphi_i :\equiv \varphi_0$,
$\bigwedge_{i<n+1} \varphi_i :\equiv \dot{(}\bigwedge_{i<n} \varphi_i \,\dot{\wedge}\, \varphi_{n+1}\dot{)}$ bzw. $\bigvee_{i<n+1} \varphi_i :\equiv \dot{(}\bigvee_{i<n} \varphi_i \,\dot{\vee}\, \varphi_{n+1}\dot{)}$, falls $n \geq 1$.

14.35 Bemerkung Die Definitionen sind so gewählt, daß für alle $n < \omega$ (auch im Fall $n = 0$!) gilt: $\models \bigwedge_{i<n+1} \varphi_i \longleftrightarrow \dot{(}\bigwedge_{i<n} \varphi_i \,\dot{\wedge}\, \varphi_{n+1}\dot{)}$ sowie $\models \bigvee_{i<n+1} \varphi_i \longleftrightarrow \dot{(}\bigvee_{i<n} \varphi_i \,\dot{\vee}\, \varphi_{n+1}\dot{)}$; $\models$ ist in 15.13 definiert.

15 Modelle.

Wir fixieren eine formale Sprache $L = (I, J, K, t)$ und eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $L(\mathfrak{A}) = L$, siehe 13.1. Eine solche Struktur nennen wir auch ***L*-Struktur**.

15.1 Die Modellbeziehung.

Formale Sprachen hatten wir eingeführt, um „interne" Eigenschaften von mathematischen Strukturen, d.h., Eigenschaften, die zwischen den Relationen, Funktionen und Konstanten von $\mathfrak{A}$ innerhalb von $\mathfrak{A}$ bestehen, auszudrücken. Hierzu müssen die Terme und Formeln der Sprache L auf geeignete Weise als Aussagen über gewisse Relationen, Funktionen und Konstanten von $\mathfrak{A}$ interpretiert werden. Freie Variablen müssen mit Elementen aus A belegt werden.

15.1 Definition β ist eine **Belegung in $\mathfrak{A}$** $:\equiv \beta\colon \{\dot{v}_n \mid n < \omega\} \to A$.

Wir fixieren nun eine beliebige Belegung β in $\mathfrak{A}$.

15.2 Definition Sei $s \in \mathrm{Tm}(L)$ ein beliebiger Term. Definiere rekursiv die **Interpretation von s in $\mathfrak{A}$ unter der Belegung** β, $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$, wie folgt:
(i) $\dot{v}_n^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv \beta(\dot{v}_n)$;
(ii) $\dot{c}_k^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv c_k$.
(iii) $\big(\dot{f}_j s(0) \dots s(t(j)-1)\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv f_j\big(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, s(t(j)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big)$.

Ein Term wird also in $\mathfrak{A}$ derart interpretiert, daß jedes Funktions- bzw. Konstantensymbol durch die korrespondierende Funktion bzw. Konstante von $\mathfrak{A}$ ersetzt und jede Variable mit dem durch β bestimmten Element von A (also $\beta(\dot{v}_n)$ für die Variable $\dot{v}_n$) belegt wird.

Um zu definieren, wie eine Formel φ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ interpretiert wird, müssen wir modifizierte Belegungen einführen.

15.3 Definition Sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, $a \in A$ und $n < \omega$. Dann sei $\beta\frac{a}{\dot{v}_n}$ die durch

$$\beta\frac{a}{\dot{v}_n}(\dot{v}_m) :\equiv \begin{cases} \beta(\dot{v}_m), & \text{falls } m \neq n \\ a, & \text{falls } m = n, \end{cases}$$

definierte Belegung in $\mathfrak{A}$.

$\beta\frac{a}{\dot{v}_n}$ unterscheidet sich also von β nur dadurch, daß die Variable $\dot{v}_n$ durch a belegt wird.

15.4 Definition Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ eine beliebige L-Formel. Definiere rekursiv die Eigenschaft $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ wie folgt:

(i) $\mathfrak{A} \models s_1 \doteq s_2[\beta] :\equiv s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = s_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$;

(ii) $\mathfrak{A} \models \dot{R}_i s(0)\ldots s(t(j)-1)[\beta] :\equiv R_i\big(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big)$;

(iii) $\mathfrak{A} \models \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}[\beta] :\equiv \big(\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \wedge \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]\big)$;

(iv) $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\varphi[\beta] :\equiv \neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$;

(v) $\mathfrak{A} \models \dot{\forall}\dot{v}_n\varphi[\beta] :\equiv \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \varphi\big[\beta\frac{a}{\dot{v}_n}\big]$.

Wir sagen, $\mathfrak{A}$ **erfüllt** φ **unter** β oder auch φ **gilt in** $\mathfrak{A}$ **unter** β, falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

Um die Definition von $\mathfrak{A} \models \varphi$ im Rahmen des Rekursionssatzes durchzuführen, kann man z.B. wie folgt vorgehen. Definiere mit Hilfe des Rekursionssatzes für Formeln eine Funktion $B_{\mathfrak{A}}\colon \mathrm{Fml}(L) \to V$ mit

(i) $B_{\mathfrak{A}}(s_1 \doteq s_2) = \big\{\beta \mid s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = s_2^{\mathfrak{A}}[\beta]\big\}$;

(ii) $B_{\mathfrak{A}}(\dot{R}_i s(0)\ldots s(t(j)-1)) :\equiv \big\{\beta \bigm| R_i\big(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, s(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big)\big\}$;

(iii) $B_{\mathfrak{A}}(\dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}) :\equiv B_{\mathfrak{A}}(\varphi_1) \cap B_{\mathfrak{A}}(\varphi_2)$;

(iv) $B_{\mathfrak{A}}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \big\{\beta \bigm| \beta \notin B_{\mathfrak{A}}(\varphi)\big\}$;

(v) $B_{\mathfrak{A}}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \big\{\beta \bigm| \forall a \in A\ \beta\frac{a}{\dot{v}_n} \in B_{\mathfrak{A}}(\varphi)\big\}$.

Setze dann $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] :\equiv \beta \in B_{\mathfrak{A}}(\varphi)$.

Nach dem von uns vorgenommenen Aufbau ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ eine $\in$-Formel mit den Parametern $\mathfrak{A}$, φ und β. $\models$ bezeichnet man manchmal auch als „Modellbeziehung“.

15.5 Beispiel Betrachte $\mathfrak{A} = \big(\mathbb{R}, \emptyset, (+_{\mathbb{R}}|i < 1), 0, \{(0,2)\}\big)$ und $\varphi :\equiv \dot{\forall}\dot{v}_0\ \dot{(}\dot{+}\dot{v}_0\dot{v}_1 \doteq \dot{v}_0\dot{)}$. φ gilt in $\mathfrak{A}$ bei einer Belegung β genau dann, wenn gilt $\forall a \in \mathbb{R}\ a + \beta(\dot{v}_1) = a$. (Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn $\beta(\dot{v}_1) = 0$. In 15.8 werden wir sehen, daß auch im allgemeinen Fall für die Gültigkeit von φ in $\mathfrak{A}$ bei einer Belegung β stets nur von der Belegung der freien Variablen von φ durch β abhängt.)

Wir verallgemeinern die Modellbeziehung auf Formelmengen.

15.6 Definition Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$ und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta] :\equiv \forall\varphi \in \Phi\ \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

Das Bestehen der Beziehung $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt von β nur über die (endlich vielen!) Werte $\beta(\dot{v}_n)$ ab, für die $\dot{v}_n$ eine freie Variable von φ ist. Mehr noch, von $\mathfrak{A}$ hängt das Bestehen der Beziehung $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ nur über diejenigen (endlich vielen!) Relationen R_i, Funktionen f_j und Konstanten c_k ab, die als Relationssymbol $\dot{R}_i$ bzw. Funktionssymbol $\dot{f}_j$ bzw. Konstantensymbol $\dot{c}_k$ in φ vorkommen:

15.7 Satz (Koinzidenzlemma) *Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Die L_0-Struktur $\mathfrak{A}_0$ und die L_1-Struktur $\mathfrak{A}_1$ seien Expansionen von $\mathfrak{A}$. Ferner sei β_0 eine Belegung in $\mathfrak{A}_0$ und β_1 eine Belegung in $\mathfrak{A}_1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\forall s \in \mathrm{Tm}(L)\ \big(\beta_0 \restriction \mathrm{var}(s) = \beta_1 \restriction \mathrm{var}(s) \longrightarrow s^{\mathfrak{A}_0}[\beta_0] = s^{\mathfrak{A}_1}[\beta_1]\big)$.

(b) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \big(\beta_0 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \beta_1 \restriction \mathrm{fr}(\varphi) \longrightarrow (\mathfrak{A}_0 \models \varphi[\beta_0] \leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \models \varphi[\beta_1])\big)$.

Beweis. Der Beweis ist eine etwas langwierige aber elementare Induktion über den Aufbau der Terme bzw. der Formeln. Er verbleibt dem Leser zur Übung. QED

15.8 Corollar *(a) Ob $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt oder nicht hängt nur ab von den endlich vielen Werten $\beta \restriction \mathrm{fr}(\varphi)$ sowie den endlich vielen Relationen $\{R_i \,|\, i \in I \wedge \dot{R}_i \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, den endlich vielen Funktionen $\{f_j \,|\, j \in J \wedge \dot{f}_j \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$ und den endlich vielen Konstanten $\{c_k \,|\, k \in K \wedge \dot{c}_k \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$.*

(b) Ist φ ein L-Satz, so hängt die Gültigkeit von $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ nicht von β ab.

Beweis. zu (a). Sei $I' :\equiv \{i \,|\, i \in I \wedge \dot{R}_i \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, $J' :\equiv \{j \,|\, j \in J \wedge \dot{f}_j \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, $K' :\equiv \{k \,|\, k \in K \wedge \dot{c}_k \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, $t' :\equiv t \restriction I' \cup J'$ und $L' :\equiv (I', J', K', t')$. Ferner sei β' eine beliebige Belegung in $\mathfrak{A}'$ mit $\beta' \restriction \mathrm{fr}(\varphi) = \beta \restriction \mathrm{fr}(\varphi)$. Sei $\mathfrak{A}'$ das L'-Redukt von $\mathfrak{A}$. Nach dem Koinzidenzlemma 15.7 (mit $\mathfrak{A}'$ statt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$; $\mathfrak{A}$ statt $\mathfrak{A}_1$) ist dann $(\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi[\beta'])$. Hieraus folgt sofort die Behauptung.

zu (b). Dies folgt aus (a) wegen $\mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$. QED

15.9 Bemerkung Das letzte Lemma rechtfertigt die folgenden Schreibweisen:

(a) Sei $s \in \mathrm{Tm}(L)$ und $\mathrm{var}(s) \subset \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $s^{\mathfrak{A}}[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$.

(b) Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_n(L)$ bzw. $\Phi \subset \mathrm{Fml}_n(L)$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ bzw. $\mathfrak{A} \models \Phi[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$.

(c) Im Fall eines Satzes φ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** φ. Im Fall einer Menge Φ von L-Sätzen schreiben wir $\mathfrak{A} \models \Phi$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** Φ.

15.2 Die Folgerungsbeziehung und Erfüllbarkeit.

Wann folgt eine durch eine L-Formel φ ausgedrückte Eigenschaft aus einer Menge Φ von L-Formeln? Eine vernünftige Antwort auf diese Frage lautet so: wenn immer dann, wenn die durch Φ festgelegten Eigenschaften gelten auch φ gilt, so folgt φ aus Φ. Formal fassen wir dies so:

15.10 Definition Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$.

$$\Phi \models \varphi :\equiv \forall \mathfrak{A} \, \forall \beta \, \big((\mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \beta \text{ ist Belegung in } \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi[\beta]) \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \big).$$

Gilt $\Phi \models \varphi$, so sagen wir Φ **impliziert** φ oder auch φ **folgt aus** Φ.

15.11 Definition Seien $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathrm{Fml}(L)$. $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi :\equiv \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$.

15.12 Definition Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$. φ, ψ sind **äquivalent** $:\equiv (\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi)$.

Eine Eigenschaft ist allgemeingültig, wenn sie stets zutrifft:

15.13 Definition Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. φ ist **allgemeingültig** $:\equiv \ \models \varphi :\equiv \emptyset \models \varphi$.

Eine Menge Φ von Formeln ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat, die durch Φ festgelegten Eigenschaften also gemeinsam in der „wirklichen Welt“ wahr gemacht werden können:

15.14 Definition Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$.
Φ ist **erfüllbar** $:\equiv \mathrm{Erf}(\Phi) :\equiv \exists \mathfrak{A} \, \exists \beta \, (\mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \beta \text{ ist Belegung in } \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi[\beta])$.

15.15 Definition Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. φ ist **erfüllbar** $:\equiv \{\varphi\}$ ist erfüllbar.

15.16 Lemma *Es gilt* $\Phi \models \varphi \longleftrightarrow \neg \, \mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\})$. *Speziell:* $\models \varphi \longleftrightarrow \neg \, \mathrm{Erf}(\dot\neg\varphi)$.

Beweis. zu„$\Rightarrow$“. Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ hat ein Modell $\mathfrak{A}$ unter einer Belegung β. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$, also $\neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$. Außerdem gilt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$, was wegen $\Phi \models \varphi$ auf $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ führt. Also gilt $\big(\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \wedge \neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]\big)$, ein Widerspruch. $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ kann also nicht erfüllbar sein.

zu „$\Leftarrow$“. Es gelte $\neg\,\Phi \models \varphi$. Dann existiert eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung β in $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und $\neg\,\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gelten. Letzteres ist gleichwertig mit $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$. Insgesamt haben wir also $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}[\beta]$, d.h., $\mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\})$.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

15.3 Theorien, Modellklassen und Axiomensysteme.

In vielen Bereichen der Mathematik untersucht man Strukturen mit gewissen gemeinsamen „Grundeigenschaften“. Man untersucht etwa alle linearen Ordnungen oder alle Gruppen oder alle Körper usw. Es handelt sich jeweils um die Analyse der Modellklasse einer gewissen Theorie:

15.17 Definition Eine erfüllbare Menge $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ heißt (L-)**Theorie**.

15.18 Definition (a) Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$. $\mathrm{Mod}^L(\Phi) :\equiv \{\mathfrak{A} \,|\, \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi\}$ heißt **Modellklasse** von Φ.

(b) Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{K}$ heißt **axiomatisierbar**, falls es ein $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ gibt mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$. Φ heißt **Axiomensystem** für $\mathcal{K}$.

Wir definieren einige bekannte Modellklassen.

15.3.1 Die Modellklasse der unendlichen Mengen.

Betrachte $L_\emptyset = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$, die leere Sprache. $\mathrm{Fml}_0(L_\emptyset)$ besteht (im wesentlichen) aus „Anzahlaussagen“: für $1 \le n < \omega$ sei $\varphi_{\ge n} :\equiv \dot{\exists}\dot{v}_0 \ldots \dot{\exists}\dot{v}_{n-1} \bigwedge_{i<j<n} \dot{\neg}\,\dot{v}_i \doteq \dot{v}_j$. $\mathfrak{A} \models \varphi_{\ge n}$ gilt genau dann, wenn $\overline{\overline{A}} \ge n$ ist. $\varphi_{=n} :\equiv \dot{(}\varphi_{\ge n} \dot{\wedge} \dot{\neg}\,\varphi_{\ge n+1}\dot{)}$ formalisiert dann die Aussage, daß der Träger einer mathematischen Struktur genau n Elemente hat. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist genau dann Modell aller Aussagen $\varphi_{\ge n}$, wenn der Träger von $\mathfrak{A}$ unendlich ist. Dies rechtfertigt die folgende Definition:

15.19 Definition $\Phi_\infty :\equiv \{\varphi_{\ge n} \,|\, 1 \le n < \omega\}$ axiomatisiert die **Modellklasse der unendlichen Strukturen**, d.h., die unendlichen Mengen. Φ_∞ ist die **Theorie der unendlichen Mengen**.

15.3.2 Die Modellklasse der Äquivalenzrelationen.

Sei $L_{\text{Äq}} :\equiv \big(\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\}\big)$. Wir bezeichnen das zweistellige Relationssymbol von $L_{\text{Äq}}$ mit $\dot{R}$. Sei $\Phi_{\text{Äq}} :\equiv \{\dot{\forall}\dot{v}_0\, \dot{R}\dot{v}_0\dot{v}_0,\ \dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\forall}\dot{v}_1\, \dot{(}\dot{R}\dot{v}_0\dot{v}_1 \dot{\rightarrow} \dot{R}\dot{v}_1\dot{v}_0\dot{)},\ \dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\forall}\dot{v}_1\dot{\forall}\dot{v}_2\dot{(}\dot{(}\dot{R}\dot{v}_0\dot{v}_1 \dot{\wedge} \dot{R}\dot{v}_1\dot{v}_2\dot{)} \dot{\rightarrow} \dot{R}\dot{v}_0\dot{v}_2\dot{)}\}$. $\Phi_{\text{Äq}}$ axiomatisiert die Modellklasse der Äquivalenzrelationen.[98]

15.3.3 Die Modellklasse der Gruppen.

Sei $L_{\mathrm{Gr}} :\equiv \big(\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{(0,2)\}\big)$. Das Funktionssymbol von L bezeichnen wir mit $\dot{f}$, das Konstantensymbol mit $\dot{e}$. Die Menge Φ_{Gr} bestehe genau aus den folgenden L_{Gr}-Sätzen:

(i) $\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\forall}\dot{v}_1\dot{\forall}\dot{v}_2\ \dot{f}\dot{f}\dot{v}_0\dot{v}_1\dot{v}_2 \doteq \dot{f}\dot{v}_0\dot{f}\dot{v}_1\dot{v}_2$ (Assoziativität);

(ii) $\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{(}\dot{f}\dot{e}\dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0 \dot{\wedge} \dot{f}\dot{v}_0\dot{e} \doteq \dot{v}_0\dot{)}$ (Eigenschaft des neutralen Elementes);

(iii) $\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\exists}\dot{v}_1\ \dot{f}\dot{v}_0\dot{v}_1 \doteq \dot{e}$ (Existenz der rechtsinversen Elemente);

Φ_{Gr} axiomatisiert die Modellklasse der Gruppen und heißt Theorie der Gruppen.

[98] Hierbei betrachten wir nur Äquivalenzrelationen, deren Feld eine Menge ist.

15.3.4 Die Modellklasse der abelschen Gruppen.

Definiere die L_{Gr}-Theorie Φ_{AGr} durch $\Phi_{\mathrm{AGr}} :\equiv \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1\, \dot f \dot v_0 \dot v_1 \doteq \dot f \dot v_1 \dot v_0\}$. Φ_{AGr} axiomatisiert die Modellklasse der abelschen Gruppen und heißt Theorie der abelschen Gruppen.

15.3.5 Die Modellklasse der dichten linearen Ordnungen.

Sei $L_{\mathrm{DLO}} :\equiv (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\})$. Das zweistellige Relationssymbol von L_{DLO} bezeichnen wir mit $\dot R$. Die L_{DLO}-Theorie Φ_{DLO} enthalte genau die folgenden Sätze:

(i) $\dot\forall \dot v_0 \dot\neg \dot R \dot v_0 \dot v_0$ (Irreflexivität);

(ii) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1\, \dot{(}\dot\neg\, \dot v_0 \doteq \dot v_1 \dot\to \dot{(}\dot R \dot v_0 \dot v_1 \dot\vee \dot R \dot v_1 \dot v_0\dot{)}\dot{)}$ (Konnexität);

(iii) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1 \dot\forall \dot v_2\, \dot{(}\dot{(}\dot R \dot v_0 \dot v_1 \dot\wedge \dot R \dot v_1 \dot v_2\dot{)} \dot\to \dot R \dot v_0 \dot v_2\dot{)}$ (Transitivität);

(iv) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1 \dot\exists \dot v_2\, \dot{(}\dot R \dot v_0 \dot v_1 \dot\to \dot{(}\dot R \dot v_0 \dot v_2 \dot\wedge \dot R \dot v_2 \dot v_1\dot{)}\dot{)}$ (Dichtheit);

(v) $\dot\forall \dot v_0 \dot\exists \dot v_1 \dot\exists \dot v_2\, \dot{(}\dot R \dot v_1 \dot v_0 \dot\wedge \dot R \dot v_0 \dot v_2\dot{)}$ (Unbeschränktheit).

Φ_{DLO} axiomatisiert die Modellklasse der (unbeschränkten) dichten linearen Ordnungen und heißt Theorie der dichten linearen Ordnungen.

15.3.6 Die Modellklasse der Peano-Arithmetik.

Wir haben im Kontext der Mengenlehre die Peano-Axiome formuliert, siehe 4.28. Nun wollen wir die Peano-Axiome in einer Sprache der Logik erster Stufe formalisieren. Sei $L_{\mathrm{Arith}} :\equiv (\emptyset, \{\mathrm{add}, \mathrm{mult}\}, \{0,1\}, \{(\mathrm{add}, 2), (\mathrm{mult}, 2)\})$ die Sprache der Arithmetik. Die Konstantensymole von L_{Arith} bezeichnen wir mit $\dot 0$ bzw. $\dot 1$.[99] Die Menge Φ_{PA} bestehe genau aus folgenden L_{Arith}-Sätzen:

(i) $\dot\forall \dot v_0 \dot\neg \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_0 \dot 1 \doteq \dot 0$;

(ii) $\dot\forall \dot v_0\, \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_0 \dot 0 \doteq \dot v_0$;

(iii) $\dot\forall \dot v_0\, \dot f_{\mathrm{mult}} \dot v_0 \dot 0 \doteq \dot 0$;

(iv) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1\, \dot{(}\dot f_{\mathrm{add}} \dot v_0 \dot 1 \doteq \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_1 \dot 1 \dot\to \dot v_0 \doteq \dot v_1\dot{)}$;

(v) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1\, \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_0 \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_1 \dot 1 \doteq \dot f_{\mathrm{add}} \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_0 \dot v_1 \dot 1$;

(vi) $\dot\forall \dot v_0 \dot\forall \dot v_1\, \dot f_{\mathrm{mult}} \dot v_0 \dot f_{\mathrm{add}} \dot v_1 \dot 1 \doteq \dot f_{\mathrm{add}} \dot f_{\mathrm{mult}} \dot v_0 \dot v_1 \dot v_0$;

(vii) **Induktionsschema:**
Für jedes $n < \omega$ und jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}_{n+1}(L_{\mathrm{Arith}})$ der Satz

$$\dot\forall \dot v_0 \ldots \dot\forall \dot v_{n-1} \dot{\Bigg(}\dot{\Bigg(}\varphi \frac{\dot 0}{\dot v_n} \dot\wedge \dot\forall \dot v_n \dot{\Bigg(}\varphi \to \varphi \frac{\dot f_{\mathrm{add}} \dot v_n \dot 1}{\dot v_n}\dot{\Bigg)}\dot{\Bigg)} \dot\longrightarrow \dot\forall \dot v_n \varphi \dot{\Bigg)}$$

In Worten: gilt eine Eigenschaft, *die durch eine Formel der Sprache L_{Arith} der Arithmetik ausgedrückt werden kann*, für das neutrale Element 0 und folgt aus der Gültigkeit dieser Eigenschaft für irgendein Element x deren Gültigkeit für das Element $x+1$, so trifft die Eigenschaft auf alle Elemente zu.

Das Induktions*schema* (vii) ist hierbei der Ersatz für das in der Sprache der Mengenlehre formulierte Induktions*axiom* (P3). Allerdings ist (vii) „schwächer" als (P3): (vii) macht nämlich nur Aussagen über Teilmengen der Trägermenge eines Modells, die *durch eine L_{Arith}-Formel* definiert werden können. Da, wie man leicht zeigt, jedes Modell $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1, t)$ von Φ_{PA} unendlich ist, gibt es $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}} \geq 2^{\aleph_0}$ solche Mengen; da die Sprache L_{Arith} abzählbar ist, gibt es nach 14.32 nur $\aleph_0$ L_{Arith}-Formeln. Also existieren $B \subset A$, die nicht durch eine L_{Arith}-Formel definierbar sind. Unter diesen kann es $B \subsetneq A$ geben, das 0 und mit jedem x auch $x+1$ enthält! Als Folge hiervon können wir den Isomorphiebeweis für Peano-Strukturen 7.1 nicht auf die Modelle von Φ_{PA} übertragen. In der Tat hat Φ_{PA} nicht-isomorphe Modelle, siehe 18.29.

Φ_{PA} heißt Peano-Arithmetik und formalisiert die Modellklasse der Peano-Arithmetik. Ein Modell von Φ_{PA} bilden etwa die natürlichen Zahlen mit den üblichen Verknüpfungen und Konstanten.

[99] Natürlich steht im Kontext der Zahlen $\dot f_{\mathrm{add}}$ für die Addition $+$, $\dot f_{\mathrm{mult}}$ für die Multiplikation $\cdot$, $\dot 0$ für 0 und $\dot 1$ für 1.

15.3.7 Die Modellklasse der Körper.

Die L_{Arith}-Theorie $\Phi_{\text{Körper}}$ bestehe genau aus den folgenden Aussagen:

(i) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\,\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot f_{\text{add}}\dot v_1\dot v_0$ (Kommutativgesetz der Addition);

(ii) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot\forall\dot v_2\,\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot f_{\text{add}}\dot v_1\dot v_2 \doteq \dot f_{\text{add}}\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot v_1\dot v_2$ (Assoziativgesetz der Addition);

(iii) $\dot\forall\dot v_0\,\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot 0 \doteq \dot v_0$ ($\dot 0$ ist neutrales Element der Addition);

(iv) $\dot\forall\dot v_0\dot\exists\dot v_1\,\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot 0$ (Existenz eines additiv inversen Elementes);

(v) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\,\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot f_{\text{mult}}\dot v_1\dot v_0$ (Kommutativgesetz der Multiplikation);

(vi) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot\forall\dot v_2\,\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot f_{\text{mult}}\dot v_1\dot v_2 \doteq \dot f_{\text{mult}}\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_1\dot v_2$ (Assoziativgesetz der Multiplikation);

(vii) $\dot\forall\dot v_0\,\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot 1 \doteq \dot v_0$ ($\dot 1$ ist neutrales Element der Multiplikation);

(viii) $\dot\forall\dot v_0\dot\exists\dot v_1\,\dot(\dot\neg\,\dot v_0 \doteq \dot 0\dot\rightarrow\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot 1\dot)$ (Existenz eines multiplikativ inversen Elementes);

(ix) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot\forall\dot v_2\,\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot f_{\text{add}}\dot v_1\dot v_2 \doteq \dot f_{\text{add}}\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_1\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_2$ (Distributivgesetz);

(x) $\dot\neg\,\dot 0 \doteq \dot 1$.

$\Phi_{\text{Körper}}$ axiomatisiert die Modellklasse der Körper und heißt Theorie der Körper.

15.3.8 Die Modellklasse der algebraisch abgeschlossenen Körper.

Wir definieren zunächst folgende L_{Arith}-Terme:

15.20 Definition (a) Sei $i < \omega$. Definiere durch Rekursion nach $n < \omega$ den L_{Arith}-Term $\dot v_i^n$ durch $\dot v_i^0 = \dot 1$ und $\dot v_i^{n+1} = \dot f_{\text{mult}}\dot v_i^n\dot v_i$.

(b) Definiere durch Rekursion nach $n < \omega$ für $s\colon n \to \mathrm{Tm}(L_{\text{Arith}})$ den L_{Arith}-Term $\sum_{i<n} s(i)$ durch $\sum_{i<0} s(i) = \dot 0$ und $\sum_{i<n+1} s(i) = \dot f_{\text{add}} \sum_{i<n} s(i)\, s(n)$.[100]

Hiermit definieren wir für jedes $n < \omega$, $n \geq 1$, den L_{Arith}-Satz ψ_n durch

$$\psi_n :\equiv \dot\forall\dot v_0 \ldots \dot\forall\dot v_n\dot\exists\dot v_{n+1}\,\dot(\dot\neg\,\dot v_n = \dot 0\dot\rightarrow \sum_{i<n+1} \dot f_{\text{mult}}\dot v_i\dot v_{n+1}^i \doteq \dot 0\dot).$$

(In Gegenwart von $\Phi_{\text{Körper}}$ bedeutet ψ_n gerade, daß jedes Polynom vom Grad n eine Nullstelle hat.) Die L_{Arith}-Theorie $\Phi_{\text{aaK}} :\equiv \Phi_{\text{Körper}} \cup \{\psi_n \,|\, 1 \leq n \wedge n < \omega\}$ axiomatisiert die Modellklasse der algebraisch abgeschlossenen Körper und heißt Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper.

15.3.9 Die Modellklasse der angeordneten Körper.

Sei $L_{\text{aoK}} :\equiv \big(\{0\}, \{\text{add}, \text{mult}\}, \{\dot 0, \dot 1\}, \{(0,2), (\text{add},2), (\text{mult},2)\}\big)$ die Sprache der angeordneten Körper. Die Menge Φ_{aoK} sei diejenige Obermenge von $\Phi_{\text{Körper}}$, die zusätzlich genau die folgenden L_{aoK}-Sätze enthält:

(i) $\dot\forall\dot v_0\,\dot\neg\,\dot R\dot v_0\dot v_0$ (Irreflexivität);

(ii) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\,\dot(\dot\neg\,\dot v_0 \doteq \dot v_1\dot\rightarrow\dot(\dot R\dot v_0\dot v_1 \,\dot\vee\, \dot R\dot v_1\dot v_0\dot)\dot)$ (Konnexität);

(iii) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot\forall\dot v_2\,\dot(\dot(\dot R\dot v_0\dot v_1 \,\dot\wedge\, \dot R\dot v_1\dot v_2\dot)\dot\rightarrow\dot R\dot v_0\dot v_2\dot)$ (Transitivität);

(iv) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot\forall\dot v_2\,\dot(\dot R\dot v_0\dot v_1\dot\rightarrow\dot R\dot f_{\text{add}}\dot v_0\dot v_2\dot f_{\text{add}}\dot v_1\dot v_2\dot)$;

(v) $\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\,\dot(\dot(\dot R\dot 0\dot v_0 \,\dot\wedge\, \dot R\dot 0\dot v_1\dot)\dot\rightarrow\dot R\dot 0\dot f_{\text{mult}}\dot v_0\dot v_1\dot)$.

Φ_{aoK} axiomatisiert die Modellklasse der angeordneten Körper und heißt Theorie der angeordneten Körper.

[100] genauer: $\sum_{i<n+1} s(i) = \dot f_{\text{add}} \sum_{i<n} (s \restriction n)(i)\, s(n)$.

15.3.10 Ein Ausblick auf Axiomatisierbarkeitsfragen.

Wir haben gesehen, daß sich viele Modellklassen axiomatisieren lassen. Jedoch sind nicht *alle* Modellklassen axiomatisierbar: betrachte etwa die Klasse $\mathcal{K} :\equiv \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}^{L_\emptyset}(\Phi_\infty) \wedge \overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \aleph_0\}$ der abzählbaren $L_\emptyset$-Strukturen. Wie wir später sehen werden,[101] hat jede Theorie, die ein Modell mit unendlichem Träger hat, Modelle beliebig großer Kardinalität. Jede $L_\emptyset$-Theorie Φ, die ein unendliches Modell hat, hat also auch ein überabzählbares Modell, d.h., $\mathcal{K} \neq \mathrm{Mod}^{L_\emptyset}(\Phi)$.

Die Existenz einer *unendlichen* Axiomatisierung Φ einer Modellklasse $\mathcal{K}$ wirft die Frage auf, ob $\mathcal{K}$ auch durch eine *endliche* Satzmenge Φ_0, also sogar durch einen *einzigen* Satz (nämlich die Konjunktion der Elemente von Φ_0), axiomatisiert werden kann. Des weiteren stellt sich die Frage nach der Leistungsfähigkeit eines Axiomensystems Φ: ist es so stark, daß es die Gültigkeit oder Nicht-Gültigkeit einer jeden Eigenschaft, die durch einen Satz der entsprechenden Sprache ausgedrückt werden kann (diese werden manchmal *elementare Eigenschaften* genannt), für jedes seiner Modelle bereits festlegt? Wir werden sehen, daß dies möglich ist, und solche Axiomensysteme „vollständig“ nennen.[102] Unmöglich ist es aber, daß ein Axiomensystem, das zumindest ein unendliches Modell hat, seine Modelle *bis auf Isomorphie* festlegt: in diesem Fall hat es nämlich – wie bereits erwähnt – Modelle beliebig großer Kardinalität, die natürlich für unterschiedliche Kardinalitäten nicht isomorph sein können.

Wir werden uns derartigen Fragenkomplexen im Detail später zuwenden. Zunächt wollen wir aber den bisher semantisch[103] formulierten Folgerungsbegriff „Φ impliziert φ“ syntaktisch formulieren: wir werden ein Regelwerk (*Kalkül*) angeben, das es ermöglicht, ohne Rückgriff auf den Modellbegriff allein durch Betrachtung des Axiomensystems Φ zu entscheiden, ob ein Satz φ aus Φ „abgeleitet“ werden kann. Eines unserer wichtigsten Resultate wird dann sein, daß der semantische und der syntaktische Folgerungsbegriff äquivalent sind: eine elementare Eigenschaft gilt genau dann in allen Modellen von Φ, wenn sie in endlich vielen Schritten unter Heranziehung der Regeln des Kalküls aus Φ abgeleitet werden kann. (GÖDELscher Vollständigkeitssatz, 17.28)

16 Ein Logikkalkül.

16.1 Die Substitution.

Bevor wir die Regeln eines Logikkalküls angeben, präzisieren wir, was es bedeutet, in einen Term oder eine Formel für die (freien) Variablen gewisse Terme zu substituieren. Wir fixieren hierzu eine Sprache $L = (I, J, K, t)$. Zur Abkürzung setze $\mathrm{Vbl} :\equiv \{\dot{v}_n \mid n < \omega\}$.

16.1 Definition Sei $x \in \mathrm{Vbl}$ und $s \in \mathrm{Tm}(L)$.

(a) Für $r \in \mathrm{Tm}(L)$ erkläre rekursiv die **Substitution** $r\frac{s}{x}$ durch

$$y\frac{s}{x} :\equiv \begin{cases} y, & \text{falls } y \neq x \\ s, & \text{falls } y = x; \end{cases}$$

$$\dot{c}_k\frac{s}{x} :\equiv \dot{c}_k;$$

$$(\dot{f}_j r(0)\dots r(t(j)-1))\frac{s}{x} :\equiv \dot{f}_j r(0)\frac{s}{x}\dots r(t(j)-1)\frac{s}{x}.$$

(b) Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ erkläre rekursiv die **Substitution** $\varphi\frac{s}{x}$ durch

$$(r_1 \doteq r_2)\frac{s}{x} :\equiv r_1\frac{s}{x} \doteq r_2\frac{s}{x};$$

$$(\dot{R}_i r(0)\dots r(t(i)-1))\frac{s}{x} :\equiv \dot{R}_i r(0)\frac{s}{x}\dots r(t(i)-1)\frac{s}{x};$$

$$\dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}\frac{s}{x} :\equiv \dot{(}\psi_1\frac{s}{x} \dot{\wedge} \psi_2\frac{s}{x}\dot{)};$$

[101] siehe 17.34
[102] siehe 18.25.
[103] d.h., unter Berücksichtigung der *Bedeutung* der betrachteten Sätze

$$(\dot\neg\psi)\frac{s}{x} :\equiv \dot\neg(\psi\frac{s}{x});$$
$$(\dot\forall y\psi)\frac{s}{x} :\equiv \begin{cases} \dot\forall y\psi, & \text{falls } y = x \\ \dot\forall y(\psi\frac{s}{x}), & \text{falls } y \neq x. \end{cases}$$

Den Term $r\frac{s}{x}$ erhält man also, indem man in r jedes x durch s ersetzt. Die Formel $\varphi\frac{s}{x}$ erhält man, indem man in φ jedes x, daß an der entsprechenden Stelle nicht an einen Quantor gebunden ist (man bezeichnet dies auch als *freies Vorkommen* von x), durch s ersetzt.

16.2 Beispiel Wir betrachten die Sprache der Gruppen, wobei wir die in der Mathematik üblichen Bezeichnungen 0 für das neutrale Symbol und $+$ für die Gruppenverknüpfung schreiben; außerdem gehen wir von der polnischen Notation wieder zur üblichen Schreibweise über, schreiben also $x + y$ statt $+xy$. Sei $\varphi :\equiv \dot(\dot\exists u\, u + z \doteq 0 \dot\wedge \dot\exists z\, u + z \doteq 0\dot)$. Dann ist

$$\varphi\frac{x+y}{z} = \dot(\dot\exists u\, u + (x + y) \doteq 0 \dot\wedge \dot\exists z\, u + z = 0\dot).$$

Beim Ausführen einer Substitution kann es geschehen, daß eine Variable eines substituierten Termes in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät. Dies ist unerwünscht. Unserer Intuition nach sollte nämlich $\varphi\frac{s}{x}$ ein „Spezialfall“ von φ sein; gilt also φ in einem Modell $\mathfrak{A}$ unter jeder Belegung β, so sollte auch $\varphi\frac{s}{x}$ in diesem Modell unter jeder Belegung gelten. Betrachten wir aber z.B. im Kontext der Theorie der Gruppen die Formel $\varphi = \dot\exists x\, x + z \doteq 0$, so gilt $\mathbb{Z} \models \dot\exists x\, x + z \doteq 0[\beta]$ für jede Belegung β. Es ist aber

$$\mathbb{Z} \not\models \quad \underbrace{\varphi\frac{x+y}{z}}_{=\dot\exists x\, x+(x+y)\doteq 0} \quad [\beta],$$

wenn $\beta(y) = 1$. Wir wollen i.a. Substitutionen nur dann betrachten, wenn derartige „pathologische“ Fälle nicht eintreten können. Hierzu dient der folgende Begriff.

16.3 Definition Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ und $s \in \mathrm{Tm}(L)$.
φ, s sind **kollisionsfrei** $:\equiv$ jede in φ gebundene Variable kommt in s nicht vor.

Der nächste Satz beinhaltet grob gesprochen, daß $\varphi\frac{s}{x}$ ein „Spezialfall“ von φ ist, wenn φ, s kollisionsfrei sind.

16.4 Satz *Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, $x \in \mathrm{Vbl}$ und $s \in \mathrm{Tm}(L)$.*

(a) Ist $r \in \mathrm{Tm}(L)$, so gilt $\left(r\frac{s}{x}\right)^{\mathfrak{A}}[\beta] = r^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$.

(b) Ist $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß φ, s kollisionsfrei sind, so gilt $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta] \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$.

Beweis. zu (a). Wir führen eine Induktion über den Aufbau der Terme durch.

$r = \dot c_k$. Da $\dot c_k^{\mathfrak{A}}[\gamma] = c_k$ für jede Belegung γ gilt, ist dieser Fall klar.

$r = y$. Ist $y = x$, so gilt

$$\left(y\frac{s}{x}\right)^{\mathfrak{A}}[\beta] = \left(y\frac{s}{y}\right)^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta] = y^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right].$$

Ist $y \neq x$, so gilt

$$\left(y\frac{s}{x}\right)^{\mathfrak{A}}[\beta] = y^{\mathfrak{A}}[\beta] = y^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right].$$

$r = \dot{f}_j r(0) \dots r(t(j)-1)$.

$$\begin{aligned}\big((\dot{f}_j r(0) \dots r(t(j)-1))\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] &= (\dot{f}_j r(0)\frac{s}{x} \dots r(t(j)-1)\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] \\ &= f_j\Big(\big(r(0)\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \big(r(t(j)-1)\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta]\Big) \\ &= f_j\Big(r(0)^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big], \dots, r(t(j)-1)^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big]\Big) \\ &= (\dot{f}_j r(0) \dots r(t(j)-1))^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big].\end{aligned}$$

Damit ist (a) bewiesen.

zu (b) Wir führen eine Induktion über den Aufbau der Formeln durch.

$\varphi = r_1 \doteq r_2$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models (r_1 \doteq r_2)\frac{s}{x} &\iff \mathfrak{A} \models r_1\frac{s}{x} \doteq r_2\frac{s}{x}[\beta] \\ &\iff \big(r_1\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] = \big(r_2\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] \\ &\overset{(a)}{\iff} r_1^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big] = r_2^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big] \\ &\iff \mathfrak{A} \models r_1 \doteq r_2\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big].\end{aligned}$$

$\varphi = \dot{R}_i r(0) \dots r(t(i)-1)$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models (\dot{R}_i r(0) \dots r(t(i)-1))\frac{s}{x}[\beta] &\iff R_i\big(\big(r(0)\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] \dots \big(r(t(i)-1)\frac{s}{x}\big)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big) \\ &\overset{(a)}{\iff} R_i\big(r(0)^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big] \dots r(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big]\big) \\ &\iff \mathfrak{A} \models \dot{R}_i r(0) \dots r(t(i)-1)\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big].\end{aligned}$$

$\varphi = \dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \dot{(}\psi_1\dot{\wedge}\psi_2\dot{)}\frac{s}{x}[\beta] &\iff \mathfrak{A} \models \dot{(}\psi_1\frac{s}{x} \dot{\wedge} \psi_2\frac{s}{x}\dot{)}[\beta] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi_1\frac{s}{x}[\beta] \ \wedge\ \mathfrak{A} \models \psi_2\frac{s}{x}[\beta] \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{\iff} \mathfrak{A} \models \psi_1\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big] \ \wedge\ \mathfrak{A} \models \psi_2\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \dot{(}\psi_1\dot{\wedge}\psi_2\dot{)}\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big].\end{aligned}$$

$\varphi = \dot{\neg}\psi$. Diesen Fall behandelt man analog zum $\dot{\wedge}$-Fall.

$\varphi = \dot{\forall}y\psi$. Wir unterscheiden hier zwei Fälle.

Fall 1. $y = x$. In diesem Fall haben wir

$$\mathfrak{A} \models (\dot{\forall}y\psi)\frac{s}{x}[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \dot{\forall}y\psi[\beta] \ \overset{\text{wg. } x=y\notin\mathrm{fr}(\dot{\forall}y\psi)}{\iff} \mathfrak{A} \models \dot{\forall}y\psi\Big[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\Big].$$

Fall 2. $y \neq x$. Wir zeigen zunächst:

(1) Ist $a \in A$ und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, so ist $\beta\frac{a}{y}\frac{s^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{a}{y}\right]}{x} = (\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x})\frac{a}{y}$.

Beweis. Beide Belegungen stimmen offenbar an allen Stellen $z \in \mathrm{Vbl}\setminus\{x\}$ überein. Da φ, s kollisionsfrei sind, ist $y \notin \mathrm{var}(s)$. Also ist

$$\beta\frac{a}{y}\frac{s^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{a}{y}\right]}{x}(x) = s^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{a}{y}\right] \stackrel{y\notin\mathrm{var}(s)}{=} s^{\mathfrak{A}}[\beta] \stackrel{x\neq y}{=} (\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x})\frac{a}{y}(x).$$

Damit ist alles gezeigt. qed(1)

Da jede in ψ gebundene Variable auch in φ gebunden ist, sind mit φ, s auch ψ, s kollisionsfrei. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models (\dot\forall y\psi)\frac{s}{x}[\beta] &\iff \mathfrak{A} \models \dot\forall y(\psi\frac{s}{x})[\beta] \\
&\iff \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\frac{s}{x}\left[\beta\frac{a}{y}\right] \\
&\stackrel{\text{Ind.Vor.}}{\iff} \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\left[(\beta\frac{a}{y})\frac{s^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{a}{y}\right]}{x}\right] \\
&\stackrel{(1)}{\iff} \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\left[(\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x})\frac{a}{y}\right] \\
&\iff \mathfrak{A} \models \dot\forall y\psi\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right].
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. QED

16.2 Regeln eines Sequenzenkalküls.

Um die Regeln darzustellen, wird oft die in der folgenden Definition präzisierte „Regel-Schreibweise“ herangezogen.

16.5 Definition Seien $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und φ konkret vorgegebene $\in$-Formeln. Es sei

$$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\varphi}\ (\psi) :\equiv \big((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \psi) \to \varphi\big).$$

Interpretation: Aus den **Prämissen** $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ kann bei Bestehen der **Nebenbedingung** ψ auf die **Konklusion** φ geschlossen werden. Haben wir keine Nebenbedingung ψ, so setzen wir

$$\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\varphi} :\equiv \big((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi\big).$$

Da der Logikkalkül die syntaktische Entsprechung der semantischen Folgerungsbeziehung sein soll, ist es sinnvoll, „geeignete“ Eigenschaften der Folgerungsbeziehung zu isolieren und zum Aufbau des Logikkalküls heranzuziehen. Der nächste Satz stellt diese Eigenschaften zusammen.

16.6 Satz *Es gilt:*

Anfangsregel: $$\frac{}{\Phi \models \varphi}\ (\varphi \in \Phi \vee \exists s \in \mathrm{Tm}(L)\ \varphi = s \doteq s) \tag{AR}$$

Und-Regel 1: $$\frac{\Phi \models \dot(\varphi_1 \dot\wedge \varphi_2\dot)}{\Phi \models \varphi_1} \tag{$\wedge$1}$$

Und-Regel 2: $$\frac{\Phi \models \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}}{\Phi \models \varphi_2} \qquad (\wedge 2)$$

Und-Regel 3: $$\frac{\Phi \models \varphi_1 \ \ \Phi \models \varphi_2}{\Phi \models \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}} \qquad (\wedge 3)$$

Widerspruchsregel: $$\frac{\Phi \models \varphi \ \ \Phi \models \dot{\neg}\varphi}{\Phi \models \psi} \qquad (\neg\, 1)$$

Fallunterscheidungsregel: $$\frac{\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi \ \ \Phi \cup \{\dot{\neg}\psi\} \models \varphi}{\Phi \models \varphi} \qquad (\neg\, 2)$$

Instanzierungsregel: $$\frac{\Phi \models \dot{\forall} x \varphi}{\Phi \models \varphi\frac{s}{x}} \ (\varphi, s \text{ kollisionsfrei}) \qquad (\forall\, 1)$$

Universalisierungsregel: $$\frac{\Phi \models \varphi\frac{y}{x}}{\Phi \models \dot{\forall} x \varphi} \ (y \notin \mathrm{fr}(\Phi) \cup \mathrm{var}(\varphi)) \qquad (\forall\, 2)$$

Gleichheitsregel: $$\frac{\Phi \models r \doteq s \ \ \Phi \models \varphi\frac{r}{x}}{\Phi \models \varphi\frac{s}{x}} \ (\varphi \in \mathrm{At}(L)) \qquad (=)$$

Monotonieregel: $$\frac{\Phi \models \varphi}{\Phi' \models \varphi} \ (\Phi \subset \Phi') \qquad (\subset)$$

Die hier angegebenen Regeln nennen wir auch **Regeln des Sequenzenkalküls.**

BEWEIS. Die Korrektheit der Anfangsregel und der Und-Regeln sieht man unmittelbar ein.

zur Widerspruchsregel. Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \dot{\neg}\varphi$ gilt, so ist Φ nicht erfüllbar: in einem Modell müßte $\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \dot{\neg}\varphi\dot{)}$ gelten, was nicht geht. Aus der Nicht-Erfüllbarkeit von Φ und der Definition von $\models$ ergibt sich sofort $\Phi \models \psi$ für jedes $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$.

zur Fallunterscheidungsregel. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt entweder $\mathfrak{A} \models \psi$ oder $\neg\ \mathfrak{A} \models \psi$, d.h., $\mathfrak{A} \models \neg\psi$. Also gilt $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\psi\}$ oder $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\dot{\neg}\psi\}$. Wegen $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ bzw. $\Phi \cup \{\dot{\neg}\psi\} \models \varphi$ folgt in beiden Fällen $\mathfrak{A} \models \varphi$, und dies war zu zeigen.

zur Instanzierungsregel. Es gelte $\Phi \models \dot{\forall} x \varphi$ und es seien φ, s kollisionsfrei. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \dot{\forall} x \varphi[\beta]$, d.h., $\forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \varphi\big[\beta\frac{a}{x}\big]$. Wegen $s^{\mathfrak{A}}[\beta] \in A$ ist also speziell $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$. Da φ, s kollisionsfrei sind, impliziert dies nach 16.4 $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$. Dies war zu beweisen.

zur Universalisierungsregel. Es gelte $\Phi \models \varphi\frac{y}{x}$, wobei $y \notin \mathrm{fr}(\Phi) \cup \mathrm{var}(\varphi)$. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$; es ist $\mathfrak{A} \models \dot{\forall} x \varphi[\beta]$, d.h., $\forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \varphi\big[\beta\frac{a}{x}\big]$ zu zeigen. Sei also $a \in A$. Da $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und $y \notin \mathrm{fr}(\Phi)$ gilt, folgt $\mathfrak{A} \models \Phi\big[\beta\frac{a}{y}\big]$. Wegen $\Phi \models \varphi\frac{y}{x}$ impliziert dies $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{y}{x}\big[\beta\frac{a}{y}\big]$. Da $y \notin \mathrm{var}(\varphi)$ gilt, sind φ, y kollisionsfrei. Aus $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{y}{x}\big[\beta\frac{a}{y}\big]$ folgt also $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{a}{y}\,\frac{y^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}\right]$. Wegen $y^{\mathfrak{A}}\left[\beta\frac{a}{y}\right] = a$ bedeutet dies $\mathfrak{A} \models \varphi\big[\beta\frac{a}{y}\,\frac{a}{x}\big]$. Da $y \notin \mathrm{var}(\varphi)$ ist, folgt hieraus $\mathfrak{A} \models \varphi\big[\beta\frac{a}{x}\big]$, und dies war zu zeigen.

zur Gleichheitsregel. Sei $\varphi \in \mathrm{At}(L)$ und $\Phi \models r \doteq s$ sowie $\Phi \models \varphi\frac{r}{x}$. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$. Dann gilt $r^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{r}{x}[\beta]$. Da φ atomar ist, sind φ, r kollisionsfrei. $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{r}{x}[\beta]$ ist also gleichwertig mit $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{r^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$, wegen $r^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$ also $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$. Hieraus folgt, da φ, s wegen der Atomarität von φ kollisionsfrei sind, $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$. Dies war zu zeigen.

Die Korrektheit der Monotonieregel ist klar. QED

16.7 Definition Sei $U \subset \mathrm{Pot}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$. U **erfüllt die Regeln des Sequenzenkalküls**, falls die Aussagen von 16.6 gelten, wenn man in ihnen jede $\in$-Formel der Art $\Phi \models \varphi$ ersetzt durch $(\Phi, \varphi) \in U$.

Für fixiertes L identifizieren wir $\models$ auf kanonische Weise mit einer Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$:

16.8 Definition $\models_L :\equiv \big\{(\Phi, \varphi) \bigm| \Phi \subset \mathrm{Fml}(L) \ \wedge\ \varphi \in \mathrm{Fml}(L) \ \wedge\ \Phi \models \varphi\big\}$.

Nach dem letzten Satz gilt dann:

16.9 Lemma $\models_L$ *erfüllt die Regeln des Sequenzenkalküls.*

16.3 Die Ableitbarkeitsbeziehung.

Da der Schnitt von Mengen, die die Regeln des Sequenzenkalküls erfüllen, wieder die Regeln des Sequenzenkalküls erfüllt, ist folgende Definition sinnvoll:

16.10 Definition (a) $\vdash_L$ sei die $\subset$-kleinste Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$, die die Regeln des Sequenzenkalküls erfüllt. Statt $(\Phi, \varphi) \in \vdash_L$ schreiben wir i.a. $\Phi \vdash_L \varphi$ oder auch $\Phi \vdash \varphi$, wenn L bekannt ist.

(b) φ ist **aus Φ ableitbar** (auch **beweisbar**) (bzgl. der Sprache L) $:\equiv \Phi \vdash_L \varphi$.

Aus 16.9 folgt sofort:

16.11 Satz (Korrektheit der Regeln des Sequenzenkalküls) $\vdash_L \subset \models_L$.

16.12 Bemerkung Die Korrektheit der Regeln des Sequenzenkalküls besagt, daß jede Formel φ, die man aus Φ mit Hilfe der Regeln des Sequenzenkalküls ableiten kann, auch aus Φ folgt. Der Begriff „Korrektheit“ erklärt sich so: man kann für den Sequenzenkalkül im Prinzip völlig beliebige Regeln wählen; diese Regeln sind aber nur dann sinnvoll, wenn sie einer „Überprüfung“ an der mathematischen Realität[104] standhalten: ein Sequenzenkalkül ist unbrauchbar, wenn man Resultate (=Formeln) ableiten kann, die in der Realität (also auf der Ebene der Modelle) nicht bestehen, wenn also die Ableitbarkeit nicht die Folgerbarkeit impliziert. Positiv ausgedrückt: ein Kalkül ist korrekt, wenn man aus Φ nur Eigenschaften ableiten kann, die in Gegenwart von Φ stets bestehen.

Der nächste Satz sagt uns, wie wir mit Hilfe des Sequenzenkalküls *in endlich vielen Schritten* und *nur unter Beachtung von Φ sowie der Regeln des Sequenzenkalküls* feststellen können, ob aus einer Menge Φ eine Formel φ abgeleitet werden kann.

16.13 Satz $\Phi \vdash_L \varphi$ *ist gleichwertig mit*

$$\begin{aligned}
&\exists n < \omega\, \exists\big((\Phi_i, \varphi_i) \bigm| i \le n\big) \Big(\Phi_n \subset \Phi \wedge \varphi_n = \varphi \wedge \forall i \le n \,\big(\Phi_i \subset \mathrm{Fml}(L) \wedge \overline{\overline{\Phi_i}} < \aleph_0 \wedge \varphi_i \in \mathrm{Fml}(L)\big) \wedge \\
&\wedge \forall i \le n \,\big((\varphi_i \in \Phi_i \vee \exists s \in \mathrm{Tm}(L)\ \varphi_i = s \doteq s) \vee && (\mathrm{AR})\\
&\qquad \exists j < i\, \exists \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ (\Phi_j = \Phi_i \wedge \varphi_j = \dot{(}\varphi_i \dot{\wedge} \psi\dot{)}) \vee && (\wedge 1)\\
&\qquad \exists j < i\, \exists \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ (\Phi_j = \Phi_i \wedge \varphi_j = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \varphi_i\dot{)}) \vee && (\wedge 2)\\
&\qquad \exists j_1, j_2 < i\ (\Phi_{j_1} = \Phi_i \wedge \Phi_{j_2} = \Phi_i \wedge \varphi_i = \dot{(}\varphi_{j_1} \dot{\wedge} \varphi_{j_2}\dot{)}) \vee && (\wedge 3)\\
&\qquad \exists j_1, j_2 < i\ (\Phi_{j_1} = \Phi_i \wedge \Phi_{j_2} = \Phi_i \wedge \varphi_{j_2} = \dot{\neg} \varphi_{j_1}) \vee && (\neg 1)\\
&\qquad \exists j_1, j_2 < i\, \exists \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ (\Phi_{j_1} = \Phi_i \cup \{\psi\} \wedge \Phi_{j_2} = \Phi_i \cup \{\dot{\neg}\psi\} \wedge \varphi_{j_1} = \varphi_i \wedge \varphi_{j_2} = \varphi_i) \vee && (\neg 2)\\
&\qquad \exists j < i\, \exists \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\, \exists s \in \mathrm{Tm}(L)\ (\Phi_j = \Phi_i \wedge \varphi_j = \dot{\forall} x \varphi \wedge \varphi, s \text{ kollisionsfrei} \wedge \varphi_i = \varphi \frac{s}{x}) \vee && (\forall 1)\\
&\qquad \exists j < i\, \exists \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\, \exists y \in \mathrm{Vbl}\ (\Phi_j = \Phi_i \wedge \varphi_j = \varphi \frac{y}{x} \wedge y \notin \mathrm{fr}(\Phi_i) \cup \mathrm{var}(\varphi) \wedge \varphi_i = \dot{\forall} x \varphi) \vee && (\forall 2)\\
&\qquad \exists j_1, j_2 < i\, \exists \varphi \in \mathrm{At}(L)\, \exists r, s \in \mathrm{Tm}(L)\\
&\qquad (\Phi_{j_1} = \Phi_i \wedge \Phi_{j_2} = \Phi_i \wedge \varphi_{j_1} = r \doteq s \wedge \varphi_{j_2} = \varphi \frac{r}{x} \wedge \varphi_i = \varphi \frac{s}{x}) \vee && (=)\\
&\qquad \exists j < i\ (\Phi_j \subset \Phi_i \wedge \varphi_j = \varphi_i)\big)\Big). && (\subset)
\end{aligned}$$

Eine Folge $\big((\Phi_i, \varphi_i) \bigm| i \le n\big)$ mit den soeben beschriebenen Eigenschaften heißt **Ableitung** *oder auch* **formaler Beweis** *von φ aus Φ.*

[104] Hiermit meinen wir das mathematische Universum, in dem wir normalerweise Mathematik betreiben.

Beweis. Sei $U :\equiv \big\{(\Phi,\varphi) \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L) \;\big|\;$ es existiert eine Ableitung von φ aus $\Phi\big\}$. Es ist $U = \vdash_L$ zu zeigen.

zu „$\subset$". Sei $U' \subset \mathrm{Pot}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$ eine Menge, die die Regeln des Sequenzenkalküls erfüllt. Es ist $U \subset U'$ zu zeigen. Hierzu beweisen wir durch Induktion nach n:

$(*)$ Hat φ eine Ableitung aus Φ der Länge $n+1$, so ist $(\Phi,\varphi) \in U'$.

Hieraus folgt $U \subset U'$.
Beweis von $(*)$. Sei $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ eine Ableitung von φ aus Φ. Da diese Ableitung speziell an der Stelle $i = n$ gemäß der obigen Formel gebildet ist, genügt (Φ_n,φ_n) einer der mit (AR),. . .,($\subset$) bezeichneten Teilformeln in 16.13. Außerdem ist $\varphi_n = \varphi$ und $\Phi_n \subset \Phi$. Wir unterscheiden nun die Fälle, welcher Teilformel (Φ_n,φ_n) genügt. Erfüllt (Φ_n,φ_n) (AR), so ist $\varphi = \varphi_n \in \Phi_n \subset \Phi$ oder $\varphi = s \doteq s$ für ein $s \in \mathrm{Tm}(L)$. Da U' die Anfangsregel des Sequenzenkalküls erfüllt, folgt $(\Phi,\varphi) \in U'$. Bezüglich der anderen Teilformeln betrachten wir exemplarisch den Fall, daß (Φ_n,φ_n) die Teilformel ($\wedge$3) erfüllt. In diesem Fall existieren $j_1, j_2 < n$ mit $\Phi_{j_1} = \Phi_n$, $\Phi_{j_2} = \Phi_n$ sowie $\varphi = \varphi_n = \dot{(}\varphi_{j_1} \dot\wedge \varphi_{j_2}\dot{)}$. Dann ist $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq j_1\big)$ eine Ableitung von φ_{j_1} aus Φ_n und $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq j_2\big)$ eine Ableitung von φ_{j_2} aus Φ_n. Nach Induktionsvoraussetzung gilt deshalb $(\Phi_n,\varphi_{j_1}) \in U'$ und $(\Phi_n,\varphi_{j_2}) \in U'$. Da U' die Und-Regel ($\wedge$3) erfüllt, folgt hieraus

$$(\Phi_n, \underbrace{\dot{(}\varphi_{j_1} \dot\wedge \varphi_{j_2}\dot{)}}_{=\varphi}) \in U'.$$

Da U' die Monotonieregel erfüllt und $\Phi_n \subset \Phi$ gilt, folgt $(\Phi,\varphi) \in U'$. qed$(*)$

zu „$\supset$". Es ist zu zeigen, daß U die Regeln des Sequenzenkalküls erfüllt. Da für $\varphi \in \Phi \cup \{s \doteq s \,|\, s \in \mathrm{Tm}(L)\}$ durch $\big((\Phi \cap \{\varphi\},\varphi) \;\big|\; i < 1\big)$ eine Ableitung von φ aus Φ gegeben ist, erfüllt U die Anfangsregel. Bezüglich der anderen Regeln beweisen wir exemplarisch, daß U die Fallunterscheidungsregel erfüllt. (Die anderen Regeln behandelt man ganz analog.) Es gelte also $(\Phi \cup \{\psi\},\varphi) \in U$ und $(\Phi \cup \{\dot\neg\psi\},\varphi) \in U$. Sei $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ Ableitung von φ aus $\Phi \cup \{\psi\}$ und $\big((\Psi_i,\psi_i) \;\big|\; i \leq m\big)$ Ableitung von φ aus $\Phi \cup \{\dot\neg\psi\}$. Wegen der in 16.13 mit ($\subset$) bezeichneten Teilformel können wir $\Phi_n = \Phi' \cup \{\psi\}$ und $\Psi_m = \Phi' \cup \{\dot\neg\psi\}$ mit einer endlichen Menge $\Phi' \subset \Phi$ annehmen. (Beachte, daß nach Definition des Begriffs „Ableitung" im Satz $\Phi_n \subset \Phi \cup \{\psi\}$ und $\Psi_m \subset \Phi \cup \{\dot\neg\psi\}$ endliche Mengen sind.) Definiere $\big((\Theta_i,\theta_i) \;\big|\; i \leq m+n+2\big)$ durch

$$(\Theta_i,\theta_i) :\equiv \begin{cases} (\Phi_i,\varphi_i) & \text{falls } i \leq n \\ (\Psi_{i-(n+1)},\psi_{i-(n+1)}), & \text{falls } n+1 \leq i \leq (n+1)+m \\ (\Phi',\varphi), & \text{falls } i = n+m+2. \end{cases}$$

$\big((\Theta_i,\theta_i) \;\big|\; i \leq m+n+2\big)$ ist eine Ableitung von φ aus Φ: daß die entsprechenden Eigenschaften für (Θ_i,θ_i) mit $i < n+m+2$ erfüllt sind, folgt sofort daraus, daß $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ bzw. $\big((\Psi_i,\psi_i) \;\big|\; i \leq m\big)$ Ableitungen sind; wegen $\Theta_n = \Phi_n = \Phi' \cup \{\psi\} = \Theta_{n+m+2} \cup \{\psi\}$, $\Theta_{n+m+1} = \Psi_m = \Phi' \cup \{\dot\neg\psi\} = \Theta_{n+m+2} \cup \{\dot\neg\psi\}$ sowie $\theta_n = \varphi_n = \varphi = \theta_{n+m+2}$ und $\theta_{n+m+1} = \psi_m = \varphi = \theta_{n+m+2}$ ist die Folge nach ($\neg$2) aus 16.13 auch an der Stelle $i = n+m+2$ korrekt gebildet. QED

16.14 Corollar *(a) Sei $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ ein formaler Beweis. Dann ist $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq j\big)$ für jedes $j \leq n$ ein formaler Beweis von φ_j aus Φ_j. Insbesondere gilt also $\Phi_j \vdash \varphi_j$.*

(b) $\Phi \vdash_L \varphi \iff \exists \Phi' \subset \Phi \,\big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi' \vdash_L \varphi\big)$.

Beweis. zu (a). Dies folgt sofort aus der definierenden Formel im Satz.

zu (b). zu „$\Rightarrow$". Sei $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ eine Ableitung von φ aus Φ. Dann ist $\Phi' :\equiv \Phi_n$ endliche Teilmenge von Φ und $\varphi_n = \varphi$. Nach (a) gilt ferner $\Phi' \vdash_L \varphi$.
zu „$\Leftarrow$". Dies folgt sofort aus der Monotonieregel. QED

In Hinblick auf Teil (a) des Corollars schreiben wir einen formalen Beweis $\big((\Phi_i,\varphi_i) \;\big|\; i \leq n\big)$ auch in der Form

1. $\Phi_0 \vdash \varphi_0$

$\vdots$

n+1.$\Phi_n \vdash \varphi_n$.

Zur Erläuterung der einzelnen Schritte fügen wir ggf. in der entsprechenden Zeile des Beweises in Klammern die angewendete Regel bei. Statt $\Phi \cup \{\varphi\}$ schreiben wir in einem solchen Beweis meist Φ, φ.

16.15 Lemma *Es gilt:* $\Phi, \varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$, $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \varphi$.

Beweis.
1. $\Phi, \varphi, \dot\neg\varphi \vdash \varphi$ (AR)
2. $\Phi, \varphi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\varphi$ (AR)
3. $\Phi, \varphi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ (($\neg$1) angewendet auf 1.,2.)
4. $\Phi, \varphi, \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ (AR)
5. $\Phi, \varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ (($\neg$2) angewendet auf 3.,4.)

1. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\varphi$ (AR)
2. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ (AR)
3. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi, \dot\neg\varphi \vdash \varphi$ (($\neg$1) angewendet auf 1.,2.)
4. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi$ (AR)
5. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \varphi$ (($\neg$2) angewendet auf 3.,4.)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

16.4 Abgeleitete Regeln.

Abgeleitete Regeln sind Regeln, die aus den bisher formulierten Grundregeln folgen. Sie lassen sich (als Abkürzungen) in formalen Beweisen verwenden und helfen, diese übersichtlicher zu gestalten. Um die Korrektheit einer abgeleiteten Regel zu beweisen, ist zu zeigen, daß aus den Prämissen unter Anwendung der Regeln des Sequenzenkalküls bzw. abgeleiteter Regel, deren Korrektheit bereits bewiesen ist, die Konklusion der Regel folgt.

16.16 Lemma *(a)* $\dfrac{\Phi \vdash t \doteq s \quad \Phi \vdash t \doteq r}{\Phi \vdash s \doteq r}$.

(b) $\dfrac{\Phi \vdash r \doteq s}{\Phi \vdash s \doteq r}$ *(***Symmetrie von** $\doteq$*).*

(c) $\dfrac{\Phi \vdash r \doteq s \quad \Phi \vdash s \doteq t}{\Phi \vdash r \doteq t}$ *(***Transitivität von** $\doteq$*).*

Beweis. zu (a) Sei $x \in \mathrm{Vbl} \setminus \mathrm{var}(r)$. Dann gilt $t \doteq r = (x \doteq r)\frac{t}{x}$ und $s \doteq r = (x \doteq r)\frac{s}{x}$. Wir erhalten:
1. $\Phi \vdash t \doteq s$ (Prämisse)
2. $\Phi \vdash (x \doteq r)\frac{t}{x}$ (Prämisse)
3. $\Phi \vdash (x \doteq r)\frac{s}{x}$ (=)

zu (b).
1. $\Phi \vdash r \doteq s$ (Prämisse)
2. $\Phi \vdash r \doteq r$ (AR)
3. $\Phi \vdash s \doteq r$ ((a) angewendet auf 1., 2.)

zu (c).
1. $\Phi \vdash r \doteq s$ (Prämisse)
2. $\Phi \vdash s \doteq t$ (Prämisse)
3. $\Phi \vdash s \doteq r$ ((b) angewendet auf 1.)
4. $\Phi \vdash r \doteq t$ ((a) angewendet auf 3., 2.)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

16.17 Satz *(a)* $\dfrac{\Phi \vdash \varphi_0 \;\; \Phi \cup \{\varphi_0\} \vdash \varphi_1}{\Phi \vdash \varphi_1}$ *(***Modus Ponens***).*

(b) $\dfrac{\Phi \cup \{\varphi_0\} \vdash \varphi_1}{\Phi \cup \{\dot\neg\varphi_1\} \vdash \dot\neg\varphi_0}$ *(***Kontraposition***).*

(c) $\dfrac{\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\} \vdash \psi \;\; \Phi \cup \{\dot\neg\varphi\} \vdash \dot\neg\psi}{\Phi \vdash \varphi}$; $\dfrac{\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi \;\; \Phi \cup \{\varphi\} \vdash \dot\neg\psi}{\Phi \vdash \dot\neg\varphi}$

*(***Prinzip des Widerspruchsbeweises***).*

Beweis. zu (a).

1. $\Phi \vdash \varphi_0$	(Prämisse)
2. $\Phi, \varphi_0 \vdash \varphi_1$	(Prämisse)
3. $\Phi, \dot\neg\varphi_0 \vdash \varphi_0$	(($\subset$) angewendet auf 1.)
4. $\Phi, \dot\neg\varphi_0 \vdash \dot\neg\varphi_0$	(AR)
5. $\Phi, \dot\neg\varphi_0 \vdash \varphi_1$	(($\neg$1) angewendet auf 3.,4.)
6. $\Phi \vdash \varphi_1$	(($\neg$2) angewendet auf 2.,5.)

zu (b).

1. $\Phi, \varphi_0 \vdash \varphi_1$	(Prämisse)
2. $\Phi, \dot\neg\varphi_1, \varphi_0 \vdash \varphi_1$	(($\subset$) angewendet auf 1.)
3. $\Phi, \dot\neg\varphi_1, \varphi_0 \vdash \dot\neg\varphi_1$	(AR)
4. $\Phi, \dot\neg\varphi_1, \varphi_0 \vdash \dot\neg\varphi_0$	(($\neg$1) angewendet auf 2.,3.)
5. $\Phi, \dot\neg\varphi_1, \dot\neg\varphi_0 \vdash \dot\neg\varphi_0$	(AR)
6. $\Phi, \dot\neg\varphi_1 \vdash \dot\neg\varphi_0$	(($\neg$2) angewendet auf 4.,5.)

zu (c). Wir zeigen nur die erste Regel; die zweite beweist man analog.

1. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \psi$	(Prämisse)
2. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\psi$	(Prämisse)
3. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \varphi$	(($\neg$1) angewendet auf 1.,2.)
4. $\Phi, \varphi \vdash \varphi$	(AR)
5. $\Phi \vdash \varphi$	(($\neg$2) angewendet auf 3.,4.)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

16.18 Lemma $\forall\Phi \; \dfrac{\Phi \vdash \varphi}{\Phi \vdash \psi} \implies \forall\Phi \; \Phi, \varphi \vdash \psi.$

Beweis. Es gelte $\frac{\Phi \vdash \varphi}{\Phi \vdash \psi}$ für alle Φ. Dann gilt für jedes Φ:

1. $\Phi, \varphi \vdash \varphi$	(AR)
2. $\Phi, \varphi \vdash \psi$	(Voraussetzung angewendet auf 1.)

Damit ist alles gezeigt. QED

Das Resultat dieses Lemmas werden wir im folgenden öfters benutzen, ohne jeweils darauf hinzuweisen.

16.19 Satz (Regeln von de Morgan[105]) .

(a) $\dfrac{\Phi \vdash \dot\neg\dot{(}\varphi \dot\wedge \psi\dot{)}}{\Phi \vdash \dot{(}\dot\neg\varphi \dot\vee \dot\neg\psi\dot{)}}, \dfrac{\Phi \vdash \dot{(}\dot\neg\varphi \dot\vee \dot\neg\psi\dot{)}}{\Phi \vdash \dot\neg\dot{(}\varphi \dot\wedge \psi\dot{)}}.$

(b) $\dfrac{\Phi \vdash \dot\neg\dot{(}\varphi \dot\vee \psi\dot{)}}{\Phi \vdash \dot{(}\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot{)}}, \dfrac{\Phi \vdash \dot{(}\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot{)}}{\Phi \vdash \dot\neg\dot{(}\varphi \dot\vee \psi\dot{)}}.$

[105] Augustus de Morgan (27.6.1806, Madura (Indien)–18.3.1871, London) 1823–1827 Studium in Cambridge; 1828 Professor an der Universität London. de Morgans Hauptarbeitsgebiet ist die formale Logik.

Beweis. zu (a). Um die erste Regel zu beweisen, ist nach 16.18

$$\Phi, \dot\neg\dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \underbrace{\dot(\dot\neg\varphi \dot\vee \dot\neg\psi\dot)}_{\stackrel{\mathrm{Def.}}{=} \dot\neg\dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \,\dot\wedge\, \dot\neg\dot\neg\psi\dot)}$$

zu zeigen. Nach der Kontrapositionsregel ist hierzu $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot)$ zu verifizieren.

1. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ — ($\wedge$1)
2. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot), \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \varphi$ — (16.15)
3. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \varphi$ — (Modus Ponens)
4. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot\neg\psi$ — ($\wedge$1)
5. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot), \dot\neg\dot\neg\psi \vdash \psi$ — (16.15)
6. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \psi$ — (Modus Ponens auf 4.,5.)
7. $\Phi, \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot) \vdash \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot)$ — (($\wedge$3) angewendet auf 3.,6.)

Um die zweite Regel zu beweisen, ist nach Kontraposition zu zeigen: $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \ \dot\wedge\ \dot\neg\dot\neg\psi\dot)$. Hierzu:

1. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \varphi$ — ($\wedge$1)
2. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot), \varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ — (16.15)
3. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$ — (Modus Ponens)
4. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \psi$ — ($\wedge$2)
5. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot), \psi \vdash \dot\neg\dot\neg\psi$ — (16.15)
6. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot\neg\psi$ — (Modus Ponens angewendet auf 4.,5.)
7. $\Phi, \dot(\varphi\dot\wedge\psi\dot) \vdash \dot(\dot\neg\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\dot\neg\psi\dot)$ — (($\wedge$3) angewendet auf 3.,6.)

zu (b). Zur ersten Regel:

1. $\Phi \vdash \dot\neg \underbrace{\dot(\varphi\dot\vee\psi\dot)}_{\stackrel{\mathrm{Def.}}{=} \dot\neg\dot(\dot\neg\varphi \,\dot\wedge\, \dot\neg\psi\dot)}$ — (Prämisse)
2. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (16.15)
3. $\Phi \vdash \dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (Modus Ponens)

Zur zweiten Regel: Wegen $\dot(\varphi\dot\vee\psi\dot) = \dot\neg\dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ gilt $\Phi, \dot(\varphi\dot\vee\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$. Aus der Kontrapositionsregel folgt also $\Phi, \dot(\dot\neg\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot(\varphi\dot\vee\psi\dot)$, so daß 16.18 die Behauptung liefert. QED

16.20 Corollar $\dfrac{\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Phi \vdash \dot(\varphi\dot\rightarrow\psi\dot)}$.

Beweis.

1. $\Phi, \varphi \vdash \psi$ — (Prämisse)
2. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (AR)
3. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \varphi$ — (($\wedge$1) angewendet auf 2.)
4. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot), \varphi \vdash \psi$ — (($\subset$) angewendet auf 1.)
5. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \psi$ — (Modus Ponens angewendet auf 3.,4.)
6. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\psi$ — (($\wedge$2) angewendet auf 2.)
7. $\Phi, \dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (($\neg$1) angewendet auf 5.,6.)
8. $\Phi, \dot\neg\dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot) \vdash \dot\neg\dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (AR)
9. $\Phi \vdash \dot\neg\dot(\varphi \dot\wedge \dot\neg\psi\dot)$ — (($\neg$2) angewendet auf 7.,8.)
10. $\Phi \vdash \dot(\dot\neg\varphi \dot\vee \dot\neg\dot\neg\psi\dot)$ — (de Morgan angewendet auf 9.)
11. $\Phi \vdash \dot(\varphi\dot\rightarrow\psi\dot)$

QED

Zum Abschluß zeigen wir an einem **Beispiel**, wie sich ein „mathematischer“ Beweis in einen formalen Beweis transformiert. Hierzu sei zunächst $\mathfrak{G}$ eine Gruppe[106] mit neutralem Element e; die Gruppenver-

[106] d.h., ein Modell von Φ_{Gr}, siehe Seite 120.

knüpfung bezeichnen wir mit $\circ$. Dann gilt

($*$) Ist $u \in \mathfrak{G}$ und $v \in \mathfrak{G}$ rechtsinverses Element von u, so ist v auch ein linksinverses Element von u.

Wir geben zunächst einen mathematischen Beweis dieser Behauptung an. Es gelte also $u \circ v = e$. Wähle ein $w \in \mathfrak{G}$ mit $v \circ w = e$; w existiert, da jedes Gruppenelement ein rechtsinverses Element hat. Dann folgt:

$$\begin{aligned} v \circ u &= (v \circ u) \circ e && (1)\\ &= (v \circ u) \circ (v \circ w) && (2)\\ &= v \circ (u \circ (v \circ w)) && (3)\\ &= v \circ ((u \circ v) \circ w) && (4)\\ &= v \circ (e \circ w) && (5)\\ &= (v \circ e) \circ w && (6)\\ &= v \circ w && (7)\\ &= e && (8) \end{aligned}$$

Wir transformieren diesen Beweis nun in einen formalen Beweis. Um die Lesbarkeit zu vereinfachen vereinbaren wir zunächst, das zweistellige Funktionssymbol der Sprache L_{Gr} mit $\dot\circ$ zu bezeichnen und von der polnischen Notation zur bei Verknüpfungen üblichen überzugehen, d.h., statt $\dot\circ uv$ schreiben wir $u\dot\circ v$.[107] Wir haben dann eine Ableitung anzugeben für

$$\dot\forall u \dot\forall v \,\dot{(}u\dot\circ v \doteq \dot e \dot\to v\dot\circ u \doteq e\dot{)}.$$

Hierzu sei $\Phi :\equiv \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{u\dot\circ v \doteq \dot e\} \cup \{v\dot\circ w \doteq \dot e\}$. Wir leiten zunächst die obigen Gleichungen (1) bis (8) ab (diese sind im folgenden unterstrichen):

1. $\Phi \vdash \dot\forall x\, x\dot\circ\dot e \doteq x$	(AR)
2. $\Phi \vdash (v\dot\circ u)\dot\circ\dot e \doteq v\dot\circ u$	(($\forall$1) angewendet auf 1.)
3. $\Phi \vdash \underline{v\dot\circ u \doteq (v\dot\circ u) \circ \dot e}$	(Symmetrie von $\doteq$)
4. $\Phi \vdash v\dot\circ w \doteq \dot e$	(AR)
5. $\Phi \vdash (v\dot\circ u)\dot\circ x \doteq (v\dot\circ u)\dot\circ(v\dot\circ w)\frac{v\dot\circ w}{x}$	(AR)
6. $\Phi \vdash \underline{(v\dot\circ u)\dot\circ\dot e \doteq (v\dot\circ u)\dot\circ(v\dot\circ w)}$	((=) angewendet auf 4.,5.)
7. $\Phi \vdash \dot\forall x\dot\forall y\dot\forall z\,(x\dot\circ y)\dot\circ z \doteq x\dot\circ(y\dot\circ z)$	(AR)
8. $\Phi \vdash \dot\forall y\dot\forall z\,(v\dot\circ y)\dot\circ z \doteq v\dot\circ(y\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 7.)
9. $\Phi \vdash \dot\forall z\,(v\dot\circ u)\dot\circ z \doteq v\dot\circ(u\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 8.)
10. $\Phi \vdash \underline{(v\dot\circ u)\dot\circ(v\dot\circ w) \doteq v\dot\circ(u\dot\circ(v\dot\circ w))}$	(($\forall$1) angewendet auf 9.)
11. $\Phi \vdash \dot\forall y\dot\forall z\,(u\dot\circ y)\dot\circ z \doteq u\dot\circ(y\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 7.)
12. $\Phi \vdash \dot\forall z\,(u\dot\circ v)\dot\circ z \doteq u\dot\circ(v\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 11.)
13. $\Phi \vdash (u\dot\circ v)\dot\circ w \doteq u\dot\circ(v\dot\circ w)$	(($\forall$1) angewendet auf 12.)
14. $\Phi \vdash u\dot\circ(v\dot\circ w) \doteq (u\dot\circ v)\dot\circ w$	(Symmetrie von $\doteq$ angewendet auf 13.)
15. $\Phi \vdash v\dot\circ(u\dot\circ(v\dot\circ w)) \doteq v\dot\circ x\frac{u\dot\circ(v\dot\circ w)}{x}$	(AR)
16. $\Phi \vdash \underline{v\dot\circ(u\dot\circ(v\dot\circ w)) \doteq v\dot\circ((u\dot\circ v)\dot\circ w)}$	((=) angewendet auf 14.,15.)
17. $\Phi \vdash u\dot\circ v \doteq \dot e$	(AR)
18. $\Phi \vdash v\dot\circ((u\dot\circ v)\dot\circ w) = v\dot\circ(x\dot\circ w)\frac{u\dot\circ v}{x}$	(AR)
19. $\Phi \vdash \underline{v\dot\circ((u\dot\circ v)\dot\circ w) = v\dot\circ(\dot e\dot\circ w)}$	((=) angewendet auf 17.,18.)
20. $\Phi \vdash \dot\forall y\dot\forall z\,(v\dot\circ y)\dot\circ z \doteq v\dot\circ(y\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 7.)
21. $\Phi \vdash \dot\forall z\,(v\dot\circ\dot e)\dot\circ z \doteq v\dot\circ(\dot e\dot\circ z)$	(($\forall$1) angewendet auf 20.)
22. $\Phi \vdash (v\dot\circ\dot e)\dot\circ w \doteq v\dot\circ(\dot e\dot\circ w)$	(($\forall$1) angewendet auf 21.)
23. $\Phi \vdash \underline{v\dot\circ(\dot e\dot\circ w) \doteq (v\dot\circ\dot e)\dot\circ w}$	(Symmetrie von $\doteq$)
24. $\Phi \vdash v\dot\circ\dot e \doteq v$	(($\forall$1) angewendet auf 1.)

[107] Wir benötigen dann zusätzliche Klammern, um die Reihenfolge der Operationen zu fixieren.

25.$\Phi \vdash (v\dot\circ\dot e)\dot\circ w = x\dot\circ w\frac{v\dot\circ\dot e}{x}$ (AR)
26.$\Phi \vdash \underline{(v\dot\circ\dot e)\dot\circ w \doteq v\dot\circ w}$ ((=) angewendet auf 24.,25.)
27.$\Phi \vdash \underline{v\dot\circ w \doteq \dot e}$ (AR)
Wir fassen die Kette der unterstrichenen Gleichungen zusammen:
28.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq (v\dot\circ u)\dot\circ(v\dot\circ w)$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 3.,6.)
29.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq v\dot\circ(u\dot\circ(v\dot\circ w))$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 28.,10.)
30.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq v\dot\circ((u\dot\circ v)\dot\circ w)$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 29.,16.)
31.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq v\dot\circ(\dot e\dot\circ w)$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 30.,19.)
32.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq (v\dot\circ\dot e)\dot\circ w$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 31.,23.)
33.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq v\dot\circ w$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 32.,26.)
34.$\Phi \vdash v\dot\circ u \doteq \dot e$ (Transitivität von $\doteq$ angewendet auf 33.,27.)
Wir eliminieren die Annahme „$v\dot\circ w \doteq \dot e$“: 34. bedeutet
34.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e, v\dot\circ w \doteq \dot e \vdash v\dot\circ u \doteq \dot e$
35.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e, \dot\neg\, v\dot\circ u \doteq \dot e \vdash \dot\neg\, v\dot\circ w \doteq \dot e$ (Kontraposition angewendet auf 34.)
36.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e, \dot\neg\, v\dot\circ u \doteq \dot e \vdash \dot\forall y\, \dot\neg\, v\dot\circ y \doteq \dot e$ (($\forall$2) angewendet auf 35.)
37.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e, \dot\neg\, v\dot\circ u \doteq \dot e \vdash \dot\forall x\, \dot\neg\dot\forall y\, \dot\neg\, x\dot\circ y \doteq \dot e$ ((AR); beachte $\dot\neg\dot\forall y\, \dot\neg\, x\dot\circ y \doteq \dot e = \dot\exists y\; x\dot\circ y \doteq \dot e$)
38.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e, \dot\neg\, v\dot\circ u \doteq \dot e \vdash \dot\neg\dot\forall y\, \dot\neg\, v\dot\circ y \doteq \dot e$ (($\forall$1) angewendet auf 37.)
39.$\Phi_{\mathrm{Gr}}, u\dot\circ v \doteq \dot e \vdash v\dot\circ u \doteq \dot e$ (Prinzip des Widerspruchsbeweises angewendet auf 36.,38.)
Wir übernehmen abschließend „$u\dot\circ v \doteq \dot e$“ in die Folgerung. Nach 16.20 folgt aus 39.:
40.$\Phi_{\mathrm{Gr}} \vdash \dot(u\dot\circ v \doteq \dot e \dot\to v\dot\circ u \doteq \dot e \dot)$
41.$\Phi_{\mathrm{Gr}} \vdash \dot\forall v\, \dot(u\dot\circ v \doteq \dot e \dot\to v\dot\circ u \doteq \dot e \dot)$ (($\forall$2) angewendet auf 40.)
42.$\Phi_{\mathrm{Gr}} \vdash \dot\forall u \dot\forall v\, \dot(u\dot\circ v \doteq \dot e \dot\to v\dot\circ u \doteq \dot e \dot)$ (($\forall$2) angewendet auf 41.)

Damit ist die gewünschte Ableitung gefunden. (Beachten Sie aber, daß wir streng genommen an allen jenen Stellen, an denen wir uns auf eine abgeleitete Regel bezogen haben, die Ableitung der entsprechenden abgeleiteten Regel (angepaßt an die jeweils vorliegende Situation) einfügen müßten, um einen Beweis zu erhalten, der an jeder Stelle den Regeln des Kalküls genügt.)

17 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

Wir fixieren eine Sprache $L = (I, J, K, t)$.

Im letzten Kapitel haben wir die Korrektheit des Sequenzenkalküls bewiesen: *höchstens* das, was wir aus einer Formelmenge Φ folgern können, können wir aus ihr auch ableiten. ($\vdash_L \subset \models_L$.) Hauptziel dieses Kapitels ist es, die *Vollständigkeit* des Sequenzenkalküls zu beweisen: die Regeln des Sequenzenkalküls sind reichhaltig genug, um *mindestens* jede Aussage, die aus einer Formelmenge Φ folgt, aus dieser auch ableiten zu können. ($\models_L \subset \vdash_L$.) Die Korrektheit und die Vollständigkeit gemeinsam besagen dann, daß der semantische Folgerungsbegriff und der syntaktischen Ableitbarkeitsbegriff gleichwertig sind: $\models_L = \vdash_L$.

17.1 Konsistenz und Inkonsistenz.

17.1 Definition (a) Φ ist **L-konsistent** $:\equiv \mathrm{Kon}^L(\Phi) :\equiv \exists\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \neg\, \Phi \vdash_L \varphi$.
(b) Φ ist **L-inkonsistent** $:\equiv \forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\; \Phi \vdash_L \varphi$.

Zur Analyse des (In-)Konsistenzbegriffes ist die Einführung einer „widersprüchlichen Aussage“ hilfreich:

17.2 Definition $\perp :\equiv \dot\neg\dot\forall x\; x \doteq x$ heißt **Falsum**.

Eine Formelmenge ist genau dann inkonsistent, wenn man aus ihr einen Widerspruch (d.h., zwei sich widersprechende Aussagen) bzw. wenn man aus ihr eine widersprüchliche Aussage ableiten kann:

17.3 Satz *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Φ *ist L-inkonsistent;*

(ii) $\neg\,\mathrm{Kon}^L(\Phi)$;

(iii) $\exists\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \big(\Phi \vdash_L \varphi \wedge \Phi \vdash_L \dot\neg\varphi\big)$;

(iv) $\Phi \vdash_L \bot$.

Beweis. „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)" und „(i)$\Rightarrow$(iii)" sind klar.

„(iii)$\Rightarrow$(iv)". Sei φ wie in (iii).

1. $\Phi \vdash \varphi$ (Voraussetzung)
2. $\Phi \vdash \dot\neg\varphi$ (Voraussetzung)
3. $\Phi \vdash \bot$ ((¬ 1) angewendet auf 1.,2.)

ist eine Ableitung von $\bot$ aus Φ.

„(iv)$\Rightarrow$(i)". Sei $\Phi \vdash \bot$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Nach 16.14 existiert ein endliches $\Phi' \subset \Phi$ mit $\Phi' \vdash \bot$. Sei $y \in \mathrm{Vbl} \setminus \big(\mathrm{fr}(\Phi') \cup \{x\}\big)$. (Es ist $\mathrm{Vbl} \setminus \big(\mathrm{fr}(\Phi') \cup \{x\}\big) \neq \emptyset$, weil $\mathrm{fr}(\Phi') \cup \{x\}$ eine endliche Menge ist.) Wir haben dann die folgende Ableitung von φ aus Φ:

1. $\Phi' \vdash \dot\neg\dot\forall x\, x \doteq x$ (Wahl von Φ')
2. $\Phi' \vdash (x \doteq x)\frac{y}{x}$ (AR)
3. $\Phi' \vdash \dot\forall x\, x \doteq x$ (($\forall$ 2) angewendet auf 2.)
4. $\Phi' \vdash \varphi$ ((¬ 1) angewendet auf 1.,3.)
5. $\Phi \vdash \varphi$ (($\subset$) angewendet auf 4.)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

17.4 Corollar *Φ ist L-inkonsistent $\Longleftrightarrow \exists\Phi' \subset \Phi\ \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi'$ ist L-inkonsistent$\big)$.*

Beweis. Φ ist L-inkonsistent $\Longleftrightarrow\ \Phi \vdash_L \bot \overset{16.14}{\Longleftrightarrow} \exists\Phi' \subset \Phi\ \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi' \vdash_L \bot\big) \Longleftrightarrow \exists\Phi' \subset \Phi\ \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi'$ ist L-inkonsistent$\big)$. QED

Wegen ihrer Wichtigkeit fassen wir 16.14 und 17.4 noch einmal zusammen: Konsistenz und Ableitbarkeit haben einen „endlichen Charakter":

17.5 Satz (Endlichkeitssatz für $\vdash_L$) *(a)* $\Phi \vdash_L \varphi \Longleftrightarrow \exists\Phi' \subset \Phi\ \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi' \vdash_L \varphi\big)$.

(b) $\mathrm{Kon}^L(\Phi) \Longleftrightarrow \forall\,\Phi' \subset \Phi\ \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \longrightarrow \mathrm{Kon}^L(\Phi')\big)$.

17.6 Corollar *Sei $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ eine $\subset$-Kette*[108] *von L-konsistenten Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I}\Phi_i$ L-konsistent.*

Beweis. Wenn nicht gibt es eine endliche Menge $\Phi' \subset \bigcup_{i\in I}\Phi_i$, die L-inkonsistent ist. Da $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ eine $\subset$-Kette ist, ist $\Phi' \subset \Phi_i$ für ein $i \in I$. Also ist Φ_i L-inkonsistent, ein Widerspruch. QED

17.7 Satz *(a)* $\Phi \vdash_L \varphi \Longleftrightarrow \Phi \cup \{\dot\neg\varphi\}$ *ist L-inkonsistent.*

(b) $\Phi \vdash_L \dot\neg\varphi \Longleftrightarrow \Phi \cup \{\varphi\}$ *ist L-inkonsistent.*

Beweis. zu (a). zu „$\Rightarrow$". Wir geben einen Beweis für $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash_L \bot$ an:

1. $\Phi \vdash \varphi$ (Voraussetzung)
2. $\Phi, \dot\forall x\, x \doteq x \vdash \varphi$ (($\subset$) angewendet auf 1.)
3. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \bot$ (Kontraposition angewendet auf 2.)

zu „$\Leftarrow$".

1. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \bot$ (Voraussetzung)
2. $\Phi, \dot\neg\varphi \vdash \dot\neg\,\bot$ (da $\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\}$ inkonsistent ist, kann hieraus jede Formel abgeleitet werden)
3. $\Phi \vdash \varphi$ (Prinzip des Widerspruchsbeweises angewendet auf 1.,2.)

[108] vgl. 2.40

zu(b). Wegen (a) genügt es, $\Phi \cup \{\dot\neg\dot\neg\varphi\}$ ist L-inkonsistent $\iff$ $\Phi \cup \{\varphi\}$ ist L-inkonsistent zu zeigen.
zu „⇒“.

1. $\Phi, \varphi \vdash \dot\neg\dot\neg\varphi$	(16.15)
2. $\Phi, \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \perp$	(Voraussetzung)
3. $\Phi, \varphi, \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash \perp$	(($\subset$) angewendet auf 2.)
4. $\Phi, \varphi \vdash \perp$	(Modus Ponens angewendet auf 1.,3.)

zu „⇐“. Vertausche in obigem Beweis die Rollen von „φ“ und „$\dot\neg\dot\neg\varphi$“. QED

In welcher Relation stehen die Begriffe „konsistent“ und „erfüllbar“? Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt:

17.8 Satz *Sei* $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$. *Dann gilt:* $\mathrm{Erf}(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Kon}^L(\Phi)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi$. Wäre Φ L-inkonsistent, so hätten wir $\Phi \vdash_L \perp$, wegen $\vdash_L \subset \models_L$ also $\Phi \models \perp$ und speziell $\mathfrak{A} \models \perp$. Letzteres bedeutet $\neg\forall a \in A\; a = a$, ein Widerspruch. QED

17.2 Der Modellexistenzsatz.

Wir zeigen, daß auch die Umkehrung von 17.8 gilt: jede konsistente Menge hat ein Modell. (Dual zum letzten Beweis leiten wir später hieraus die Vollständigkeit des Sequenzenkalküls her.)

17.2.1 Henkin-Mengen.

Wir untersuchen zunächst Formelmengen Ψ, die spezielle Eigenschaften haben, mit deren Hilfe es möglich ist, auf ziemlich geradlinige Weise ein Modell von Ψ zu konstruieren. Diese Mengen nennen wir Henkin-Mengen[109]. Danach zeigen wir, daß jede konsistente Menge zu einer Henkin-Menge erweitert werden kann. Genauer: zu jeder L-konsistenten Menge Φ existiert eine Sprache $L^* \supset L$ und eine Henkin-Menge $\Psi \subset \mathrm{Fml}(L^*)$, so daß $\Phi \subset \Psi$ gilt. Das L-Redukt eines Modelles von Ψ ist dann ein Modell von Φ.

17.9 Definition Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache und $\Psi \subset \mathrm{Fml}(L)$. Ψ heißt **Henkin-Menge**, falls folgende Aussagen gelten:

(H0) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \big(\Psi \vdash_L \varphi \longleftrightarrow \varphi \in \Psi\big)$;

(H1) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \big(\dot\neg\varphi \in \Psi \longleftrightarrow \varphi \notin \Psi\big)$;

(H2) $\forall\varphi \in \mathrm{Fml}(L)\,\forall n < \omega\ \big(\dot\forall \dot v_n \varphi \in \Psi \longleftrightarrow \forall\, k \in K\ \varphi\frac{\dot c_k}{\dot v_n} \in \Psi\big)$;

(H3) $\forall\, t \in \mathrm{Tm}(L)\,\exists k \in K\ t \doteq \dot c_k \in \Psi$.

17.10 Bemerkung (H0)$\wedge$(H1) ist gleichwertig mit der Aussage, daß Ψ **maximal L-konsistent** ist, d.h., Ψ ist $\subset$-maximales Element in der Menge $\big\{\Theta \;\big|\; \Theta \subset \mathrm{Fml}(L) \wedge \mathrm{Kon}^L(\Theta)\big\}$ ist.

Beweis. zu „⇒“. Gelte (H0) und (H1). Dann gilt $\mathrm{Kon}^L(\Psi)$: gibt es nämlich $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $\Psi \vdash_L \varphi$ und $\Psi \vdash_L \dot\neg\varphi$, so ist nach (H0) $\varphi, \dot\neg\varphi \in \Psi$, was (H1) widerspricht. Da andererseits wiederum nach (H1) Ψ für jede Formel $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ eine der Formeln $\varphi, \dot\neg\varphi$ enthält, ist Ψ $\subset$-maximal unter den L-konsistenten Teilmengen von $\mathrm{Fml}(L)$.

zu „⇐“. Sei Ψ maximal L-konsistent.

(1) Es gilt (H0).

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Es ist $\Psi \vdash_L \varphi \longleftrightarrow \varphi \in \Psi$ zu zeigen.
zu „⇒“. Gelte $\Psi \vdash_L \varphi$. Um $\varphi \in \Psi$ zu verifizieren, genügt es wegen der Maximalität von Ψ zu zeigen, daß $\Psi \cup \{\varphi\}$ konsistent ist. Wäre letzteres nicht der Fall, so hätten wir folgende Ableitung von $\perp$ aus Ψ:

[109] Der hier vorgestellte Beweis des Modellexistenzsatzes geht auf Leon Henkin (geb. 19.4.1921, New York) (1949) zurück.

1. $\Psi, \varphi \vdash \perp$ (vorausgesetzte Inkonsistenz von $\Psi \cup \{\varphi\}$)
2. $\Psi \vdash \varphi$ (Voraussetzung)
3. $\Psi \vdash \perp$ (Modus Ponens)

Also ist Ψ inkonsistent, ein Widerspruch.
zu „$\Leftarrow$". Dies ist klar wegen (AR). qed(1)

Zum Nachweis von (H1) fixiere $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Da Ψ maximal L-konsistent ist, ist $\varphi \notin \Psi$ gleichwertig mit der L-Inkonsistenz von $\Psi \cup \{\varphi\}$. Letzteres ist nach 17.7 gleichwertig mit $\Psi \vdash_L \dot\neg\varphi$, und dieses ist nach (H0) gleichwertig mit $\dot\neg\varphi \in \Psi$. Also ist (H1) bewiesen. QED

17.2.2 Ein Modell für Henkin-Mengen.

Sei Ψ eine HENKIN-Menge. Wir konstruieren ein Modell von Ψ. Unsere Idee ist es, als Trägermenge dieses Modells die Menge $\mathrm{Tm}(L)$ aller Terme zu nehmen. Die Relationen, Funktionen und Konstanten sollen dabei auf kanonische Weise erklärt werden, etwa $R_i(s(0)\dots s(t(i)-1)) :\equiv \dot R_i s(0)\dots s(t(i)-1) \in \Psi$. Insbesondere soll „$\doteq$" durch "$=$" interpretiert werden. Hierbei tritt ein Problem auf: womöglich werden zwei Terme s, t, die *als Zeichenreihen* verschieden sind (für die also $s \neq t$ gilt) von Ψ als gleich angesehen: $\Psi \vdash_L s \doteq t$. Dann ist $s \neq t$ aber $s \doteq t \in \Psi$. Um dies zu berücksichtigen identifizieren wir in $\mathrm{Tm}(L)$ alle Elemente, die unter Ψ gleich sind. Formal geschieht das durch Definition einer entsprechenden Äquivalenzrelation $\approx$ auf $\mathrm{Tm}(L)$ und Übergang von $\mathrm{Tm}(L)$ zu $\mathrm{Tm}(L)/\approx$.

17.11 Definition Für $s, t \in \mathrm{Tm}(L)$ setze $s \approx t :\equiv s \doteq t \in \Psi$.

17.12 Lemma *$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Tm}(L)$. Die Äquivalenzmenge von $s \in \mathrm{Tm}(L)$ sei mit $\overline{s}$ bezeichnet.*

BEWEIS. Da nach (AR) $\Psi \vdash_L s \doteq s$ gilt, ist $\approx$ reflexiv. Nach 16.16 ist $\approx$ symmetrisch und transitiv von $\approx$. QED

Wir wählen $A :\equiv \mathrm{Tm}(L)/\approx$ als Trägermenge des gesuchten Modelles. Unser Ziel ist es, die Relationen, Funktionen und Konstanten auf folgende Art und Weise zu definieren:

$$\begin{aligned} R_i\big(\overline{s(0)}\dots\overline{s(t(i)-1)}\big) &:\equiv \dot R_i s(0)\dots s(t(i)-1) \in \Psi; \\ f_j\big(\overline{s(0)},\dots,\overline{s(t(j)-1)}\big) &:\equiv \overline{\dot f_j s(0)\dots s(t(j)-1)}; \\ c_k &:\equiv \overline{\dot c_k}. \end{aligned}$$

Um zu beweisen, daß dies wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, daß die Definitionen nur von den jeweiligen Äquivalenzklassen und nicht von den jeweils gewählten Repräsentanten abhängen. Dies folgt sofort aus:

17.13 Lemma *(a) Sind $r, s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$ mit $\forall j < t(i)\; r(j) \approx s(j)$, so gilt*
$\dot R_i s(0)\dots s(t(i)-1) \in \Psi \longleftrightarrow \dot R_i r(0)\dots r(t(i)-1) \in \Psi$.
(b) Sind $r, s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$ mit $\forall i < t(j)\; r(i) \approx s(i)$, so gilt
$\dot f_j s(0)\dots s(t(j)-1) \approx \dot f_j r(0)\dots r(t(j)-1)$.

BEWEIS. zu (a). Aus Symmetriegründen genügt es, „$\Rightarrow$" zu zeigen. Es gelte also

$$\dot R_i s(0)\dots s(t(i)-1) \in \Psi, \text{ d.h., } \Psi \vdash \dot R_i s(0)\dots s(t(i)-1).$$

Wir zeigen durch Induktion nach $j \leq t(i)$:

$$\Psi \vdash \dot R_i r(0)\dots r(j-1)s(j)\dots s(t(i)-1).$$

(Für $j :\equiv t(i)$ ergibt sich dann $\Psi \vdash \dot R_i r(0)\dots r(t(i)-1)$.)

$j=0$. Dies gilt nach Voraussetzung. (Beachte: $r(0)\dots r(0-1)=\Box$.)
$j>0$. Aus

$$\Psi\vdash s(j-1)\doteq r(j-1) \text{ und } \Psi\vdash \dot{R}_i r(0)\dots r(j-2)s(j-1)\dots s(t(i)-1)$$

folgt nach der Gleichheitsregel(=) des Sequenzenkalküls:

$$\Psi\vdash \dot{R}_i r(0)\dots r(j-2)r(j-1)s(j)\dots s(t(i)-1),$$

also

$$\Psi\vdash \dot{R}_i r(0)\dots r(j-1)s(j)\dots s(t(i)-1).$$

Damit ist (a) bewiesen.
zu (b). Wir beweisen durch Induktion nach $i\le t(j)$:

$$\Psi\vdash \dot{f}_j s(0)\dots s(t(j)-1)\doteq \dot{f}_j r(0)\dots r(i-1)s(i)\dots s(t(j)-1);$$

für $i:\equiv t(j)$ ergibt sich dann die Behauptung.
$i=0$. In diesem Fall folgt die Behauptung aus der Anfangsregel (AR) des Sequenzenkalküls.
$i>0$. In diesem Fall verfährt man analog wie im Beweis des Induktionsschrittes im Beweis von (a). QED

Aufgrund des zuletzt bewiesenen Lemmas können wir in der oben angegebenen Art und Weise die Funktionen, Relationen und Konstanten definieren und erhalten eine L-Struktur $\mathfrak{A}$. Wir definieren eine Belegung β in $\mathfrak{A}$ durch $\beta(\dot{v}_n):\equiv\overline{\dot{v}_n}$ und verifizieren im folgenden, daß $\mathfrak{A}\models\Psi[\beta]$ gilt.

17.14 Satz *Für $t\in\mathrm{Tm}(L)$ ist $t^{\mathfrak{A}}[\beta]=\overline{t}$.*

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Aufbau der Terme durch.
$t=\dot{v}_n$. Es ist $\dot{v}_n^{\mathfrak{A}}[\beta]=\beta(\dot{v}_n)\overset{\text{Def.}}{=}\overline{\dot{v}_n}$, wie behauptet.
$t=\dot{c}_k$. Es ist $\dot{c}_k^{\mathfrak{A}}[\beta]=c_k\overset{\text{Def.}}{=}\overline{\dot{c}_k}$, wie behauptet.
$t=\dot{f}_j s(0)\dots s(t(j)-1)$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\big(\dot{f}_j s(0)\dots s(t(j)-1)\big)^{\mathfrak{A}}[\beta] &= f_j\big(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta],\dots,s(t(j)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big)\\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} f_j\big(\overline{s(0)},\dots,\overline{s(t(j)-1)}\big)\\ &\overset{\text{Def.}}{=} \overline{\dot{f}_j s(0)\dots s(t(j)-1)},\end{aligned}$$

wie behauptet. QED

17.15 Satz $\mathfrak{A}\models\Psi[\beta]$.

Beweis. Für $\varphi\in\mathrm{Fml}(L)$ sei $n_\varphi:\equiv\overline{\overline{\{i<|\varphi|\mid\varphi(i)\in\{\dot{\wedge},\dot{\neg},\dot{\forall}\}\}}}$ die Anzahl der Konnektoren und Quantoren in φ. Wir zeigen durch Induktion nach $n<\omega$:[110]

(1) $\quad\forall n<\omega\,\forall\varphi\in\mathrm{Fml}(L)\,\big(n_\varphi=n\longrightarrow(\mathfrak{A}\models\varphi[\beta]\longleftrightarrow\varphi\in\Psi)\big)$.

Hieraus folgt sofort die Behauptung. Sei also $n<\omega$ und die Aussage von (1) für alle $\psi\in\mathrm{Fml}(L)$ mit $n_\psi<n$ bewiesen. Sei $\varphi\in\mathrm{Fml}(L)$ mit $n_\varphi=n$. Wir unterscheiden die fünf möglichen Fälle:
Fall 1. $\varphi=\ s\doteq r$. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models\varphi[\beta] &\iff s^{\mathfrak{A}}[\beta]=r^{\mathfrak{A}}[\beta]\\ &\iff \overline{s}=\overline{r}\\ &\iff s\approx r\\ &\iff s\doteq r\in\Psi\\ &\iff \varphi\in\Psi.\end{aligned}$$

[110] vgl. Beweis von 14.17.

Fall 2. $\varphi = \dot{R}_i s(0)\ldots s(t(i)-1)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\iff R_i\big(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta]\ldots s(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta]\big)\\
&\iff R_i\big(\overline{s(0)}\ldots\overline{s(t(i)-1)}\big)\\
&\iff \dot{R}_i s(0)\ldots s(t(i)-1) \in \Psi.
\end{aligned}$$

Fall 3. $\varphi = \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\iff \big(\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \,\wedge\, \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]\big)\\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{\iff} \big(\varphi_1 \in \Psi \,\wedge\, \varphi_2 \in \Psi\big)\\
&\overset{\text{(H0)}}{\iff} \big(\Psi \vdash \varphi_1 \,\wedge\, \Psi \vdash \varphi_2\big)\\
&\overset{\text{Und}-\text{Regeln}}{\iff} \Psi \vdash \dot{(}\varphi_1 \dot{\wedge} \varphi_2\dot{)}\\
&\overset{\text{(H0)}}{\iff} \varphi \in \Psi.
\end{aligned}$$

Fall 4. $\varphi = \dot{\neg}\psi$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\iff > \neg\, \mathfrak{A} \models \psi[\beta]\\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{\iff} \psi \notin \Psi\\
&\overset{\text{(H1)}}{\iff} \dot{\neg}\psi \in \Psi\\
&\iff \varphi \in \Psi.
\end{aligned}$$

Fall 5. $\varphi = \dot{\forall}\dot{v}_n\psi$. Da $A = \{\bar{t} \mid t \in \mathrm{Tm}(L)\}$ und nach (H3) jeder Term zu einem Konstantensymbol $\approx$-äquivalent ist, besteht A gerade aus den Äquivalenzklassen der Konstantensymbole: $A = \{\overline{\dot{c}_k} \mid k \in K\}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] &\iff \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\left[\beta\frac{a}{\dot{v}_n}\right]\\
&\iff \forall\, k \in K\ \mathfrak{A} \models \psi\left[\beta\frac{\overline{\dot{c}_k}}{\dot{v}_n}\right]\\
&\iff \forall\, k \in K\ \mathfrak{A} \models \psi\left[\beta\frac{\dot{c}_k^{\mathfrak{A}}[\beta]}{\dot{v}_n}\right]\\
&\iff \forall\, k \in K\ \mathfrak{A} \models \psi\frac{\dot{c}_k}{\dot{v}_n}[\beta] \text{ beachte: } \dot{c}_k, \psi \text{ kollisionsfrei}\\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{\iff} \forall\, k \in K\ \psi\frac{\dot{c}_k}{\dot{v}_n} \in \Psi\\
&\overset{\text{(H2)}}{\iff} \dot{\forall}\dot{v}_n\psi \in \Psi\\
&\iff \varphi \in \Psi.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Fälle abgehandelt und des Satz ist bewiesen. QED

17.16 Corollar *Ist Ψ eine* HENKIN*-Menge, so ist Ψ und damit auch jede Teilmenge von Ψ erfüllbar.*

17.2.3 Die Erweiterung einer konsistenten Menge zu einer Henkin-Menge.

Wir zeigen, daß sich jede konsistente Menge Φ zu einer HENKIN-Menge erweitern läßt. Hierzu fixieren wir eine Sprache $L = (I, J, K, t)$. Um (H3) erreichen zu können, müssen wir L gegebenenfalls *um Konstanten erweitern*:

17.17 Definition Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache und C eine Menge mit $C \cap (I \cup J \cup K) = \emptyset$. Dann sei $L(C) :\equiv (I, J, K \cup C, t)$. Im Spezialfall $\overline{\overline{C}} = 1$ schreiben wir oft $L(\dot{c})$ statt $L(C)$ und bezeichnen das neue Konstantensymbol mit $\dot{c}$.

17.18 Definition Sei $C_L :\equiv \{(x, \varphi) \mid x \in \mathrm{Vbl} \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\}$ und $L' :\equiv L(C_L)$. L' enthält also für jede Variable x und jede L-Formel φ ein neues Konstantensymbol $\dot{c}_{x,\varphi}$. Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ und $x \in \mathrm{Vbl}$ sei

$$\varphi^x :\equiv \dot{(}\dot{\exists} x\varphi \dot{\rightarrow} \varphi \frac{\dot{c}_{x,\varphi}}{x}\dot{)}.$$

Ferner sei $\Gamma_L :\equiv \{\varphi^x \mid x \in \mathrm{Vbl} \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\}$. Für $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$ sei $\Phi' :\equiv \Phi \cup \Gamma_L$.

Wir wollen zeigen, daß Φ' L'-konsistent ist, wenn Φ L-konsistent ist. Dazu ist es nötig, eine Ableitung von $\perp$ aus Φ' in L' in eine Ableitung von $\perp$ aus Φ in L zu transformieren, in gewissem Sinn also die neuen Konstanten zu eliminieren:

17.19 Definition Sei $z \in \mathrm{Vbl}$ und $\dot{c}$ ein Konstantensymbol von $L(C)$.

(a) Für $r \in \mathrm{Tm}(L(C))$ erkläre rekursiv die **Substitution** $r\frac{z}{\dot{c}}$ durch

$$\begin{aligned} y\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv y \\ \dot{c}_k\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \begin{cases} \dot{c}_k, & \text{falls } \dot{c}_k \neq \dot{c} \\ z, & \text{falls } \dot{c}_k = \dot{c}; \end{cases} \quad (k \in K \cup C) \\ (\dot{f}_j r(0) \dots r(t(j)-1))\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \dot{f}_j r(0)\frac{z}{\dot{c}} \dots r(t(j)-1)\frac{z}{\dot{c}}. \end{aligned}$$

(b) Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L(C))$ erkläre rekursiv die **Substitution** $\varphi\frac{z}{\dot{c}}$ durch

$$\begin{aligned} (r_1 \dot{=} r_2)\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv r_1\frac{z}{\dot{c}} \dot{=} r_2\frac{z}{\dot{c}}; \\ (\dot{R}_i r(0) \dots r(t(i)-1))\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \dot{R}_i r(0)\frac{z}{\dot{c}} \dots r(t(i)-1)\frac{z}{\dot{c}}; \\ \dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \dot{(}\psi_1\frac{z}{\dot{c}} \dot{\wedge} \psi_2\frac{z}{\dot{c}}\dot{)}; \\ (\dot{\neg}\psi)\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \dot{\neg}(\psi\frac{z}{\dot{c}}); \\ (\dot{\forall} y\psi)\frac{z}{\dot{c}} &:\equiv \dot{\forall} y(\psi\frac{z}{\dot{c}}). \end{aligned}$$

(c) Für $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(C))$ sei $\Phi\frac{z}{\dot{c}} :\equiv \{\varphi\frac{z}{\dot{c}} \mid \varphi \in \Phi\}$.

Den ersten Schritt auf dem Weg, Ableitungen in L' zu Ableitungen in L zu transformieren ist:

17.20 Lemma (Lemma über Konstantenelimination) *Sei L eine Sprache und $\dot{c}$ ein neues Konstantensymbol. Ferner sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(\dot{c}))$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L(\dot{c}))$. Gilt dann $\Phi \vdash_{L(\dot{c})} \varphi$, so gilt $\Phi\frac{z}{\dot{c}} \vdash_L \varphi\frac{z}{\dot{c}}$ für alle außer endlich vielen $z \in \mathrm{Vbl}$.*

Beweis. Sei $((\Phi_i, \varphi_i) \mid i \leq n) \equiv: \gamma$ eine Ableitung von $\Phi \vdash_{L(\dot{c})} \varphi$. Sei $Z :\equiv \bigcup\{\mathrm{var}(\Phi_i \cup \{\varphi_i\}) \mid i \leq n\}$. Dann ist Z endlich. Wir zeigen, daß für $z \in \mathrm{Vbl} \setminus Z$ durch $\gamma' :\equiv ((\Phi_i\frac{z}{\dot{c}}, \varphi_i\frac{z}{\dot{c}}) \mid i \leq n)$ eine Ableitung von $\Phi\frac{z}{\dot{c}} \vdash_L \varphi\frac{z}{\dot{c}}$ gegeben ist.
Wegen $\Phi_n \subset \Phi$, $\varphi_n = \varphi$, $\Phi_i \subset \mathrm{Fml}(L(\dot{c}))$ endlich und $\varphi_i \in \mathrm{Fml}(L(\dot{c}))$ für $i \leq n$ ist natürlich $\Phi_n\frac{z}{\dot{c}} \subset \Phi\frac{z}{\dot{c}}$, $\varphi_n\frac{z}{\dot{c}} = \varphi\frac{z}{\dot{c}}$, $\Phi_i\frac{z}{\dot{c}} \subset \mathrm{Fml}(L)$ endlich und $\varphi_i\frac{z}{\dot{c}} \in \mathrm{Fml}(L)$ für $i \leq n$. Es verbleibt zu verifizieren, daß die Sequenz an jeder Stelle $i \leq n$ korrekt gebildet ist. Sei also $i \leq n$ beliebig. Dann tritt an der Stelle i der Sequenz γ einer der folgenden Fälle ein.

Fall 1. Es gilt (AR), d.h., $\varphi_i \in \Phi_i$ oder $\exists s \in \mathrm{Tm}(L(\dot{c}))\ \varphi_i = s \dot{=} s$. Dann ist $\varphi_i\frac{z}{\dot{c}} \in \Phi_i\frac{z}{\dot{c}}$ oder $\varphi_i\frac{z}{\dot{c}} = s\frac{z}{\dot{c}} \dot{=} s\frac{z}{\dot{c}}$ mit $s\frac{z}{\dot{c}} \in \mathrm{Tm}(L)$. Also gilt (AR) an der Stelle i von γ'.

Fall 2. Es gilt ($\wedge$1), d.h., $\exists j < i\, \exists \psi \in \mathrm{Fml}(L(\dot c))\ (\Phi_j = \Phi_i \wedge \varphi_j = \dot{(}\varphi_i \dot\wedge \psi\dot{)})$. Dann gilt $(\Phi_j \frac{z}{\dot c} = \Phi_i \frac{z}{\dot c} \wedge \varphi_j \frac{z}{\dot c} = \dot{(}\varphi_i \frac{z}{\dot c} \dot\wedge \psi \frac{z}{\dot c}\dot{)})$, wobei $\psi \frac{z}{\dot c} \in \mathrm{Fml}(L)$ ist. Also gilt ($\wedge$1) an der Stelle i von γ'.

Fall 3. Es gilt ($\wedge$2), bzw. ($\wedge$3), bzw. ($\neg$1), bzw. ($\neg$2). Hier geht man jeweils wie in Fall 2 vor.

Fall 4. Es gilt ($\forall$1), d.h.,

$$\exists j < i\, \exists \varphi \in \mathrm{Fml}(L(\dot c)) \exists s \in \mathrm{Tm}(L(\dot c))\ (\Phi_j = \Phi_i \ \wedge\ \varphi_j = \dot\forall x \varphi \ \wedge\ \varphi, s \text{ kollisionsfrei } \ \wedge\ \varphi_i = \varphi \frac{s}{x}).$$

Sei $\varphi' :\equiv \varphi \frac{z}{\dot c}$ und $s' :\equiv s \frac{z}{\dot c}$. Dann gilt $\varphi' \in \mathrm{Fml}(L)$, $s' \in \mathrm{Tm}(L)$ sowie $\varphi_j \frac{z}{\dot c} = \dot\forall x \varphi'$. Wegen $\mathrm{var}(\varphi) \subset \mathrm{var}(\varphi_j) \subset Z$ und $z \notin Z$ sowie der Kollisionsfreiheit von φ, s sind φ', s' kollisionsfrei. Da wegen $z \notin \mathrm{var}(\varphi_j)$ außerdem $z \neq x$ ist, folgt

$$\varphi_i \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{s}{x}) \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{z}{\dot c}) \frac{s'}{x} = \varphi' \frac{s'}{x}.$$

Somit gilt ($\forall$1) an der Stelle i von γ'.

Fall 5. Es gilt ($\forall$2), d.h.,

$$\exists j < i\, \exists \varphi \in \mathrm{Fml}(L(\dot c))\, \exists y \in \mathrm{Vbl}\ (\Phi_j = \Phi_i \ \wedge\ \varphi_j = \varphi \frac{y}{x} \ \wedge\ y \notin \mathrm{fr}(\Phi_i) \cup \mathrm{var}(\varphi) \ \wedge\ \varphi_i = \dot\forall x \varphi).$$

Wir können in diesem Fall o.E. annehmen, daß $y \neq z$ ist: dies ist wegen $\mathrm{var}(\varphi_j) \subset Z$ und $z \notin Z$ klar, falls $y \in \mathrm{var}(\varphi_j)$ gilt; ist $y \notin \mathrm{var}(\varphi_j)$,[111] so ersetzen wir y durch ein $y' \in \mathrm{Vbl} \setminus (Z \cup \{z\})$: es ist $\varphi_j = \varphi = \varphi \frac{y'}{x}$ wegen $x \notin \mathrm{fr}(\varphi)$, und $y' \notin \mathrm{fr}(\Phi_i) \cup \mathrm{var}(\varphi)$, da dieses eine Teilmenge von Z ist. (Beachte: $\mathrm{var}(\varphi) \subset \mathrm{var}(\varphi_i) \subset Z$.) Wir nehmen also $y \neq z$ an. Sei nun $\varphi' :\equiv \varphi \frac{z}{\dot c}$. Dann ist $\varphi' \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\varphi_i \frac{z}{\dot c} = \dot\forall x \varphi'$. Wegen $y \notin \mathrm{fr}(\Phi_i) \cup \mathrm{var}(\varphi) \cup \{z\}$ ist $y \notin \mathrm{fr}(\Phi_i \frac{z}{\dot c}) \cup \mathrm{var}(\varphi')$. Da $z \neq x$ gilt wegen $x \in Z$, folgt weiter

$$\varphi_j \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{y}{x}) \frac{z}{\dot c} = \varphi' \frac{y}{x}.$$

Also gilt ($\forall$2) an der Stelle i von γ'.

Fall 6. Es gilt (=), d.h.,

$$\exists j_1, j_2 < i\, \exists \varphi \in \mathrm{At}(L(\dot c))\, \exists r, s \in \mathrm{Tm}(L)\ (\Phi_{j_1} = \Phi_i \ \wedge\ \Phi_{j_2} = \Phi_i \ \wedge\ \varphi_{j_1} = r \doteq s \ \wedge\ \varphi_{j_2} = \varphi \frac{r}{x} \ \wedge\ \varphi_i = \varphi \frac{s}{x}).$$

Wir können o.E. annehmen, daß $x \neq z$ gilt: wähle nämlich eine Variable $x' \notin \mathrm{var}(\varphi) \cup \{x, z\}$ und betrachte $\tilde\varphi :\equiv \varphi \frac{x'}{x}$. Dann ist $\tilde\varphi \in \mathrm{At}(L(\dot c))$. Da für $t \in \mathrm{Tm}(L(\dot c))$ $\varphi \frac{x'}{x} \frac{t}{x'} = \varphi \frac{t}{x}$ gilt, wie man leicht durch Induktion über den Aufbau der atomaren Formeln beweist, können wir mit $\tilde\varphi$ statt φ und x' statt x arbeiten, so daß wir in der Tat o.E. $x \neq z$ annehmen können. Sei nun $\varphi' :\equiv \varphi \frac{z}{\dot c}$, $r' :\equiv r \frac{z}{\dot c}$ und $s' :\equiv s \frac{z}{\dot c}$. Dann gilt $\varphi' \in \mathrm{At}(L)$ und $r', s' \in \mathrm{Tm}(L)$. Außerdem ist $\varphi_{j_1} \frac{z}{\dot c} = r' \doteq s'$. Wegen $x \neq z$ folgt weiter

$$\varphi_{j_2} \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{r}{x}) \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{z}{\dot c}) \frac{r'}{x} = \varphi' \frac{r'}{x}$$

sowie

$$\varphi_i \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{s}{x}) \frac{z}{\dot c} = (\varphi \frac{z}{\dot c}) \frac{s'}{x} = \varphi' \frac{s'}{x}.$$

Also gilt (=) an der Stelle i von γ'.

Fall 7. Es gilt ($\subset$), d.h., $\exists j < i\ (\Phi_j \subset \Phi_i \ \wedge\ \varphi_j = \varphi_i)$. In diesem Fall ist $(\Phi_j \frac{z}{\dot c} \subset \Phi_i \frac{z}{\dot c} \ \wedge\ \varphi_j \frac{z}{\dot c} = \varphi_i \frac{z}{\dot c})$, und es gilt ($\subset$) an der Stelle i von γ'.

Damit ist gezeigt, daß γ' ein Beweis von $\Phi \frac{z}{\dot c} \vdash_L \varphi \frac{z}{\dot c}$ ist. QED

[111] Dann ist $\varphi_j = \varphi$ und $x \notin \mathrm{fr}(\varphi)$.

17.21 Corollar *Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(C))$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L(C))$. Ist $C' \subset C$ so, daß bereits $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(C'))$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L(C'))$ ist, dann gilt $\Phi \vdash_{L(C)} \varphi \;\longrightarrow\; \Phi \vdash_{L(C')} \varphi$.*
Insbesondere gilt $\mathrm{Kon}^{L(C')}(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Kon}^{L(C)}(\Phi)$ für jedes $C' \subset C$ mit $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(C'))$.

Beweis. Sei $\big((\Phi_i, \varphi_i) \;\big|\; i \le n\big)$ ein Beweis von $\Phi \vdash_{L(C)} \varphi$. Da $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathrm{Fml}(L(C))$ ist, existiert eine endliche Teilmenge C_i von C mit $\Phi_i \cup \{\varphi\} \subset \mathrm{Fml}(L(C_i))$. Sei $C'' :\equiv C' \cup \bigcup_{i \le n} C_i$. Dann ist $C'' \setminus C'$ endlich und $\Phi_i \cup \{\varphi_i\} \subset \mathrm{Fml}(L(C''))$. Somit haben wir $\Phi \vdash_{L(C'')} \varphi$. Ist nun $\dot{c} \in C'' \setminus C'$, so ist $\Phi\frac{z}{\dot{c}} = \Phi$ und $\varphi\frac{z}{\dot{c}} = \varphi$. Endlich oft-faches, sukzessives Anwenden des Lemmas über Konstantenelimination 17.20 ermöglicht es uns also, aus C'' die Elemente zu eliminieren, die nicht zu C' gehören, und dabei jeweils die Ableitbarkeit von φ aus Φ auch bezüglich der so um jeweils ein Konstantensymbol verkleinerten Sprache zu erhalten. Von $\Phi \vdash_{L(C'')} \varphi$ kommen wir also in endlich vielen Schritten zu $\Phi \vdash_{L(C'' \cap C')} \varphi$, also $\Phi \vdash_{L(C')} \varphi$ wegen $C' = C'' \cap C'$.
Zur Konsistenzaussage: ist $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L(C'))$, so gilt auch $\Phi \cup \{\bot\} \subset \mathrm{Fml}(L(C'))$, so daß nach dem bereits bewiesenen $\Phi \vdash_{L(C)} \bot \longrightarrow \Phi \vdash_{L(C')} \bot$ gilt. Das bedeutet gerade $\mathrm{Kon}^{L(C')}(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Kon}^{L(C)}(\Phi)$. QED

Die letzten Überlegungen haben wir durchgeführt, um zeigen zu können, daß die in 17.18 definierte $'$-Bildung von L-konsistenten Formelmengen zu L'-konsistenten Formelmengen führt. In der Tat:

17.22 Satz $\mathrm{Kon}^{L}(\Phi) \Rightarrow \mathrm{Kon}^{L'}(\Phi')$.

Beweis. Es gelte $\mathrm{Kon}^{L}(\Phi)$. Angenommen, Φ' ist L'-inkonsistent. Dann gilt $\Phi' \vdash_{L'} \bot$. Nach dem Endlichkeitssatz für $\vdash$ 17.5 existiert ein endliches $\Phi'_0 \subset \Phi'$ mit $\Phi'_0 \vdash_{L'} \bot$. Es gilt

(1) $\Phi'_0 \not\subset \Phi$.

Beweis. Falls $\Phi'_0 \subset \Phi$ hätten wir $\Phi \vdash_{L'} \bot$. Nach 17.21 folgt hieraus $\Phi \vdash_{L} \bot$ wegen $\Phi \cup \{\bot\} \subset \mathrm{Fml}(L(\emptyset))$ und $L(\emptyset) = L$. Φ wäre also L-inkonsistent, was unserer Voraussetzung widerspricht. qed(1)

Wegen (1) ist $\Phi'_0 = \Phi_0 \cup \{\varphi_i^{x_i} \,|\, i \le n\}$, wobei $\Phi_0 \subset \Phi$, $n < \omega$ und für $i \le n$ $\varphi_i \in \mathrm{Fml}(L)$ sowie $x_i \in \mathrm{Vbl}$ gilt. Wir können annehmen, daß Φ'_0 so gewählt ist, daß n minimal ist. Dann gilt

(2) $\Psi :\equiv \Phi_0 \cup \{\varphi_i^{x_i} \,|\, i < n\}$ ist L'-konsistent.

Mit $\varphi :\equiv \varphi_n$, $x :\equiv x_n$ haben wir $\Psi, \varphi^x \vdash_{L'} \bot$. Mit $L'_0 :\equiv L(\{(x_i, \varphi_i) \,|\, i \le n\})$ [112] gilt nach 17.21 $\Psi, \varphi^x \vdash_{L'_0} \bot$. Aus dem Lemma über Konstantenelimination 17.20 folgt deshalb die Existenz einer Variablen z mit $z \notin \mathrm{fr}(\Psi) \cup \mathrm{var}(\varphi)$ und $\Psi, \varphi^x\frac{z}{\dot{c}} \vdash_{L'_1} \bot$, wobei wir $\dot{c} :\equiv \dot{c}_{x,\varphi}$ und $L'_1 :\equiv L(\{(x_i, \varphi_i) \,|\, i < n\})$ setzen. Wegen

$$\begin{aligned}
\varphi^x\frac{z}{\dot{c}} &= \dot{(}\dot{\exists}x\varphi\dot{\rightarrow}\varphi\frac{\dot{c}}{x}\dot{)}\frac{z}{\dot{c}} \\
&= \dot{(}\dot{\exists}x\varphi\dot{\rightarrow}\varphi\frac{z}{x}\dot{)} \\
&= \dot{(}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi\,\dot{\vee}\,\varphi\frac{z}{x}\dot{)} \\
&= \dot{\neg}\dot{(}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi\,\dot{\wedge}\,\dot{\neg}\varphi\frac{z}{x}\dot{)}
\end{aligned}$$

ist also $\Psi \cup \{\dot{\neg}\dot{(}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi\,\dot{\wedge}\,\dot{\neg}\varphi\frac{z}{x}\dot{)}\}$ L'_1-inkonsistent. Nach 17.7 ist dies mit $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{(}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi\,\dot{\wedge}\,\dot{\neg}\varphi\frac{z}{x}\dot{)}$ gleichwertig. Wir erhalten nun die folgende Ableitung:

1. $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{(}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi\,\dot{\wedge}\,\dot{\neg}\varphi\frac{z}{x}\dot{)}$	(soeben bewiesen)
2. $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi$	(($\wedge$1) angewendet auf 1.)
3. $\Psi, \dot{\neg}\dot{\neg}\,\dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi \vdash_{L'_1} \dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi$	(16.15)
4. $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{\neg}\dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi$	(Modus Ponens angewendet auf 2.,3.)
5. $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{\neg}\varphi\frac{z}{x}$	(($\wedge$2) angewendet auf 1.)
6. $\Psi \vdash_{L'_1} \dot{\forall}x\,\dot{\neg}\varphi$	(($\forall$2) angewendet auf 5.; beachte $z \notin \mathrm{fr}(\Psi) \cup \mathrm{var}(\neg\varphi)$)

[112] L'_0 enthält also genau $\dot{c}_{x_0,\varphi_0}, \ldots, \dot{c}_{x_n,\varphi_n}$ als neue Konstantensymbole.

Aus 4. und 6. ergibt sich, daß Ψ L_1'-inkonsistent ist. Also gilt $\Psi \vdash_{L_1'} \perp$, woraus wegen $L' \supset L_1'$ auch $\Psi \vdash_{L'} \perp$ folgt. Somit ist Ψ L'-inkonsistent, was (2) widerspricht. Also führt die Annahme der L'-Inkonsistenz von Φ' auf einen Widerspruch, und dies beweist den Satz. QED

Nach diesen Vorbereitungen können wir den folgenden Satz beweisen.

17.23 Satz *Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache und $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$ sei L-konsistent. Dann existiert eine Sprache $L^* \supset L$ und eine* HENKIN*-Menge $\Psi \subset \mathrm{Fml}(L^*)$, die Φ erweitert, für die also $\Phi \subset \Psi$ gilt.*

BEWEIS. Wir definieren rekursiv eine $\subset$-Kette $(L_n | n \leq \omega)$ von Sprachen und eine $\subset$-Kette $(\Phi_n | n \leq \omega)$ von konsistenten Formelmengen durch
$L_0 :\equiv L$, $\Phi_0 :\equiv \Phi$;
$L_{n+1} :\equiv (L_n)'$, $\Phi_{n+1} :\equiv (\Phi_n)'$, falls $n < \omega$;
$L_\omega :\equiv \bigcup_{n<\omega} L_n$, $\Phi_\omega :\equiv \bigcup_{n<\omega} \Phi_n$.
Aus der Definition der $'$-Operation (siehe 17.18) folgt sofort, daß für $n < m \leq \omega$ $L \subset L_n \subset L_m$ sowie $\Phi \subset \Phi_n \subset \Phi_m$ gilt. Für $n \leq \omega$ gilt $\Phi_n \subset \mathrm{Fml}(L_n)$ und Φ_n ist L_n-konsistent: für $n < \omega$ folgt dies induktiv aus 17.22; für $n = \omega$ beachte, daß für jedes $m < \omega$ eine Menge C_m existiert, so daß $L_\omega = L_m(C_m)$ gilt. Aus $\mathrm{Kon}^{L_m}(\Phi_m)$ folgt wegen $\Phi_m \subset \mathrm{Fml}(L_m)$ nach 17.21 also $\mathrm{Kon}^{L_\omega}(\Phi_m)$. Die Sequenz $(\Phi_m | m < \omega)$ ist somit eine Kette von L_ω-konsistenten Formelmengen, ihre Vereinigung nach 17.6 also ebenfalls L_ω-konsistent. Außerdem gilt

(1) $\quad x \in \mathrm{Vbl} \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}(L_\omega) \longrightarrow \varphi^x \in \Phi_\omega.$

BEWEIS. Da in φ nur endlich viele Konstantensymbole vorkommen, ist $\varphi \in \mathrm{Fml}(L_n)$ für ein $n < \omega$ und deshalb $\varphi^x \in \Phi_{n+1}$. qed(1)

Betrachte nun $Z :\equiv \{\Psi \subset \mathrm{Fml}(L_\omega) \mid \Psi \supset \Phi_\omega \wedge \mathrm{Kon}^{L_\omega}(\Psi)\}$: Z ist eine nicht-leere Menge, die durch $\subset$ induktiv geordnet wird (die Vereinigung einer $\subset$-Kette in Z ist ein $\subset$-maximales Element dieser Kette in Z). Nach dem Lemma von ZORN existiert ein $\subset$-maximales Element Ψ von Z. Dann ist $\Phi \subset \Phi_\omega \subset \Psi$. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir folgendes gezeigt haben:

(2) $\quad \Psi$ ist eine HENKIN-Menge.

BEWEIS. Da Ψ offenbar maximal L_ω-konsistent ist und diese Eigenschaft nach 17.10 äquivalent ist zu (H0) $\wedge$ (H1), gelten (H0) und (H1) für Ψ.
zu (H2). Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L_\omega)$, $x \in \mathrm{Vbl}$. Es ist zu zeigen, daß genau dann $\dot\forall x \varphi \in \Psi$ ist, wenn für jedes Konstantensymbol $\dot c$ von L_ω gilt $\varphi\frac{\dot c}{x} \in \Psi$.
zu „$\Rightarrow$". Gelte $\dot\forall x \varphi \in \Psi$ und sei $\dot c$ ein Konstantentsymbol von L_ω. Dann folgt
1. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\forall x \varphi$ (AR)
2. $\Psi \vdash_{L_\omega} \varphi\frac{\dot c}{x}$ ($\forall 1$)
Wegen (H0) folgt $\varphi\frac{\dot c}{x} \in \Psi$ aus 2.
zu „$\Leftarrow$". Sei $\varphi\frac{\dot c}{x} \in \Psi$ für jedes Konstantensymbol $\dot c$ von L_ω. Sei $\dot c :\equiv \dot c_{x,\dot\neg\varphi}$. Dann ist also $\varphi\frac{\dot c}{x} \in \Psi$, und aus der Ableitung
1. $\Psi \vdash_{L_\omega} \varphi\frac{\dot c}{x}$ (AR)
2. $\Psi, \varphi\frac{\dot c}{x} \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\varphi\frac{\dot c}{x}$ (16.15)
3. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\varphi\frac{\dot c}{x}$ (Modus Ponens)
folgt $\dot\neg\dot\neg\varphi\frac{\dot c}{x} \in \Psi$ wegen (H0). Wegen (1) und $\Phi_\omega \subset \Psi$ ist andererseits

$$(\dot\neg\varphi)^x = \dot\neg\underbrace{\dot(\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \,\dot\wedge\, \dot\neg\,\dot\neg\varphi\frac{\dot c}{x}\dot)}_{\equiv:\,\chi} \in \Psi.$$

Es kann also nicht gelten $\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \in \Psi$, da wir wegen ($\wedge 3$) sonst auch $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot(\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \,\dot\wedge\, \dot\neg\,\dot\neg\varphi\frac{\dot c}{x}\dot)$ hätten, also $\Psi \vdash_{L_\omega} \chi$ und $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\chi$, was der L_ω-Konsistenz von Ψ widerspricht. Also gilt $\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \notin \Psi$, was nach (H1) bedeutet $\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \in \Psi$. Wir erhalten dann die folgende Ableitung:

1. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi$	
2. $\Psi, \dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi$	(16.15)
3. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\,\dot\neg\varphi$	(Modus Ponenes)
4. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi$	(analog zu 1.-3.)

Also haben wir $\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi \in \Psi$. Aus der Ableitung

1. $\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash_{L_\omega} \dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi$	(AR)
2. $\dot\neg\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\neg\varphi\frac{z}{x}$	(($\forall$ 1) angewendet auf 1.; hierbei sei $z \in \mathrm{Vbl} \setminus \mathrm{var}(\varphi)$)
3. $\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi, \dot\neg\dot\neg\varphi\frac{z}{x} \vdash_{L_\omega} \varphi\frac{z}{x}$	(16.15)
4. $\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash_{L_\omega} \varphi\frac{z}{x}$	(Modus Ponens angewendet auf 2.,3.)
5. $\dot\forall x \dot\neg\dot\neg\varphi \vdash_{L_\omega} \dot\forall x\varphi$	(($\forall$ 2) angewendet auf 4.)
6. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\forall x\varphi$	(($\subset$) angewendet auf 5.)

erhalten wir wegen (H0) nun $\dot\forall x\varphi \in \Psi$, und dies war zu zeigen.

zu (H3). Sei $s \in \mathrm{Tm}(L_\omega)$. Es ist die Existenz eines Konstantensymbols $\dot c$ von L_ω mit $s \doteq \dot c \in \Psi$ zu zeigen. Sei $x \in \mathrm{Vbl} \setminus \mathrm{var}(s)$. Aus der Ableitung

1. $\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s \vdash_{L_\omega} \dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s$	(AR)
2. $\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s \vdash_{L_\omega} \dot\neg\, s \doteq s$	(($\forall$ 1) angewendet auf 1.)
3. $\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s \vdash_{L_\omega} s \doteq s$	(AR)
4. $\emptyset \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s$	(Prinzip des Widerspruchsbeweises mit 2.,3.)
5. $\Psi \vdash_{L_\omega} \dot\neg\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s$	(($\subset$) angewendet auf 4.)

folgt $\dot\neg\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s \in \Psi$ nach (H0), so daß (H1) impliziert $\dot\forall x \dot\neg\, x \doteq s \notin \Psi$. Nach (H2) existiert dann ein Konstantensymbol $\dot c$ von L_ω, so daß $\dot\neg\, x \doteq s\frac{\dot c}{x} \notin \Psi$ ist. Also ist $\dot\neg\dot c \doteq s \notin \Psi$, d.h., $\dot\neg\dot\neg\dot c \doteq s \in \Psi$ nach (H1). Analog zu bereits öfters ausgeführten Argumenten folgt hieraus $\dot c \doteq s \in \Psi$, und dies war zu zeigen. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

17.24 Bemerkung Bei der Konstruktion der HENKIN-Menge wurde vom Auswahlaxiom in der Form des Lemmas von ZORN Gebrauch gemacht. Man kann auf **(AC)** verzichten, wenn sich $\mathrm{Fml}(L_\omega)$ wohlordnen läßt: in diesem Fall ist $\mathrm{Fml}(L_\omega) = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$, wobei $\gamma = \mathrm{otp}(\mathrm{Fml}(L_\omega))$ und $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ die Inverse des MOSTOWSKI-Isomorphismus' von $\mathrm{Fml}(L_\omega)$ ist. Wir definieren dann induktiv eine Folge $\big(\Psi_\alpha \bigm| \alpha \le \gamma\big)$ durch

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &:\equiv \Phi_\omega;\\
\Psi_{\alpha+1} &:\equiv \begin{cases} \Psi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}, & \text{falls } \mathrm{Kon}^{L_\omega}(\Psi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\})\\ \Psi_\alpha, & \text{sonst}\end{cases}\\
\Psi_\delta &:\equiv \bigcup_{\alpha<\delta} \Psi_\alpha, \text{ falls } \mathrm{Lim}(\delta).
\end{aligned}$$

Dann ist $\Psi :\equiv \Psi_\gamma$ $\subset$-maximales Element von $Z = \big\{\Psi \subset \mathrm{Fml}(L_\omega) \bigm| \Psi \supset \Phi_\omega \wedge \mathrm{Kon}^{L_\omega}(\Psi)\big\}$: die L_ω-Konsistenz folgt sofort aus der Definition; die Maximalität erhält man so: sei $\Psi' \in Z$ mit $\Psi \subset \Psi'$. Für $\varphi \in \Psi'$, etwa $\varphi = \varphi_\alpha$, ist dann $\Psi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \subset \Psi'$, also konsistent. Somit ist $\varphi_\alpha \in \Psi_{\alpha+1} \subset \Psi$. Es folgt $\Psi' \subset \Psi$, also $\Psi = \Psi'$.
$\mathrm{Fml}(L_\omega)$ kann z.B. dann (ohne **(AC)**) wohlgeordnet werden, wenn L (und damit L_ω sowie $\mathrm{Fml}(L_\omega)$) abzählbar ist: eine Bijektion f von einer abzählbaren Menge a auf ω induziert auf a eine Wohlordnung durch $x < y :\equiv f(x) < f(y)$.

17.2.4 Der Modellexistenzsatz.

17.25 Satz (Modellexistenzsatz) *Sei L eine Sprache und $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt:* $\mathrm{Kon}^L(\Phi) \longrightarrow \mathrm{Erf}(\Phi)$.

Beweis. Sei $\Psi \supset \Phi$ eine Henkin-Menge, siehe 17.23. Nach 17.16 ist Ψ erfüllbar. Sei $\mathfrak{A}^* \models \Psi[\beta]$. Sei $\mathfrak{A}$ das L-Redukt von $\mathfrak{A}^*$. Da nach dem Koinzidenzlemma 15.7 das Bestehen der Modellbeziehung nur von der Interpretation der in der Formelmenge vorkommenden Relations-, Funktions- und Konstantensymbole sowie der Belegung der freien Variablen abhängt, folgt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$. QED

Da nach 17.8 die Erfüllbarkeit einer Formelmenge ihre Konsistenz nach sich zieht, erhalten wir:

17.26 Corollar *Sei L eine Sprache und $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt:* $\mathrm{Kon}^L(\Phi) \longleftrightarrow \mathrm{Erf}(\Phi)$.

Eine Analyse des Henkinschen Modelles liefert:

17.27 Corollar (Satz von Löwenheim[113]-Skolem, absteigend) *Ist Φ erfüllbar, so hat Φ ein Modell, das höchstens Kardinalität $\overline{\overline{L}}$ hat.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ wie im Beweis des Satzes. Dann ist $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\overline{\{\bar{s} \mid s \in \mathrm{Tm}(L_\omega)\}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Tm}(L_\omega)}} \leq \overline{\overline{L_\omega}} = \overline{\overline{L}}$. QED

17.3 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz und Folgerungen.

Das Hauptresultat:

17.28 Satz (Gödelscher Vollständigkeitssatz[114]) $\models_L \subset \vdash_L$.

Beweis. Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$, $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ und es gelte $\neg\, \Phi \vdash_L \varphi$. Nach 17.7 ist dann $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ L-konsistent. Nach dem Modellexistenzsatz 17.25 ist $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ erfüllbar. Es sei etwa $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}[\beta]$. Dann haben wir $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und $\neg\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$, also $\neg\, \Phi \models \varphi$. Dies war zu zeigen. QED

Zusammen mit der Korrektheit 16.11 folgt aus der Vollständigkeit des Sequenzenkalküls:

17.29 Corollar (Adäquatheit des Sequenzenkalküls) $\models_L = \vdash_L$.

Aus dem Endlichkeitssatz für $\vdash$ 17.5 erhalten wir nun den Endlichkeitssatz für $\models$:

17.30 Satz (Endlichkeitssatz, Kompaktheitssatz[115]) .

(a) $\Phi \models_L \varphi \iff \exists \Phi' \subset \Phi\, \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \wedge \Phi' \models_L \varphi\big)$.

(b) $\mathrm{Erf}(\Phi) \iff \forall \Phi' \subset \Phi\, \big(\overline{\overline{\Phi'}} < \aleph_0 \longrightarrow \mathrm{Erf}(\Phi')\big)$.

Beweis. Dies folgt, da $\vdash$ und $\models$ sowie $\mathrm{Kon}(\cdot)$ und $\mathrm{Erf}(\cdot)$ nach 17.29 sowie 17.26 übereinstimmen, sofort aus dem Endlichkeitssatz für $\vdash$. QED

17.31 Bemerkung Oft nennt man eine Formelmenge, deren endliche Teilmengen alle erfüllbar sind, auch **endlich erfüllbar**. Teil (b) des Endlichkeitssatzes kann dann so ausgedrückt werden: eine Formelmenge ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist.

[113] Leopold Löwenheim (26.6.1878, Krefeld–5.5.1957, Berlin) 1896-1900 Studium an der Universität Berlin und der TH Charlottenburg; bis 1934 (Zwangspensionierung) und 1946–1949 Lehrer an Berliner Gymnasien. Eine Variante von 17.34 beweist Löwenheim im Jahre 1915.

[114] Dieser Satz wird erstmals 1930 von Kurt Gödel in dessen Dissertation bewiesen.

[115] Der Name „Kompaktheitssatz“ erklärt sich daraus, daß dieser Satz die Kompaktheit eines gewissen topologischen Raumes impliziert. Wir bemerken nebenbei, daß dieser wichtige Satz, obwohl bereits seit den dreißiger Jahren bekannt, erst ab Beginn der fünfziger Jahre mit einem der o.a. Namen bezeichnet wird.

17.4 Zur Reichhaltigkeit von Modellklassen.

Wir fixieren eine Sprache $L = (I, J, K, t)$ und $\Phi \subset \mathrm{Fml}(L)$. Wir benutzen die bisher bewiesenen Resultate um Aussagen über die Reichhaltigkeit der Modellklasse $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ herzuleiten.

17.32 Satz *Enthält* $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ *für jede natürliche Zahl* n *ein Modell der Kardinalität* $\geq n$, *so enthält* $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ *ein unendliches Modell. Mehr noch: zu jedem* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *enthält* $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ *ein Modell der Kardinalität* $\geq \kappa$.

Beweis. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ beliebig. Füge für jedes $\alpha < \kappa$ zu L ein neues Konstantensymbol $\dot{c}_\alpha$ hinzu. Sei $\Phi_\kappa :\equiv \Phi \cup \{\dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \,|\, \alpha < \beta < \kappa\}$. Wir zeigen:

(1) Ist $I \subset \kappa$ endlich, so ist $\Phi_\kappa(I) :\equiv \Phi \cup \{\dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \,|\, \alpha < \beta \wedge \alpha, \beta \in I\}$ erfüllbar.

Beweis. Sei $n :\equiv \overline{\overline{I}}$ und $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}^L(\Phi)$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \geq n$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ für eine gewisse Belegung γ. Wähle für $\alpha \in I$ ein $c_\alpha \in A$, so daß $c_\alpha \neq c_\beta$ für $\alpha \neq \beta$. (Wegen $\overline{\overline{A}} \geq n = \overline{\overline{I}}$ ist dies möglich.) Sei $\mathfrak{A}(I) :\equiv \big(\mathfrak{A}, (c_\alpha | \alpha \in I)\big)$. Mit $\dot{c}_\alpha^{\mathfrak{A}(I)}[\gamma] :\equiv c_\alpha$ folgt dann $\mathfrak{A}(I) \models \Phi_\kappa(I)$. qed(1)

Da jede endliche Teilmenge von Φ_κ in einer Menge der Art $\Phi_\kappa(I)$ enthalten ist, wobei $I \subset \kappa$ eine endliche Menge ist, folgt aus (1), daß Φ_κ endlich erfüllbar ist. Nach dem Endlichkeitssatz ist dann Φ_κ erfüllbar. Sei etwa $\mathfrak{A}_\kappa \models \Phi_\kappa[\gamma]$ und sei $c_\alpha :\equiv \dot{c}_\alpha^{\mathfrak{A}_\kappa}[\gamma]$. Sei $\mathfrak{A}$ das L-Redukt von $\mathfrak{A}_\kappa$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$. Wegen $\mathfrak{A}_\kappa \models \dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta$ für $\alpha < \beta < \kappa$, sind die Elemente c_α paarweise verschiedene Elemente des Trägers von $\mathfrak{A}_\kappa$ und damit auch des Trägers von $\mathfrak{A}$. Also ist $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \geq \kappa$. Damit ist der Satz bewiesen. QED

17.33 Satz *Enthält* $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ *ein unendliches Modell, so enthält* $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ *beliebig große unendliche Modelle.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ mit $\lambda :\equiv \overline{\overline{\mathfrak{A}}} \geq \aleph_0$. Sei $\kappa \geq \lambda$ beliebig. Es ist zu zeigen, daß Φ ein Modell der Kardinalität $\geq \kappa$ hat. Hierzu fügen wir zu L für jedes $\alpha < \kappa$ ein neues Konstantensymbol $\dot{c}_\alpha$ hinzu und betrachten die Formelmenge $\Phi_\kappa :\equiv \Phi \cup \{\dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \,|\, \alpha < \beta < \kappa\}$. Ist $I \subset \kappa$ endlich, so ist $\Phi_\kappa(I) :\equiv \Phi \cup \{\dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \,|\, \alpha < \beta \wedge \alpha, \beta \in I\}$ in einer Expansion von $\mathfrak{A}$ erfüllbar (da $\overline{\overline{A}} \geq \aleph_0$ ist, können wie im Beweis zu (1) im Beweis des letzten Satzes paarweise verschiedene $c_\alpha \in A$ für $\alpha \in I$ gewählt werden, die die $\dot{c}_\alpha$ für $\alpha \in I$ interpretieren.) Aus der Erfüllbarkeit der $\Phi_\kappa(I)$ ergibt sich wie im letzten Beweis die endliche Erfüllbarkeit von Φ_κ, so daß Φ_κ nach dem Endlichkeitssatz erfüllbar ist. Genau wie im Beweis des letzten Satzes liefert das L-Redukt eines Modelles von Φ_κ ein Modell von Φ, dessen Kardinalität mindestens κ ist. QED

Ein schärferes Resultat liefert der sehr wichtige „aufsteigende“ Löwenheim-Skolem-Satz:

17.34 Satz (Satz von Löwenheim-Skolem, aufsteigend) Φ *habe ein unendliches Modell. Dann hat* Φ *für jedes* $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ *ein Modell der Kardinalität* κ.

Beweis. Erweitere L um neue Konstantensymbole $\dot{c}_\alpha$ $(\alpha < \kappa)$ zur Sprache L_κ. Wie im Beweis von 17.32 gesehen ist $\Phi_\kappa :\equiv \Phi \cup \{\dot\neg \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \,|\, \alpha < \beta < \kappa\}$ erfüllbar. Nach 17.27 hat Φ_κ ein Modell $\mathfrak{A}_\kappa$, das höchsten Kardinalität $\overline{\overline{L_\kappa}}$ hat. Man berechnet leicht $\overline{\overline{L_\kappa}} = \overline{\overline{L}} + \kappa = \kappa$. (Beachte $\kappa \geq \overline{\overline{L}} \geq \aleph_0$.) Nach Definition von Φ_κ ist andererseits $\overline{\overline{\mathfrak{A}_\kappa}} \geq \kappa$. Insgesamt folgt $\overline{\overline{\mathfrak{A}_\kappa}} = \kappa$. Das L-Redukt von $\mathfrak{A}_\kappa$ liefert also ein Modell von Φ der Kardinalität κ. QED

17.35 Corollar *Jede erfüllbare Menge von L-Formeln, die ein unendliches Modell hat, hat ein Modell der Kardinalität* $\overline{\overline{L}}$. *Insbesondere ist jede erfüllbare Menge von Formeln einer abzählbaren Sprache, die ein unendliches Modell hat, bereits in einem Modell mit abzählbarem Träger erfüllbar.*

17.5 Eine Diskussion der Resultate dieses Kapitels und der Tragweite der Logik erster Stufe.

Mit Hilfe des GÖDELschen Vollständigkeitssatzes haben wir in diesem Kapitel gesehen, daß die von uns vorgenommene Formalisierung des Beweisbegriffes als Ableitbarkeit im Sequenzenkalkül angemessen ist: Folgerbarkeit und Ableitbarkeit stimmen überein. Eine wichtige Konsequenz ist der Kompaktheitssatz: eine Formelmenge ist schon dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist. Die Bedeutung dieses Resultates kann nicht überschätzt werden. Es ist das wohl wichtigste und am meisten benutzte Hilfsmittel, um die Erfüllbarkeit von Formelmengen zu zeigen. Wir haben mit seiner Hilfe Aussagen über die Reichhaltigkeit von Modellklassen gewonnen. Wichtigstes Resultat hierbei ist der „abwärts"-Satz von LÖWENHEIM und SKOLEM: hat eine L-Theorie Φ ein unendliches Modell, so hat Φ für jedes $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ ein Modell der Kardinalität κ; ferner ist jede Theorie in einer abzählbaren Sprache, die ein unendliches Modell hat, bereits über einem abzählbaren Träger erfüllbar. Zum Beweis des LÖWENHEIM-SKOLEM-Satzes haben wir nicht nur die *Aussage* des Modellexistenzsatzes herangezogen, sondern haben auch das im *Beweis* dieses Satzes angegebene Modell benutzt: das HENKINsche Beweisverfahren liefert ein Verfahren zur expliziten Konstruktion eines Modelles einer konsistenten Formelmenge; die Bedeutung liegt hierbei in der Tatsache, daß wir Informationen über die Trägermenge dieses Modelles haben, was wir im Beweis des LÖWENHEIM-SKOLEM-Satzes bei der Bestimmung der Kardinalität diese Modelles ausgenutzt haben.

Der LÖWENHEIM-SKOLEM-Satz zeigt zugleich eine der *Grenzen der Logik erster Stufe* auf: eine erfüllbare Menge von Formeln der Logik erster Stufe kann keine unendlichen Kardinalitäten „fixieren". Als Folgerung erhält man, daß jede Theorie Φ, die ein unendliches Modell hat, Modelle besitzt, die sich voneinander „fundamental unterscheiden", d.h., die nicht isomorph sind. Dies beschränkt auch die Möglichkeit der Axiomatisierbarkeit von Klassen von Modellen: ist L eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine unendliche L-Struktur, so ist $\mathcal{K} :\equiv \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ ist } L\text{−Struktur } \wedge \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ *nicht* axiomatisierbar, da $\mathcal{K}$ nur Modelle der Kardinalität $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ enthält.

Während die erste Stufe keine unendliche Kardinalitäten fixieren kann, kann sie endliche Kardinalitäten sehr wohl festlegen: mit Hilfe der auf Seite 120 eingeführten $L_\emptyset$-Sätze $\varphi_{\geq n}$ bzw. $\varphi_{=n}$ kann festgelegt werden, daß *alle* Modelle eines Axiomensystems Φ mindestens Kardinalität n oder *alle* Modelle von Φ genau die Kardinalität n haben. Unmöglich ist es aber, auf der ersten Stufe zu formalisieren, daß ein Axiomensystem nur endliche Modelle haben soll: nach 17.32 hat nämlich jedes Axiomensystem, das beliebig große endliche Modelle hat, auch ein unendliches Modell. Folglich ist z.B. die Klasse der endlichen Gruppen auf der ersten Stufe *nicht* axiomatisierbar.

Diese und weitere Beschränkungen haben dazu geführt, ausdrucksstärkere Sprachen als die der Logik erster Stufe zu betrachten. Es stellt sich aber heraus, daß man den Gewinn an Ausdrucksstärke i.a. mit einem Verlust erwünschter Eigenschaften bezahlen muß. Betrachten wir etwa die Logik zweiter Stufe: sie ermöglicht es, nicht nur über *Elemente* der Träger von Modellen zu Quantifizieren sondern auch über *Relationen.* Zusätzlich zu den Variablen $\dot{v}_n$ für Elemente enthält sie für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ eine Liste von m-stelligen Relationsvariablen $\dot{V}_n^m$; die Formeln der Logik zweiter Stufe erhält man unter Anwendung der Bildungsgesetze der Logik erster Stufe zusammen mit den beiden folgenden Regeln:

(i) Ist $s\colon m \to \mathrm{Tm}(L)$, so ist $\dot{V}_n^m s(0) \dots s(m-1) \in \mathrm{Fml}(L)$.

(ii) Ist $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$, so auch $\dot{\forall}\dot{V}_n^m \varphi$.

In der Sprache der Logik zweiter Stufe kann man einen Satz φ_{fin} angeben, dessen Modelle genau die Strukturen mit endlichem Träger sind. Also können wir auf der zweiten Stufe mehr ausdrücken als auf der ersten Stufe. Andererseits gilt für die Logik zweiter Stufe der wichtige Endlichkeitssatz *nicht*, so daß es außerdem für die Logik zweiter Stufe kein korrektes und vollständiges System von Schlußregeln geben kann![116]

[116] Mehr zu Erweiterungen der Logik erster Stufe und ihren Eigenschaften findet man z.B. in [8].

18 Grundlagen der Modelltheorie.

Die Modelltheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung von Axiomensystemen (formuliert z.B. in einer Sprache der Logik erster Stufe), deren Modellen und der Beziehung zwischen beiden. Dieses Kapitel stellt einige Grundbegriffe der Modelltheorie vor.[117]

Wir werfen zunächst einen Blick auf Axiomatisierbarkeitsfragen.

18.1 Elementare und Δ-elementare Klassen.

Die axiomatisierbaren Modellklassen (siehe 15.18) können wir dahingehend unterscheiden, ob sie bereits durch ein endliches Axiomensystem Φ axiomatisierbar sind. In diesem Fall wird die fragliche Modellklasse bereits durch einen einzigen Satz, nämlich die Konjunktion der Elemente von Φ, axiomatisiert.

18.1 Definition Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen.

(a) $\mathcal{K}$ ist **elementar** $:\equiv \exists\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)\ \mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\varphi)$.[118]

(b) $\mathcal{K}$ ist **Δ-elementar** $:\equiv \exists\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)\ \mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$.

18.2 Bemerkung Jede elementare Klasse ist Δ-elementar. Jede Δ-elementare Klasse $\mathrm{Mod}^L(\Phi)$ ist Durchschnitt von elementaren Klassen: $\mathrm{Mod}^L(\Phi) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \mathrm{Mod}^L(\varphi)$; hieran erinnert der Buchstabe Δ. Eine Δ-elementare Klasse, die nicht elementar ist, ist axiomatisierbar aber nicht endlich axiomatisierbar.

18.3 Beispiel Die Klassen der Äquivalenzrelationen, der Gruppen und abelschen Gruppen, der dichten linearen Ordnungen, der Körper und der angeordneten Körper sind elementare Klassen. Die Klassen der unendlichen Mengen, der Peano-Arithmetik und der algebraisch abgeschlossenen Körper sind Δ-elementare Klassen. (vgl. pp.120 ff.)

Wir untersuchen Δ-elementare Klassen auf Elementarität. Hierzu analysieren wir zunächst die Eigenschaften elementarer Klassen etwas genauer.

18.4 Satz *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen.*

(a) $\mathcal{K}$ ist genau dann elementar, wenn sowohl $\mathcal{K}$ als auch die komplementäre Klasse

$$\mathcal{K}^* :\equiv \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$$

Δ-elementar sind.

(b) Ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$, so ist $\mathcal{K}$ elementar genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge Φ' von Φ gibt mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi')$.

Beweis. zu (a). zu „⇒“. Sei $\mathcal{K}$ elementar, etwa $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\varphi)$. Dann ist $\mathcal{K}^* = \mathrm{Mod}^L(\dot\neg\varphi)$.

zu „⇐“. Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^*$ Δ-elementar, etwa $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$ und $\mathcal{K}^* = \mathrm{Mod}^L(\Phi^*)$ mit $\Phi, \Phi^* \subset \mathrm{Fml}_0(L)$. Wäre $\mathcal{K}$ nicht elementar, so gäbe es zu jedem endlichen $\Phi' \subset \Phi$ eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi'$ aber $\neg\,\mathfrak{A} \models \Phi$. Letzteres bedeutet $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$, also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}^*$ und somit $\mathfrak{A} \models \Phi^*$. Folglich ist $\Phi \cup \Phi^*$ endlich erfüllbar und besitzt nach dem Kompaktheitssatz 17.30 ein Modell $\mathfrak{A}$. Wegen $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^* = \emptyset$ ist dies aber nicht möglich. Also muß $\mathcal{K}$ doch elementar sein.

zu (b). Sei $\mathcal{K}$ elementar, etwa $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\varphi)$. Da auch $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$ gilt, folgt $\Phi \models \varphi$. Nach dem Kompaktheitssatz existiert eine endliche Teilmenge $\Phi' \subset \Phi$ mit $\Phi' \models \varphi$. Also ist $\mathrm{Mod}^L(\Phi') \subset \mathrm{Mod}^L(\varphi)$. Wegen $\Phi' \subset \Phi$ ist andererseits $\mathrm{Mod}^L(\Phi) \subset \mathrm{Mod}^L(\Phi')$. Insgesamt folgt $\mathrm{Mod}^L(\Phi') = \mathrm{Mod}^L(\Phi) = \mathcal{K}$, wie behauptet. QED

Hiermit können wir erste Modellklassen als nicht-elementar bzw. nicht Δ-elementar (d.h., nicht axiomatisierbar) identifizieren:

[117]Natürlich ist dieses Kapitel weit davon entfernt, eine gründliche Einführung in die Modelltheorie zu sein. Der an der Modelltheorie interessierte Leser sei etwa auf die Bücher [4] oder [29] verwiesen.

[118]$\mathrm{Mod}^L(\varphi)$ steht natürlich für $\mathrm{Mod}^L(\{\varphi\})$.

18.5 Lemma *Ist Φ eine L-Theorie, die beliebig große endliche Modelle hat,*[119] *so ist* $\mathrm{Mod}^L(\Phi \cup \Phi_\infty)$ *der unendlichen Modelle von Φ nicht elementar. Die Klasse $\mathcal{K}$ der endlichen Modelle von Φ ist nicht Δ-elementar.*

Beweis. Nach 17.32 hat Φ ein unendliches Modell, $\Phi \cup \Phi_\infty$ ist also erfüllbar. Wäre $\mathrm{Mod}^L(\Phi \cup \Phi_\infty)$ elementar, so gäbe es nach 18.4 eine endliche Teilmenge Φ' von $\Phi \cup \Phi_\infty$, die $\mathrm{Mod}^L(\Phi \cup \Phi_\infty)$ axiomatisiert. Dann existiert ein $n_0 < \omega$ mit $\varphi_{\geq n} \notin \Phi'$ für alle $n \geq n_0$.[120] Wähle ein endliches Modell $\mathfrak{A}$ von Φ der Kardinalität $\geq n_0$. Dann ist $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}^L(\Phi') \setminus \mathrm{Mod}^L(\Phi \cup \Phi_\infty)$, was der Annahme widerspricht, daß $\mathrm{Mod}^L(\Phi \cup \Phi_\infty)$ von Φ' axiomatisiert wird. Wäre schließlich $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Psi)$, so hätte Ψ nach 17.32 ein unendliches Modell, d.h., $\mathrm{Mod}^L(\Psi) \setminus \mathcal{K} \neq \emptyset$, ein Widerspruch. $\mathcal{K}$ ist also nicht axiomatisierbar. QED

Ein einfaches Beispiel einer „algebraisch relevanten" Modellklasse, die Δ-elementar aber nicht elementar ist, ist die Klasse der torsionsfreien Gruppen.

18.6 Beispiel Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ (d.h., ein Modell von Φ_{Gr}, siehe Seite 120) heißt *torsionsfrei*, wenn für jedes $1 \leq n < \omega$ und jedes $g \in \mathfrak{G}$, $g \neq e$, gilt

$$\underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ mal}} \neq e.$$

Um zu sehen, daß die Klasse der torsionsfreien Gruppen Δ-elementar ist, definieren wir zunächst rekursiv für $1 \leq n < \omega$ den Term $\dot{v}_0^n$ durch

$$\begin{aligned} \dot{v}_0^1 &:\equiv \dot{v}_0; \\ \dot{v}_0^{n+1} &:\equiv \dot{f}\dot{v}_0^n\dot{v}_0; \end{aligned}$$

und setzen

$$T_n :\equiv \forall \dot{v}_0 \,\dot{(}\dot{\neg}\, \dot{v}_0 \doteq \dot{e} \dot{\to} \dot{\neg}\, \dot{v}_0^n \doteq \dot{e}\dot{)}.$$

Dann wird die Klasse der torsionsfreien Gruppen axiomatisiert durch

$$\Phi :\equiv \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{T_n \mid 1 \leq n < \omega\}.$$

Sie ist aber nicht elementar: ansonsten würde sie nämlich durch eine endliche Teilmenge Φ' von Φ axiomatisiert. Dann existiert ein $n_0 < \omega$, so daß $T_n \notin \Phi'$ für alle $n > n_0$. Sei p eine Primzahl, $p > n_0$. Dann ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Modell von Φ'. Diese Gruppe ist aber nicht torsionsfrei, da

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ mal}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Um zu zeigen, daß die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht elementar ist, ist mehr Arbeit nötig. Wir benötigen dazu das im folgenden beschriebene Verfahren zur Konstruktion von Modellen, das in der Modelltheorie von großer Bedeutung ist.

18.2 Ketten von Modellen.

Es sei eine Kardinalzahl κ gegeben. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei $\mathfrak{A}_\alpha$ eine L-Struktur, so daß $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\beta$ für $\alpha < \beta$ gilt.[121]

18.7 Definition Eine solche Folge $(\mathfrak{A}_\alpha | \alpha < \kappa)$ heißt **Kette** von L-Strukturen.

[119] Z.B. $\Phi \in \{\Phi_{\mathrm{Äq}}, \Phi_{\mathrm{Gr}}, \Phi_{\mathrm{AGr}}\}$.
[120] Zu $\varphi_{\geq n}$ vgl. Seite 15.3.1.
[121] vgl. 13.6.

Wir definieren auf $\bigcup_{\alpha<\kappa}|\mathfrak{A}_\alpha|$ eine L-Struktur wie folgt:

$$\begin{aligned} R_i &:\equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} \dot{R}_i^{\mathfrak{A}_\alpha}; \\ f_j &:\equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} \dot{f}_j^{\mathfrak{A}_\alpha}; \\ c_k &:\equiv \dot{c}_k^{\mathfrak{A}_0}. \end{aligned}$$

Aus der Substrukturbeziehung $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\beta$ folgt leicht, daß hierdurch wirklich eine L-Struktur auf $\bigcup_{\alpha<\kappa}|\mathfrak{A}_\alpha|$ definiert wird. Diese Struktur bezeichnen wir mit

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha$$

und nennen sie die **Vereinigung der** $\mathfrak{A}_\alpha$. Aus der Konstruktion folgt sofort:

18.8 Lemma *Für $\alpha < \kappa$ ist $\mathfrak{A}_\alpha \subset \bigcup_{\beta<\kappa}\mathfrak{A}_\beta$.*

18.9 Satz *Sei φ ein Π_2-Satz von L; d.h., es ist $\varphi = \dot\forall x_1 \ldots \dot\forall x_m \,\dot\exists y_1 \ldots \dot\exists y_n \,\psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, wobei $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ quantorenfrei ist.*[122] *Gilt dann $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$ für alle $\alpha < \kappa$, so gilt $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$.*

Beweis. Zur Abkürzung sei $A_\alpha :\equiv |\mathfrak{A}_\alpha|$ der Träger von $\mathfrak{A}_\alpha$ und $A :\equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ der Träger von $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathfrak{A}_\alpha$. Seien $a_1, \ldots, a_m \in A$ beliebig. Dann existiert ein $\alpha < \kappa$ mit $a_1, \ldots, a_m \in A_\alpha$. Wegen $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$ existieren $b_1, \ldots, b_n \in A_\alpha$ mit $\mathfrak{A}_\alpha \models \psi[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n]$. Wegen $\mathfrak{A}_\alpha \subset \bigcup_{\beta<\kappa}\mathfrak{A}_\beta$ und weil ψ quantorenfrei ist, folgt $\bigcup_{\beta<\kappa}\mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n]$, also $\bigcup_{\beta<\kappa}\mathfrak{A}_\beta \models \dot\exists y_1 \ldots \dot\exists y_n \,\psi(x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n)[a_1, \ldots, a_m]$. Da $a_1, \ldots, a_m$ beliebig gewählt waren, folgt $\bigcup_{\beta<\kappa}\mathfrak{A}_\beta \models \dot\forall x_1 \ldots \dot\forall x_m \,\dot\exists y_1 \ldots \dot\exists y_n \,\psi(x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n)$, und dies war zu zeigen. QED

18.10 Corollar *Ist $\mathcal{K}$ axiomatisierbar durch eine Theorie Φ, die nur aus Π_2-Sätzen besteht, so ist $\mathcal{K}$ unter der Vereinigung von Ketten abgeschlossen; d.h., ist $\kappa \in \mathrm{Card}$ und ist $(\mathfrak{A}_\alpha|\alpha < \kappa)$ eine Kette von Modellen aus $\mathcal{K}$, so ist $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{K}$.*

18.11 Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung: Ist $\mathcal{K}$ unter der Vereinigung von Ketten abgeschlossen, so hat $\mathcal{K}$ eine Axiomatisierung, die nur aus Π_2-Sätzen besteht. Einen Beweis hierfür findet man z.B. in [4], pp.149–151.

Als Anwendung der Konstruktion durch Ketten zeigen wir, daß jeder Körper einen algebraischen Abschluß hat.

18.12 Satz *Sei $\mathfrak{K}$ ein Körper. Dann existiert ein ein* **algebraischer Abschluß** *von $\mathfrak{K}$, d.h., ein Oberkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$, so daß gilt:*

(a) $\bar{\mathfrak{K}}$ ist algebraisch abgeschlossen;

(b) $\bar{\mathfrak{K}}$ ist **algebraisch** *über $\mathfrak{K}$, d.h., jedes Element von $\bar{\mathfrak{K}}$ ist algebraisch über $\mathfrak{K}$, also Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit Koeffizienten in $\mathfrak{K}$.*[123]

Es ist $\overline{\overline{\bar{\mathfrak{K}}}} = \overline{\overline{\mathfrak{K}}} + \aleph_0$.

Beweis. Wir führen nur die „modelltheoretischen“ Aspekte des Beweises aus; die rein „algebraischen“ Aspekte skizzieren wir nur. Beweise für diese findet man z.B. in [11]. Zunächst machen wir uns klar, daß jedes Polynom in einem gewissen, algebraischen Oberkörper seines Koeffizientenkörpers eine Nullstelle hat:

[122] In Π_2 bezieht sich die 2 auf die Anzahl der Quantorenwechsel; das Π deutet an, daß die Formel mit einem $\dot\forall$-Quantor beginnt.

[123] Man benutzt auch die Sprechweise: „die Erweiterung $\mathfrak{K} \subset \bar{\mathfrak{K}}$ ist algebraisch“.

(1) Ist $\mathfrak{L}$ ein Körper und $p \in \mathfrak{L}[x]$ ein nichtkonstantes Polynom mit Koeffizienten in $\mathfrak{L}$, so existiert ein Oberkörper $\mathfrak{L}^p$ von $\mathfrak{L}$, der algebraisch über $\mathfrak{L}$ ist und in dem p eine Nullstelle hat. Es ist $\overline{\overline{\mathfrak{L}^p}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0$.

Beweis. Indem wir $\mathfrak{L}[x]$ durch das von einem irreduziblen Faktor q von p erzeugte Ideal dividieren, erhalten wir einen Oberkörper von $\mathfrak{L}$, in dem p eine Nullstelle a hat. Der Körper $\mathfrak{L}(a)$, der genau aus den Werten $f(a)$ $(f \in \mathfrak{L}[x])$ besteht, ist eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{L}$ zu einem Oberkörper, in dem p eine Nullstelle hat. Ferner ist $\overline{\overline{\mathfrak{L}(a)}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0$. qed(1)

Wir konstruieren mit einer Kettenkonstruktion nun zu jedem Körper $\mathfrak{L}$ einen Oberkörper $\mathfrak{L}'$, in dem jedes nichtkonstante Polynom *mit Koeffizienten in* $\mathfrak{L}$ eine Nullstelle hat:

(2) Sei $\mathfrak{L}$ ein Körper. Dann existiert ein Oberkörper $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$, so daß gilt:
  (a) Jedes nichtkonstante Polynom $p \in \mathfrak{L}[x]$ hat in $\mathfrak{L}'$ eine Nullstelle;
  (b) $\mathfrak{L}'$ ist algebraisch über $\mathfrak{L}$;
  (c) $\overline{\overline{\mathfrak{L}'}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0$.

Beweis. Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{\mathfrak{L}[x]}} \left(= \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0\right)$ und $(p_\alpha | \alpha < \kappa)$ eine Aufzählung aller nichtkonstanten Polynome mit Koeffizienten in $\mathfrak{L}$. Definiere eine Kette $(\mathfrak{L}_\alpha | \alpha < \kappa)$ von Körpern durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 &:\equiv \mathfrak{L}; \\ \mathfrak{L}_{\alpha+1} &:\equiv \mathfrak{L}_\alpha^{p_\alpha}; \\ \mathfrak{L}_\delta &:\equiv \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \text{falls } \operatorname{Lim}(\delta). \end{aligned}$$

Da $\Phi_{\text{Körper}}$ nur aus Π_2-Sätzen besteht, führt die Definition nach 18.10 an jeder Limes-Stelle wieder zu einem Körper. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß für Körper $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3$ die Erweiterung $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_3$ genau dann algebraisch ist, wenn die Erweiterungen $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3$ algebraisch sind, zeigt man durch Induktion nach α leicht, daß die Erweiterungen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_\alpha$ algebraisch sind. Ebenfalls induktiv folgt $\overline{\overline{\mathfrak{L}_\alpha}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0$. Wir setzen dann

$$\mathfrak{L}' :\equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{L}_\alpha$$

und erhalten einen Körper, der (a) und (b) erfüllt. (Der Nachweis von (b) entspricht dem Beweis der Algebraizität der Erweiterung $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_\delta$, wenn $\operatorname{Lim}(\delta)$ gilt.) (c) folgt sofort aus

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}'}} \leq \sum_{\alpha<\kappa} \overline{\overline{\mathfrak{L}_\alpha}} \leq \kappa \cdot \underbrace{(\overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0)}_{=\kappa} = \overline{\overline{\mathfrak{L}}} + \aleph_0.$$

Damit ist (2) bewiesen. qed(2)

Durch $\aleph_0$-fache Iteration der Konstruktion in (2) finden wir nun den gewünschten Körper: wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_0 &:\equiv \mathfrak{K}; \\ \mathfrak{K}_{n+1} &:\equiv \mathfrak{K}_n'; \\ \bar{\mathfrak{K}} &:\equiv \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{K}_n. \end{aligned}$$

Man sieht ähnlich wie im Beweis zu (2), daß die Erweiterung $\mathfrak{K} \subset \bar{\mathfrak{K}}$ algebraisch ist. $\bar{\mathfrak{K}}$ ist algebraisch abgeschlossen, da die Koeffizienten eines beliebigen, nichtkonstanten Polynoms $p \in \bar{\mathfrak{K}}[x]$ bereits in einem $\mathfrak{K}_n$ liegen müssen, wir nach Konstruktion also in $\mathfrak{K}_{n+1} = \mathfrak{K}_n'$ (und somit in $\bar{\mathfrak{K}}$) eine Nullstelle von p vorfinden. Die Kardinalität von $\bar{\mathfrak{K}}$ berechnen wir wie folgt: einerseits findet man wegen (2) (c) induktiv

$$\overline{\overline{\mathfrak{K}_n}} \leq \overline{\overline{\mathfrak{K}}} + \aleph_0,$$

woraus

$$\overline{\overline{\bar{\mathfrak{K}}}} \leq \aleph_0 \cdot (\overline{\overline{\mathfrak{K}}} + \aleph_0) = \overline{\overline{\mathfrak{K}}} + \aleph_0$$

folgt. Andererseits ist zunächst $\overline{\overline{\mathfrak{K}}} \leq \overline{\overline{\bar{\mathfrak{K}}}}$ wegen $\mathfrak{K} \subset \bar{\mathfrak{K}}$. Weiterhin ist $\aleph_0 \leq \overline{\overline{\bar{\mathfrak{K}}}}$, da ein endlicher Körper nicht algebraisch abgeschlossen sein kann (für endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n$ eines Körpers ist $(x - a_1) \cdots (x - a_n) + 1$ ein Polynom, das keine Nullstelle unter den a_i hat). Damit ist

$$\overline{\overline{\bar{\mathfrak{K}}}} = \overline{\overline{\mathfrak{K}}} + \aleph_0$$

gezeigt und der Satz bewiesen. QED

Wir benutzen nun eine Kettenkonstruktion, um zu beweisen, daß die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist. [124] Wir zeigen zunächst:

18.13 Lemma *Zu jedem $n < \omega$ existiert ein Oberkörper $\mathbb{Q}^n$ von $\mathbb{Q}$, so daß folgendes gilt:*
(a) Jedes Polynom $p \in \mathbb{Q}^n[x]$ vom Grad $\leq n$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{Q}^n$.
(b) $\mathbb{Q}^n$ ist nicht algebraisch abgeschlossen.

Beweis. Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$. Nach 18.12 ist $\bar{\mathbb{Q}}$ abzählbar. Sei $(a_k | k < \omega)$ eine Aufzählung der Elemente von $\bar{\mathbb{Q}}$. Für fixiertes $n < \omega$ definieren wir eine Kette $(\mathbb{Q}^n_i | i < \omega)$ von Unterkörpern von $\bar{\mathbb{Q}}$ wie folgt: es sei $\mathbb{Q}^n_0 :\equiv \mathbb{Q}$. Sei nun $\mathbb{Q}^n_i$ bereits definiert. Existiert dann ein k, so daß $a_k \notin \mathbb{Q}^n_i$ und Nullstelle eines Polynoms vom Grad $\leq n$ aus $\mathbb{Q}^n_i[x]$ ist, so wähle k minimal mit dieser Eigenschaft und setze $\mathbb{Q}^n_{i+1} :\equiv \mathbb{Q}^n_i(a_k)$. Existiert kein derartiges k, so setze $\mathbb{Q}^n_{i+1} :\equiv \mathbb{Q}^n_i$. Setze dann $\mathbb{Q}^n :\equiv \bigcup_{i<\omega} \mathbb{Q}^n_i$. Ist nun $p(x) = \sum_{j \leq m} b_j x^j$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}^n$, so existiert ein $i < \omega$ mit $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}^n_i$. Da $\bar{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein $j < \omega$, so daß a_j Nullstelle von p ist. Aus der Konstruktion der Körper folgt leicht $a_j \in \mathbb{Q}^n_{i+j}$. Also hat p eine Nullstelle in $\mathbb{Q}^n$. Damit ist (a) bewiesen. Um (b) zu zeigen, benötigen wir folgende Begriffsbildungen und Resultate aus der Algebra; Beweise findet man z.B. in [11].

Sind $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ Körper, so ist $\mathfrak{L}$ ein Vektorraum über $\mathfrak{K}$. Die Dimension dieses Vektorraumes wird mit $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ bezeichnet und heißt **Grad der Körpererweiterung**. *Ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(a)$, wobei a algebraisch über $\mathfrak{K}$ ist, so ist $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ der kleinstmögliche Grad eines normierten*[125]*, nichtkonstanten Polynomes mit Koeffizienten in $\mathfrak{K}$, das a als Nullstelle hat.*[126] *Im Fall $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_3$ gilt*

$$[\mathfrak{K}_3 : \mathfrak{K}_1] = [\mathfrak{K}_3 : \mathfrak{K}_2][\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1]$$

*(**Gradsatz**). Hieraus folgt: ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_m)$, wobei $a_1, \ldots, a_m$ algebraisch über $\mathfrak{K}$ sind, so wird $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ vom Grad des Minimalpolynoms von a_1 geteilt, denn es ist*

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = [\mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_m) : \mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_{m-1})] \cdots [\mathfrak{K}(a_1) : \mathfrak{K}].$$

Um (b) zu zeigen, nehmen wir an, $\mathbb{Q}^n$ ist algebraisch abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{Q}^n = \bar{\mathbb{Q}}$. Fixiere ein beliebiges $q \in \mathbb{P}$[127], $q > n$. Sei a ein beliebiges Element von $\bar{\mathbb{Q}}$, dessen Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ den Grad q hat (z.B. eine Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^q - 2$). Wegen $a \in \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n$, existiert ein kleinstes $i < \omega$ mit $a \in \mathbb{Q}^n_i$. Da für $j < \omega$ $\mathbb{Q}^n_{j+1}$ aus $\mathbb{Q}^n_j$ durch Adjunktion einer Nullstelle eines Polynomes vom Grad $\leq n$ entsteht, ist $[\mathbb{Q}^n_{j+1} : \mathbb{Q}^n_j] \leq n < q$. Wegen

$$[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}^n_{i-1}] \cdots [\mathbb{Q}^n_1 : \mathbb{Q}^n_0]$$

folgt dann, daß q keinen der Faktoren auf der rechten Seite und damit auch das Produkt nicht teilen kann. Also gilt $\neg\ q \mid [\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}]$. Da $[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}] < \omega$ und $a \in \mathbb{Q}^n_i$ ist, existieren andererseits endlich viele

[124] Der hier präsentierte Beweis stützt sich auf die Darstellung in [2].
[125] D.h., der Koeffizient der höchsten Potenz ist = 1.
[126] Dieses Polynom minimalen Grades ist eindeutig bestimmt und heißt **Minimalpolynom** von a über $\mathfrak{K}$.
[127] $\mathbb{P}$ bezeichne die Menge der Primzahlen.

$b_1, \ldots, b_m$, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind, so daß $\mathbb{Q}_i^n = \mathbb{Q}(a, b_1, \ldots, b_m)$ gilt.[128] Wir haben eben bemerkt, daß in diesem Fall $[\mathbb{Q}_i^n : \mathbb{Q}]$ vom Grad des Minimalpolynoms von a geteilt wird, d.h., $q \mid [\mathbb{Q}_i^n : \mathbb{Q}]$. Der sich ergebende Widerspruch zeigt, daß $\mathbb{Q}^n$ nicht algebraisch abgeschlossen sein kann. QED

18.14 Satz *Die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper ist nicht elementar.*

Beweis. Angenommen, die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper ist endlich axiomatisierbar. Dann existiert nach 18.4 eine endliche Teilmenge Φ' von Φ_{aaK}, die diese Klasse axiomatisiert. Es gibt ein $n < \omega$, so daß $\psi_m \notin \Phi'$[129] für alle $m > n$. Nach dem letzten Satz ist dann $\mathbb{Q}^n$ ein Modell von Φ' aber kein Modell von Φ_{aaK}, was der Annahme widerspricht, daß Φ' die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper axiomatisiert. QED

Zum Abschluß unserer Untersuchungen von elementaren und Δ-elementaren Klassen weisen wir nochmals darauf hin, daß es Modellklassen gibt, die nicht Δ-elementar sind. Aus dem Satz von Löwenheim-Skolem 17.34 haben wir bereits weiter oben gefolgert, daß die Klasse aller L-Strukturen, die zu einer gegebenen unendlichen L-Struktur $\mathfrak{A}$ isomorph sind, nicht Δ-elementar ist. Und 18.5 zeigt, daß z.B. die Modellklasse der endlichen Mengen bzw. der endlichen Gruppen bzw. der endlichen Körper nicht Δ-elementar ist.

18.3 Elementare Substrukturen und Abbildungen sowie elementare Äquivalenz.

Wir beschäftigen uns nun mit Eigenschaften einzelner Modelle und Theorien beschäftigen. Zunächst führen wir einen Namen für die Menge aller Sätze, die in einer gegebenen L-Struktur $\mathfrak{A}$ gelten, ein:

18.15 Definition Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ heißt die **Theorie** von $\mathfrak{A}$.

18.16 Bemerkung Für $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ gilt $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$.

Strukturen, deren Theorien sich nicht unterscheiden, heißen elementar äquivalent:

18.17 Definition Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Theorien.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent** $:\equiv \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} :\equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

18.18 Bemerkung Es gilt also: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \longleftrightarrow \forall\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)\ \big(\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi\big)$.

Wir verallgemeinern den Begriff der elementaren Äquivalenz, indem wir auch L-Formeln mit freien Variablen in die Betrachtung mit einbeziehen. Hierzu benötigen wir Funktionen, die $|\mathfrak{A}|$ nach $|\mathfrak{B}|$ abbilden. Wir haben bereits Abbildungen zwischen mathematischen Strukturen eingeführt und dabei die Begriffe „Homomorphismus“, „Einbettung“und „Isomorphismus“ definiert, siehe 13.8, 13.9 und 13.10. Hierbei haben wir nicht auf die Formeln der Logik erster Stufe Bezug genommen. Wenn wir dies tun, kommen wir zum Begriff der *elementaren Abbildung*: eine Abbildung zwischen zwei L-Strukturen heißt elementar, wenn die durch Formeln erster Stufe ausdrückbaren Eigenschaften von Elementen dieser Strukturen (solche Eigenschaften werden auch *elementare* Eigenschaften genannt) unter der Abbildung invariant sind.

18.19 Definition Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. Eine Funktion h heißt **elementare Abbildung**, falls folgendes gilt:

(i) $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$;

(ii) $\forall n < \omega\, \forall\varphi \in \mathrm{Fml}_n(L)\, \forall\vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n\ \big(\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{a})]\big)$.

Wir schreiben in diesem Fall auch $h\colon \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

[128] Erweitere einfach $\{a\}$ zu einer $\mathbb{Q}$-Basis des Vektorraumes $\mathbb{Q}_i^n$.
[129] zu ψ_m vgl. Seite 122.

Substrukturen, die dieselben elementaren Eigenschaften wie ihre Oberstruktur haben, heißen ebenfalls elementar:

18.20 Definition Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. $\mathfrak{A}$ heißt **elementare Substruktur** von $\mathfrak{B}$, falls folgendes gilt:

(i) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$;

(ii) $\mathrm{id}\colon \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

In diesem Fall schreiben wir auch $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

18.21 Bemerkung Eine Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist also genau dann elementar, wenn für alle Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Fml}(L)$ und alle $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

18.22 Satz *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen.*

(a) $h\colon \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) $h\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \longrightarrow h\colon \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. *Insbesondere sind also zwei isomorphe Strukturen elementar äquivalent.*

Beweis. (a) ist evident. Um (b) einzusehen, zeigt man zunächst durch Induktion über den Termaufbau:

(1) $\quad \forall s(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Tm}(L)\, \forall \vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n \; s^{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = s^{\mathfrak{B}}[h(\vec{a})]$.

Hiernach beweist man

(2) $\quad \forall \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall \vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n \; \big(\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{a})]\big)$

durch Induktion über den Formelaufbau. (Beim $\dot\forall$-Schritt geht die Bijektivität von h ein.) Die Ausführung des Beweises verbleibt dem Leser zur Übung. QED

18.4 Kategorizität und Vollständigkeit einer Theorie.

Wie etwa aus dem Satz von Löwenheim und Skolem (17.34) folgt, hat eine Theorie Φ, die ein unendliches Modell hat, viele nicht-isomorphe Modelle, wobei sich die nicht-Isomorophie aus unterschiedlichen Kardinalitäten der Modelle ergibt. Eine Theorie ist also nicht „kategorisch“. Wir können uns aber fragen, ob eventuell sämtliche Modelle von Φ, die eine vorher fixierte Kardinalität κ haben, isomorph sind:

18.23 Definition Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ und $\kappa \in \mathrm{Cd}$.
Φ ist **κ-kategorisch** $:\equiv \exists \mathfrak{A}\, \big(\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \kappa \wedge \mathfrak{A} \models \Phi \wedge \forall \mathfrak{B}((\mathfrak{B} \models \Phi \wedge \overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \kappa) \longrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B})\big)$.

18.24 Bemerkung Eine Menge Φ von Sätzen ist also genau dann κ-kategorisch, wenn es (modulo Isomorphie) genau ein Modell von Φ gibt, das Kardinalität κ hat. Insbesondere ist ein solches Φ erfüllbar.

Während eine L-Theorie Φ z.B. keine unendliche Kardinalität für ihre Modelle vorschreiben kann, kann es durchaus der Fall sein, daß sie für jeden L-Satz festlegt, ob er in jedem ihrer Modelle gilt oder ob er in keinem ihrer Modelle gilt. Syntaktisch gesprochen: ist ein beliebiger L-Satz φ vorgegeben, so läßt sich entweder φ oder $\dot\neg\varphi$ ableiten. Derartige Theorien heißen vollständig.

18.25 Definition Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$. Φ ist **L-vollständig** $:\equiv \forall \varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)\, \big(\Phi \vdash \varphi \longleftrightarrow \neg\, \Phi \vdash \dot\neg\varphi\big)$.

Ein erstes Beispiel für vollständige L-Theorien liefert die Theorie einer L-Struktur:

18.26 Beispiel Da für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ entweder $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \dot\neg\varphi$ gilt, ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ L-vollständig.

Ein oft benutztes Kriterium um zu verifizieren, daß eine Theorie vollständig ist, ist Vaught's Test[130]:

[130] Robert L. Vaught

18.27 Satz (Vollständigkeitskriterium, Vaught's Test) *Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$, Φ habe keine endlichen Modelle. Existiert dann ein $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$, so daß Φ κ-kategorisch ist, so ist Φ vollständig.*

Beweis. Sei $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ und Φ sei κ-kategorisch. Angenommen, Φ ist nicht vollständig. Dann existiert ein $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ mit $\Phi \not\vdash \varphi$ und $\Phi \not\vdash \dot\neg\varphi$, so daß $\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\}$ und $\Phi \cup \{\varphi\}$ konsistent, also erfüllbar sind. Da Φ keine endlichen Modelle hat, hat jede dieser beiden Mengen ein unendliches Modell. Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem existieren Modelle $\mathfrak{A}$ von $\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\}$ und $\mathfrak{B}$ von $\Phi \cup \{\varphi\}$ der Kardinalität κ. Diese beiden Strukturen sind dann nicht elementar äquivalent, also erst recht nicht isomorph. Da sie Modelle von Φ der Kardinalität κ sind, ist also Φ nicht κ-kategorisch, was der Voraussetzung widerspricht. Also muß Φ doch vollständig sein. QED

18.5 Analyse einiger bekannter Theorien in Bezug auf Kategorizität und Vollständigkeit.

18.5.1 Die Theorie Φ_∞ der unendlichen Mengen.

Da je zwei Mengen derselben Kardinalität bijektiv aufeinander abbildbar sind, sind je zwei Modelle von Φ_∞ (vgl. 15.19), die dieselbe Kardinalität haben, isomorph. Φ_∞ ist also κ-kategorisch für alle $\kappa \geq \aleph_0$ und somit vollständig.

18.5.2 Die Theorie $\Phi_{\text{Äq}}$ der Äquivalenzrelationen, die Theorie Φ_{Gr} der Gruppen und die Theorie Φ_{aGr} der abelschen Gruppen.

Keine dieser[131] Theorien Φ ist vollständig: jede hat nämlich ein Modell der Kardinalität 2 und ein unendliches Modell; somit kann weder $\Phi \vdash \varphi_{=2}$ noch $\Phi \vdash \dot\neg\varphi_{=2}$ gelten.[132]

18.5.3 Die Theorie Φ_{DLO} der dichten linearen Ordnungen.

Φ_{DLO}[133] ist vollständig. Dies folgt mit Vaught's Test sofort aus dem folgenden, auf Cantor zurückgehenden Satz:

18.28 Satz Φ_{DLO} *ist $\aleph_0$-kategorisch.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abzählbare Modelle von Φ_{DLO}. Sei $|\mathfrak{A}| = \{a_n \mid n < \omega\}$ und $|\mathfrak{B}| = \{b_n \mid n < \omega\}$, wobei wir o.E. $a_m \neq a_n$ sowie $b_m \neq b_n$ für $m \neq n$ annehmen. Wir definieren durch ω-Rekursion eine Funktion $h\colon |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$, indem wir zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hin und her wechseln:

Fall 1. „hin-Schritt": $n < \omega$ ist gerade. Setze $A_n :\equiv \{k < \omega \mid h(a_k) \text{ ist bereits definiert}\}$ und $k(n) :\equiv \min(\omega \setminus A_n)$. Wir definieren $h(a_{k(n)})$. Hierzu unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1.1. $a_{k(n)} < a_k$ für alle $k \in A_n$.[134] Da $\mathfrak{B}$ kein kleinstes Element hat, existiert ein kleinstes $l(n) < \omega$ mit $b_{l(n)} < h(a_k)$ für alle $k \in A_n$. Wir setzen $h(a_{k(n)}) :\equiv b_{l(n)}$.

Fall 1.2. $a_{k(n)} > a_k$ für alle $k \in A_n$. Diesen Fall behandelt man dual zu Fall 1.1.

Fall 1.3. Es gibt $k_1, k_2 \in A_n$ mit $a_{k_1} < a_{k(n)} < a_{k_2}$. Wähle $k_1, k_2 \in A_n$ dann so, daß $a_{k_1} < a_{k(n)} < a_{k_2}$ gilt und zwischen a_{k_1} und a_{k_2} kein Element a_k mit $k \in A_n$ liegt. Wegen der Dichtheit der Ordnung von $\mathfrak{B}$ und weil $h \restriction \{a_k \mid k \in A_n\}$ ordnungstreu definiert ist, existiert ein $l < \omega$ mit $h(a_{k_1}) < b_l < h(a_{k_2})$. Sei $l(n)$ das kleinste derartige l; setze $h(a_{k(n)}) :\equiv b_{l(n)}$.

Damit ist der „hin-Schritt" abgeschlossen.

Fall 2. „her-Schritt": $n < \omega$ ist ungerade. Setze $B_n :\equiv \big\{l < \omega \;\big|\; b_l \in \{h(a_{k(m)}) \mid m < n\}\big\}$ und $l(n) :\equiv \min(\omega \setminus B_n)$. Wir definieren $h^{-1}(b_{l(n)})$. Hierzu unterscheiden wir wieder die drei möglichen Fälle:

[131] vgl. pp.120
[132] zu $\varphi_{=n}$ vgl. Seite 120
[133] vgl. Seite 121
[134] Der Einfachheit halber bezeichnen wir sowohl die Ordnungsrelation von $\mathfrak{A}$ als auch von $\mathfrak{B}$ mit $<$.

Fall 2.1. $b_{l(n)} < b_l$ für alle $l \in B_n$. Dual zu Fall 1.1. existiert ein kleinstes $k(n)$ mit $a_{k(n)} < h^{-1}(b_l)$ für alle $l \in B_n$; wir setzen $h(a_{k(n)}) :\equiv b_{l(n)}$.
Fall 2.2. $b_{l(n)} > b_l$ für alle $l \in B_n$. Diesen Fall behandelt man dual zu Fall 2.1.
Fall 2.3. Es gibt $l_1, l_2 \in B_n$ mit $b_{l_1} < b_{l(n)} < b_{l_2}$. Dual zu Fall 1.3 wählt man $l_1, l_2 \in B_n$ mit $b_{l_1} < b_{l(n)} < b_{l_2}$ und $\{b_l \,|\, l \in B_n\} \cap \{b \in B \,|\, b_{l_1} < b < b_{l_2}\} = \emptyset$ und findet ein kleinstes $k(n) < \omega$ mit $h^{-1}(b_{l_1}) < a_{k(n)} < h^{-1}(b_{l_2})$. Setze $h(a_{k(n)}) :\equiv b_{l(n)}$.
Damit ist der „her-Schritt" abgeschlossen.
Man sieht leicht, daß h eine ordnungstreue Bijektion von $|\mathfrak{A}|$ auf $|\mathfrak{B}|$ ist. QED

Wir bemerken, daß man obigen Satz nicht auf überabzählbare Kardinalitäten verallgemeinern kann. Ist $\kappa > \aleph_0$, so hat Φ_{DLO} die maximal mögliche Anzahl an nicht-isomorphen Modellen, nämlich 2^κ![135] In der Tat gilt dies für jede Theorie, die die Axiome einer linearen Ordnung umfassen.[136]

18.5.4 Die Theorie Φ_{PA} der Peano-Arithmetik und die Theorie Th($\mathbb{N}$) der Arithmetik.

Bei der Definition der PEANO-Arithmetik Φ_{PA}, siehe Seite 121. Bei der Definition von Φ_{PA}, haben wir bereits auf die Schwäche des Induktionsschemas von Φ_{PA} im Vergleich zum Induktionsaxiom (P3) der PEANO-Axiome[137] hingewiesen. Um dies genauer auszuführen, konstruieren wir ein zu $\mathbb{N}$ gleichmächtiges *Nichtstandardmodell der Arithmetik*. Das ist eine zur Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, t)$ der natürlichen Zahlen[138] elementar äquivalente Struktur, die zu dieser nicht isomorph ist. Um diese Struktur einfacher analysieren zu können, „erweitern" wir $\mathbb{N}$ um die kanonische Ordnung auf $\mathbb{N}$, ferner lassen wir jede Zahl aus $\mathbb{N}$ als Konstante zu. Formal gehen wir über zu einer Sprache L, die wir aus L_{Arith} erhalten, indem wir ein zweistelliges Relationssymbol $\dot{R}$ und für jedes $n < \omega$ ein neues Konstantensymbol $\dot{n}$ hinzufügen. $\mathbb{N}$ expandieren wir zu einer L-Struktur $\mathbb{N}'$, indem wir $\dot{R}$ durch die kanonische Ordnung $<$ der Menge der natürlichen Zahlen und $\dot{n}$ durch n interpretieren:

$$\mathbb{N}' = \big(|\mathbb{N}'|, <, +, \cdot, 0, 1, (n | n < \omega)\big).$$

Wählen wir nun für jedes $n < \omega$ ein weiteres neues Konstantensymbol $\dot{c}_n$, so ist die Menge

$$\Psi :\equiv \mathrm{Th}(\mathbb{N}') \cup \{\dot{R}\dot{n}\dot{c}_0 \,|\, n < \omega\} \cup \{\dot{R}\dot{c}_m\dot{c}_n \,|\, m < n < \omega\}$$

endlich erfüllbar: jede endliche Teilmenge ist enthalten in einer Menge der Art

$$\Psi(N) :\equiv \mathrm{Th}(\mathbb{N}') \cup \{\dot{R}\dot{n}\dot{c}_0 \,|\, n < N\} \cup \{\dot{R}\dot{c}_m\dot{c}_n \,|\, m < n < N\},$$

wobei $N < \omega$ gilt. Expandieren wir $\mathbb{N}'$ zu einer Struktur $\mathbb{N}''$, indem wir $\dot{c}_n$ als $N + n$ interpretieren, so erhalten wir ein Modell von $\Psi(N)$. Sei nun $\mathfrak{A} \models \Psi$ und $\mathfrak{B}$ das L_{Arith}-Redukt von $\mathfrak{A}$. Wegen $\Phi_{\mathrm{PA}} \subset \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \subset \Psi$ gilt dann $\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathrm{PA}}$ und $\mathfrak{B}$ ist zu $\mathbb{N}$ elementar äquivalent. Setzen wir

$$X :\equiv \{\dot{n}^{\mathfrak{A}} \,|\, n < \omega\}, \quad Y :\equiv \{\dot{c}_n^{\mathfrak{A}} \,|\, n < \omega\}$$

und bezeichnen wir die Ordnung von $\mathfrak{B}$ wieder mit $<$, so hat $|\mathfrak{B}|$ das folgende Aussehen:

$$\underbrace{\dot{0}^{\mathfrak{A}} < \dot{1}^{\mathfrak{A}} < \dot{2}^{\mathfrak{A}} < \dot{3}^{\mathfrak{A}} < \ldots}_{=X} < \ldots < \underbrace{\dot{c}_0^{\mathfrak{A}} < \dot{c}_1^{\mathfrak{A}} < \dot{c}_2^{\mathfrak{A}} < \dot{c}_3^{\mathfrak{A}} < \ldots}_{=Y} < \ldots .$$

X enthält das Nullelement und ist unter der Nachfolgerbildung abgeschlossen, es ist aber $X \neq |\mathfrak{B}|$! (X läßt sich also auch nicht durch eine L_{Arith}-Formel definieren, da wir sonst einen Widerspruch zum Induktionsschema von Φ_{PA} hätten.)

[135] Der Wert 2^κ ergibt sich so: um die Anzahl der Isomorphieklasse von Strukturen einer Sprache L nach oben abzuschätzen, genügt es zu untersuchen, wieviele L-Strukturen es gibt, deren Trägermenge κ ist. Man berechnet leicht, daß diese Zahl im Fall $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ durch 2^κ nach oben begrenzt ist.
[136] Dieses Resultat folgt aus einem noch allgemeineren, das erstmals 1970 von SAHARON SHELAH (geb. 3.7.1945, Jerusalem) bewiesen wurde. Der Originalbeweis findet sich in [37]. (Dem Anfänger auf dem Gebiet der Modelltheorie kann dieser Artikel leider *nicht* zur Lektüre empfohlen werden.)
[137] siehe 4.28
[138] Für diese Struktur schreiben wir im folgenden nur noch kurz $\mathbb{N}$.

Wir verifizieren abschließend, daß $\mathfrak{B}$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik ist, daß also $\mathbb{N}$ und $\mathfrak{B}$ nicht isomorph sind. Da ein Isomorphismus eine surjektive Einbettung ist,[139] folgt dies sofort aus:

$(*)$ Ist $h\colon \mathbb{N} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, so gilt $h(n) = \dot{n}^{\mathfrak{A}}$. Insbesondere ist h nicht surjektiv.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach n durch:

$n = 0$. Da $\dot{0}$ ein Konstantensymbol von L_{Arith} ist, ist $h(0) = h(\dot{0}^{\mathbb{N}}) = \dot{0}^{\mathfrak{B}} = \dot{0}^{\mathfrak{A}}$.

$n = 1$. Analog folgt $h(1) = \dot{1}^{\mathfrak{A}}$.

$n = m + 1$. Da $\dot{n} = \dot{f}_{\text{add}}\dot{m}\dot{1} \in \text{Th}(\mathbb{N}')$ ist, gilt $\dot{n}^{\mathfrak{A}} = \dot{m}^{\mathfrak{A}} \oplus \dot{1}^{\mathfrak{A}}$. Hierbei bezeichnet $\oplus$ die Addition in $\mathfrak{B}$. Da h als Morphismus mit der Addition in $\mathbb{N}$ und in $\mathfrak{B}$ kommutiert, folgt

$$h(n) = h(m+1) = h(m) \oplus h(1) = \dot{m}^{\mathfrak{A}} \oplus \dot{1}^{\mathfrak{A}} = \dot{n}^{\mathfrak{A}}.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. qed$(*)$

Da wir nach dem „abwärts"-Satz von Löwenheim-Skolem 17.27 annehmen können, daß $\mathfrak{B}$ abzählbar ist, haben wir gezeigt:

18.29 Satz (Satz von Skolem) *Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.*

Welche Beziehung besteht zwischen Φ_{PA} und $\text{Th}(\mathbb{N})$? Natürlich gilt $\text{Th}(\mathbb{N}) \models \Phi_{\text{PA}}$. Gilt hier auch $\Phi_{\text{PA}} \models \text{Th}(\mathbb{N})$? In diesem Fall hätten wir eine sehr einfache Axiomatisierung von $\text{Th}(\mathbb{N})$ (bzw. der durch $\text{Th}(\mathbb{N})$ bestimmten Modellklasse). Diese Frage muß jedoch mit *nein* beantwortet werden. Man kann sogar noch mehr zeigen: $\text{Th}(\mathbb{N})$ hat kein Axiomensystem Φ, so daß man mit Hilfe eines effektiven, endlichen Verfahrens für jeden Satz $\varphi \in \text{Fml}_0(L_{\text{Arith}})$ in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob $\varphi \in \Phi$ gilt oder nicht.[140] (Insbesondere gibt es also auch kein derartiges Verfahren, daß für jeden solchen Satz entscheidet, ob er in $\mathbb{N}$ gilt (d.h., zu $\text{Th}(\mathbb{N})$ gehört) oder nicht.)

Φ_{PA} ist nicht vollständig und somit auch nicht κ-kategorisch für alle $\kappa \geq \aleph_0$. Aus $\Phi_{\text{PA}} \not\models \text{Th}(\mathbb{N})$ folgt nämlich die Existenz eines Modelles $\mathfrak{A}$ von Φ_{PA} und eines $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{N})$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{PA}} \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$. Andererseits ist $\Phi_{\text{PA}} \cup \{\varphi\}$ als Teilmenge von $\text{Th}(\mathbb{N})$ konsistent. Also kann weder $\Phi_{\text{PA}} \vdash \varphi$ noch $\Phi_{\text{PA}} \vdash \dot{\neg}\varphi$ gelten. Einen „mathematischen" Satz φ, der in $\mathbb{N}$ gilt, aber nicht aus Φ_{PA} abgeleitet werden kann, explizit anzugeben, gestaltet sich allerdings schwierig und gelang erstmals in der Mitte der siebziger Jahren unseres Jahrhunderts. In [28] geben Jeff Paris und Leo Harrington eine Verallgemeinerung des endlichen Ramsey-Theorems an, die in $\mathbb{N}$ gilt, aber nicht aus Φ_{PA} abgeleitet werden kann. Die Hintergründe hierzu werden knapp und in leicht verständlicher Form in [24] erläutert; weitergehende Informationen findet man z.B. in [36].

Wir bemerken zum Abschluß unserer Untersuchung der Peano-Arithmetik noch, daß das Induktionsaxiom (P3) in der Logik zweiter Stufe[141] problemlos formalisiert werden kann durch

$$\dot{\forall}\dot{V}_0^1 \,\dot{(}\dot{(}\dot{V}_0^1\dot{0} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\forall}\dot{v}_0 \,\dot{(}\dot{V}_0^1\dot{v}_0 \to \dot{V}_0^1\dot{f}_{\text{add}}\dot{v}_0\dot{1}\dot{)}\dot{)} \mathbin{\dot{\longrightarrow}} \dot{\forall}\dot{v}_0\dot{V}_0^1\dot{v}_0\dot{)},$$

da wir über alle Teilmengen quantifizieren können.[142] Das Axiomensystem, das man aus Φ_{PA} erhält, wenn man das Induktionsschema durch diesen Satz der zweiten Stufe ersetzt, hat modulo Isomorphie *genau ein* Modell; der Beweis verläuft genau so wie der Beweis, daß je zwei Peano-Strukturen isomorph sind, siehe 7.1.

[139] siehe 13.10

[140] Präzisierungen und Beweise findet der interessierte Leser in [8].

[141] siehe Seite 147.

[142] Zur Erinnerung: $\dot{V}_0^1$ ist eine einstellige Relationsvariable.

18.5.5 Die Theorie $\Phi_{\text{Körper}}$ der Körper und die Theorie Φ_{aaK} der algebraisch abgeschlossenen Körper.

Beide Theorien[143] sind nicht vollständig, da sie keine Aussagen über die Charakteristik[144] machen. Durch Festlegung der Charakteristik kann man aber Φ_{aaK} vervollständigen. Definieren wir für $p \in \mathbb{P}$ den L_{Arith}-Satz $C_p :\equiv \sum_{i<p} \dot{1} \doteq \dot{0}$, so axiomatisiert

$$\Phi_{\text{aaK},p} :\equiv \Phi_{\text{aaK}} \cup \{C_p\}$$

die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p und

$$\Phi_{\text{aaK},0} :\equiv \Phi_{\text{aaK}} \cup \{\dot{\neg} C_p \mid p \in \mathbb{P}\}$$

die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Da nach Sätzen von Steinitz[145] ein algebraisch abgeschlossener Körper durch seine Charakteristik und seinen Transzendenzgrad[146] bestimmt ist, und dieser Transzendenzgrad für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Kardinalität $\kappa \geq \aleph_1$ gerade κ ist, sind je zwei algebraisch abgeschlossene Körper derselben Charakteristik und derselben überabzählbaren Kardinalität isomorph. Für $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ ist also $\Phi_{\text{aaK},p}$ κ-kategorisch für alle $\kappa \geq \aleph_1$. Insbesondere ergibt sich die Vollständigkeit dieser Theorie. Speziell: gilt ein Satz der Sprache der Arithmetik im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, so gilt er in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0.

18.5.6 Die Theorie Φ_{aoK} der angeordneten Körper.

Auch diese Theorie[147] ist nicht vollständig: der Satz $\varphi :\equiv \dot{\exists} \dot{v}_0\, \dot{f}_{\text{mult}} \dot{v}_0 \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_{\text{add}} \dot{1}\dot{1}$ wird wegen $\mathbb{Q} \models \dot{\neg}\varphi$ und $\mathbb{R} \models \varphi$ von Φ_{aoK} *nicht* entschieden. Wir können aber Φ_{aoK} zu einer vollständigen Theorie Φ_{raK} erweitern, indem wir die folgenden L_{Arith}-Sätze hinzufügen:

(i) $\dot{\forall} \dot{v}_0 \dot{\exists} \dot{v}_1 \dot{(} \dot{R} \dot{v}_0 \dot{0} \dot{\vee} \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_{\text{mult}} \dot{v}_1 \dot{v}_1 \dot{)}$ („jede positive Zahl ist ein Quadrat“)

(ii) für jedes $n < \omega$ den L_{Arith}-Satz

$$\dot{\forall} \dot{v}_0 \ldots \dot{\forall} \dot{v}_{2n+1}\, \dot{\exists} \dot{v}_{2n+2} \dot{\Big(} \dot{\neg}\, \dot{v}_{2n+1} \doteq \dot{0} \dot{\longrightarrow} \sum_{i<2n+2} \dot{f}_{\text{mult}} \dot{v}_i \big(\dot{v}^i_{2n+2}\big) \doteq \dot{0} \dot{\Big)}$$

(„jedes Polynom von ungeradem Grad hat eine Nullstelle“).

Φ_{raK} axiomatisiert die Klasse der reell-abgeschlossenen Körper und heißt Theorie der reell-abgeschlossenen Körper. Diese ist vollständig, nach dem im Zusammenhang mit der Theorie der dichten linearen Ordnungen ausgeführten aber für $\kappa \geq \aleph_1$ nicht κ-kategorisch.[148]

---

[143] siehe Seite 122

[144] Die *Charakteristik* k eines Körpers $\mathfrak{K}$ ist definiert als

$$k :\equiv \begin{cases} \min\Big\{n \,\Big|\, 1 \leq n < \omega \wedge \sum_{i<n} 1^{\mathfrak{K}} = 0\Big\}, & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $k = 0$ oder k ist eine Primzahl.

[145] Ernst Steinitz (13.6.1871, Laurahütte–29.9.1928, Kiel) Studium in Breslau und Berlin; 1894 Promotion in Breslau; 1897 Habilitation an der TH Berlin-Charlottenburg, danach hier Privatdozent; ab 1910 außerordentlicher Professor an der TH Breslau, von 1920 bis zu seinem Tode ordentlicher Professor an der Universität Kiel. Neben der Algebra und Körpertheorie, wo er fundamentale und richtungsweisende Resultate und Begriffsbildungen („Charakteristik“, „separable Erweiterung“) erarbeitet, forscht Steinitz auf dem Gebiet der geometrischen Topologie.

[146] Unter dem *Transzendenzgrad* eines Körpers $\mathfrak{K}$ versteht man die maximale Kardinalität einer algebraisch unabhängigen Teilmenge von $\mathfrak{K}$. Eine Teilmenge U von $\mathfrak{K}$ heißt dabei *algebraisch unabhängig*, wenn für je endlich viele $a_1, \ldots, a_n \in U$ und jedes Polynom $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ gilt: $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

[147] vgl. Seite 122.

[148] Einen Beweis der Vollständigkeit von Φ_{raK} findet man ebenso wie Ausführungen zu den modelltheoretischen Eigenschaften der algebraisch abgeschlossenen Körper in [31]. Hier findet man auch weitere Beispiele zu Theorien der Algebra und deren modelltheoretischen Eigenschaften.

18.5.7 Der Satz von Morley.

In Hinblick auf die Kategorizität zeigen die oben betrachteten, vollständigen Theorien folgendes Verhalten: entweder sie sind κ-kategorisch für alle unendlichen κ (etwa Φ_∞), oder sie sind $\aleph_0$-kategorisch aber nicht κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$ (etwa Φ_{DLO}), oder sie sind nicht $\aleph_0$-kategorisch aber κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$ (etwa $\Phi_{\mathrm{aaK},p}$); ohne eine solche angeben zu wollen, bemerken wir, daß es vollständige Theorien Φ gibt, die in keiner unendlichen Kardinalität kategorisch sind. Diese vier Fälle sind die einzig möglichen:

18.30 Satz (Kategorizitätssatz von Morley[149]) *Sei L abzählbar und Φ eine vollständige L-Theorie. Dann gilt:*

$$\Phi \textit{ ist } \aleph_1\textit{-kategorisch} \longleftrightarrow \forall \kappa \geq \aleph_1 \ \Phi \textit{ ist } \kappa\textit{-kategorisch}.$$

Auf einen Beweis dieses Satzes müssen wir hier verzichten. Ein solcher findet sich z.B. in [4] oder [29].

18.6 Nichtstandard-Analysis.

Die Grundlagen der Analysis wurden im 17. Jahrhundert unabhängig von Newton[150] und Leibniz[151] gelegt. Bevor im 19. Jahrhundert eine den heutigen Anforderungen an „mathematische Strenge“ genügende Präzisierung der Infinitesimalrechnung von Weierstrass und anderen herausgebildet wurde, war es üblich, Grenzübergänge durch Argumentationen mit *infinitesimalen* Größen, also unendliche kleinen positiven reellen Zahlen durchzuführen, ohne Aussagen über deren Existenz zu machen. Ab dem 19. Jahrhundert wurden in der Folge die „infinitesimalen Größen“ aus der Mathematik verbannt. Mitte des 20. Jahrhunderts gelang es jedoch Abraham Robinson[152], die Theorie der unendliche kleinen Größen exakt zu formulieren und zu begründen. Die in diesem Sinn mit infinitesimalen Größen arbeitende Analysis wird *Nichtstandard-Analysis* genannt. Wir geben hier eine sehr knappe Einführung in dieses Gebiet. Mehr findet man z.B. in [22], [29] und [30].

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir sowohl die Menge als auch die Struktur des angeordneten Körpers der reellen Zahlen. Unser Ziel ist es darzustellen, wie die (erste) Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Nichtstandardmethoden gefunden werden kann. Hierzu seien zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Wir

---

[149] Michael Morley

[150] Issac Newton (25.12.1642 [julianischer Kalender = 4.1.1643 gregorianischer Kalender], Woolsthorpe–20.3.1727, London) 1661 Immatrikulation am Trinity College der Universität Cambridge; 1665 B.A.; 1669–1701 Professor in Cambridge; 1672 zum Mitglied der Royal Society gewählt; 1688/89 Parlamentsabgeordneter in London als Vertreter der Universität Cambridge; 1696-1703 zunächst Aufseher dann Direktor der Münze; 1699 Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften; ab 1703 Präsident der Royal Society. Als Physiker arbeitet Newton auf den Gebieten Farbenlehre, Optik (er konstruiert 1668 das erste Spiegelteleskop) und Mechanik. Durch physikalische Fragestellungen wird er auf die Infinitesimalrechnung geführt. Ein vom 20.5.1665 datiertes Papier Newtons enthält bereits die Grundlagen der Differentialrechnung. Neben Differentiation und Integration finden sich bei Newton auch Arbeiten über Reihenlehre, Interpolationstheorie und geometrische Fragestellungen.

[151] Gottfried Wilhelm Leibniz (21.7.1646 [julianischer Kalender = 1.6.1646 gregorianischer Kalender], Leipzig–14.11.1716, Hannover) 1661 Studium an der Universität Leipzig; 1664 Magister; 1666 Promotion (Rechtswissenschaften) in Altdorf; 1672–1676 in Paris in diplomatischem Auftrag des Mainzer Kurfürsten; 1676 Kustos an der Bibliothek des Kurfürsten von Hannover; ab 1700 in Berlin, dort Gründer der Preußischen Akademie der Wissenschaften; ab 1711 in Wien; 1714 Rückkehr nach Hannover. Für die Mathematik wird Leibniz 1672 in Paris durch Christiaan Huygens (14.4.1629, Den Haag–8.7.1695, Den Haag) interessiert. Leibniz’ Grundlegung der Infinitesimalrechnung ist im wesentlichen bereits in einem Manuskript aus dem Jahre 1675 enthalten, wird aber erst 1684 veröffentlicht. Die heute in der Analysis benutzten Schreibweisen und Bezeichnungen gehen größtenteils auf Leibniz zurück. Bei Leibniz finden sich auch erste Überlegungen zur formalen Logik.

[152] Abraham Robinson (6.10.1918, Waldenburg–11.4.1974, New Haven (Conn.)) Nach der Emigration nach Palästina 1936–1939 Studium der Mathematik in Jerusalem u.a. bei Abraham Fraenkel; 1939 zu einem Studienaufenthalt an der Sorbonne wird er 1940 nach England evakuiert, wo er an der Universität London weiterstudiert; 1941 Eintritt in die Freiwilligenverbände des Generals deGaulle, ab 1942 in der Britischen Luftwaffe; nach Kriegsende 1946–1951 am Cranfield College of Aeronautics; 1949 Erwerb des Ph.D. an der Universität London mit einer Arbeit zur Logik; 1952–1957 Professor für angewandte Mathematik an der Universität Toronto; 1957–1962 Professor für Mathematik an der Hebrew University Jerusalem, 1962–1967 an der California University in Los Angeles und ab 1967 an der Yale University in New Haven. Nach Arbeiten zur Aerodynamik (vorwiegend während seiner Militärzeit) wendet sich Robinson der Modelltheorie zu. Hier gilt sein Hauptinteresse der Verbindung von Algebra und Modelltheorie. So überträgt und verallgemeinert er den Begriff des „algebraischen Abschlusses“ auf Modellklassen und kommt so zum Begriff der „Modellvervollständigung“.

erweitern die Sprache L des angeordneten Körpers der reellen Zahlen um zwei Funktionssymbole $\dot{f}$ und $\dot{g}$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ um ein Konstantensymbol $\dot{r}$ zur Sprache L'.[153] Wir expandieren $\mathbb{R}$ auf kanonische Weise zu einer L'-Struktur $\mathbb{R}'$, indem wir $\dot{f}$ durch f, $\dot{g}$ durch g und $\dot{r}$ durch r interpretieren.[154] Das Nichtstandardmodell soll infinitesimale Größen enthalten. Um diese zu bekommen, wählen wir ein neues Konstantensymbol $\dot{\theta}$ und betrachten

$$\Phi \;:\equiv\; \mathrm{Th}(\mathbb{R}') \cup \{\dot{(}\dot{0}\dot{<}\dot{\theta} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\theta}\dot{<}\dot{r}\dot{)} \mid r \in \mathbb{R} \wedge 0 < r\}.$$

Jede endliche Teilmenge Φ' von Φ ist in einer Expansion von $\mathbb{R}'$ erfüllbar: jede solche Menge ist nämlich enthalten in einer Menge der Art

$$\Phi(I) \;:\equiv\; \mathrm{Th}(\mathbb{R}') \cup \{\dot{(}\dot{0}\dot{<}\dot{\theta} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\theta}\dot{<}\dot{r}\dot{)} \mid r \in I\},$$

wo I eine endliche Menge positiver, reeller Zahlen ist; interpretiert man $\dot{\theta}$ durch $\theta :\equiv \frac{1}{2} \cdot \min(I)$, so gilt $(\mathbb{R}', \theta) \models \Phi(I)$. Nach dem Endlichkeitssatz ist also Φ erfüllbar. Sei $(\mathbb{R}^*, \theta^*) \models \Phi$, wobei[155]

$$\mathbb{R}^* = \big(|\mathbb{R}^*|, <^*, +^*, \cdot^*, f^*, g^*, (r^* | r \in \mathbb{R})\big).$$

Es ist leicht zu sehen, daß durch $r \mapsto r^*$ eine Einbettung von $\mathbb{R}'$ in $\mathbb{R}^*$ gegeben ist,[156] so daß wir $\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}^*$ annehmen können. Aus der Definition von $\mathbb{R}^*$ folgt wegen $\theta^* \in |\mathbb{R}^*| \setminus |\mathbb{R}|$ dann sofort:

18.31 Lemma *$\mathbb{R}^*$ ist eine echte Erweiterung von $\mathbb{R}'$ zu einem angeordneter Körper.*

Da die Ordnungsrelation bzw. die arithmetischen Operationen von $\mathbb{R}^*$ Fortsetzungen der entsprechenden Relation und Operationen von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}'$) sind, schreiben wir für diese nunmehr wieder $<$, $+$ bzw. $\cdot$. Wir können die für $r \in \mathbb{R}$ definierte *Betragsfunktion*

$$|r| \;:\equiv\; \begin{cases} r; & \text{falls } 0 \le r, \\ -r; & \text{falls } r < 0, \end{cases}$$

nun mit derselben Definition auf $\mathbb{R}^*$ fortsetzen. Da die üblichen Rechenregeln für die Betragsfunktion aus deren Definition und den Axiomen der angeordneten Körpern folgen, gelten diese dann auch für die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^*$.

Die Analyse von $\mathbb{R}^*$ wird vereinfacht durch die in folgender Definition vereinbarten Sprechweisen:

18.32 Definition Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$.

(a) u ist **endlich** $:\equiv \exists r \in \mathbb{R}\ |u| < r$.

(b) Ist u endlich, so bezeichnet $\mathrm{st}(u) :\equiv \sup_{\mathbb{R}}\{r \in \mathbb{R} \mid r < u\}$ den **Standardteil** von u.[157]

(c) u ist **unendlich klein** (auch: **infinitesimal**) $:\equiv \mathrm{st}(u) = 0$.

(d) u, v sind **unendlich nahe** $:\equiv u \sim v :\equiv u - v$ ist unendlich klein.[158]

Der Leser zeigt leicht:

18.33 Lemma *Sei $u \in \mathbb{R}^*$. Dann gilt: u ist unendlich klein $\longleftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}\ (0 < r \to |u| < r)$.*

18.34 Lemma *(a) Sind u und v endlich, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.*

(b) Sind u und v unendlich klein, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.

[153] Der einfacheren Lesbarkeit wegen verzichten wir im folgenden auf die polnische Notation bei Termen und bezeichnen die Relations- bzw. Funktionssymbole von L auf suggestive Weise mit $\dot{<}$, $\dot{+}$ bzw. $\dot{\bullet}$.

[154] Die zusätzlichen Konstanten werden benötigt, um $\mathbb{R}'$ in das zu definierende Nichtstandardmodell einbetten zu können.

[155] Wir lassen bei den Strukturen jeweils die „Stellenzahlfunktion" weg. Auch werden wir im folgenden i.a. in der Schreibweise nicht mehr zwischen den Strukturen $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}'$ bzw. $\mathbb{R}^*$ und deren Trägermengen unterscheiden.

[156] Diese Einbettung ist sogar elementar!

[157] Das Supremum existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, da die fragliche Menge aufgrund der Endlichkeit von u einen Dedekindschen Schnitt in $\mathbb{R}$ definiert.

[158] Natürlich ist $u - v$ eine Abkürzung für $u + (-v)$, wobei $-v$ das additiv inverse Element zu v in $\mathbb{R}^*$ ist.

(c) Ist u endlich und v unendlich klein, so ist $u \cdot v$ unendlich klein.

(d) Ist $r \in \mathbb{R}$, so ist $\mathrm{st}(r) = r$; insbesondere ist r endlich.

Beweis. (a), (b) und (c) beweist man leicht m.H. der wohlbekannten Eigenschaften der Betragsfunktion. (d) folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. QED

18.35 Satz *Jedes endliche $u \in \mathbb{R}^*$ ist eindeutig darstellbar in der Form $u = r + h$, so daß $r \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*$ unendlich klein ist. Es ist dann $r = \mathrm{st}(u)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien also $u = r_1 + h_1$, $u = r_2 + h_2$ zwei derartige Darstellungen. Dann folgt mit Hilfe von 18.34: $r_1 - r_2 = \mathrm{st}(r_1 - r_2) = \mathrm{st}(h_2 - h_1) = 0$. Also $r_1 = r_2$, woraus auch $h_1 = h_2$ folgt.

Zum Nachweis der Existenz einer derartigen Darstellung genügt es zu zeigen, daß $h :\equiv u - \mathrm{st}(u)$ unendlich klein ist. Angenommen also, $\mathrm{st}(h) \neq 0$. Wir betrachten den Fall $\mathrm{st}(h) > 0$; den Fall $\mathrm{st}(h) < 0$ behandelt man analog. $\mathrm{st}(h) > 0$ impliziert die Existenz eines $r_0 > 0$ mit $r_0 \in \mathbb{R}$ und $r_0 < h$. Dann ist $\mathrm{st}(u) + r_0 < \mathrm{st}(u) + h = u$, also $\mathrm{st}(u) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid r < u\} \geq \mathrm{st}(u) + r_0 > \mathrm{st}(u)$, ein Widerspruch. Also ist h unendlich klein und der Satz ist bewiesen. QED

18.36 Corollar *Seien $u, v \in \mathbb{R}$ endlich. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{st}(u + v) = \mathrm{st}(u) + \mathrm{st}(v)$.

(b) $\mathrm{st}(u \cdot v) = \mathrm{st}(u) \cdot \mathrm{st}(v)$.

(c) $\mathrm{st}(-u) = -\mathrm{st}(u)$.

(d) Wenn $u \leq v$ so $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$.

(e) $|\mathrm{st}(u)| = \mathrm{st}(|u|)$.

Beweis. Sei $u = \mathrm{st}(u) + h_1$, $v = \mathrm{st}(v) + h_2$.

Von (a), (b) beweisen wir exemplarisch (b): es ist $u \cdot v = (\mathrm{st}(u) \cdot \mathrm{st}(v)) + (h_1 \cdot \mathrm{st}(v) + \mathrm{st}(u) \cdot h_2 + h_1 \cdot h_2)$. Da $h_1 \cdot \mathrm{st}(v) + \mathrm{st}(u) \cdot h_2 + h_1 \cdot h_2$ unendlich klein ist, siehe 18.34, muß $\mathrm{st}(u) \cdot \mathrm{st}(v) = \mathrm{st}(u \cdot v)$ sein.

(c) folgt sofort aus (a) mit $v :\equiv -u$.

Zu (d). Sei $u \leq v$. Wäre $r :\equiv \mathrm{st}(u) - \mathrm{st}(v) > 0$, so wäre $0 < r \leq h_2 - h_1$ im Widerspruch dazu, daß $h_2 - h_1$ unendlich klein ist. Also ist $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$.

Zu (e). Ist $u \geq 0$, so ist $\mathrm{st}(|u|) = \mathrm{st}(u) \geq \mathrm{st}(0) = 0$. Im Fall $u < 0$ ist $\mathrm{st}(|u|) = \mathrm{st}(-u) = -\mathrm{st}(u) \geq 0$. Hieraus ergibt sich aufgrund der Definition der Betragsfunktion die Behauptung. QED

Nach dieser kurzen Analyse von $\mathbb{R}^*$ beweisen wir das angekündigte Resultat über die Darstellung der Ableitung mit Nichtstandardmethoden.

18.37 Satz $$g = f' \iff \forall x \in \mathbb{R}\, \forall h \in \mathbb{R}^* \Big((h \sim 0 \land h \neq 0) \longrightarrow g^*(x) \sim \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h}\Big).$$

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, wie wir einige für die Analysis unverzichtbare Eigenschaften in der Sprache L_{aoK} der angeordneten Körper formalisieren.

Die Formel

$$\alpha(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_1 \doteq \dot{0}$$

formalisiert „$\dot{v}_1 = -\dot{v}_0$“. Die Formel

$$\mu(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{v}_0 \dot{\bullet} \dot{v}_1 \doteq \dot{1}$$

formalisiert „$\dot{v}_1 = \dot{v}_0^{-1}$“. Die Formel

$$\beta(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{\Big(}\dot{\big(}\dot{(}\dot{0} \dot{<} \dot{v}_0 \dot{\vee} \dot{0} \doteq \dot{v}_0\dot{)} \dot{\longrightarrow} \dot{v}_0 \dot{<} \dot{v}_1 \dot{\big)} \dot{\land} \dot{\big(} \dot{v}_0 \dot{<} \dot{0} \dot{\longrightarrow} \dot{\forall} \dot{v}_2 \dot{(} \underbrace{\dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_2 \doteq \dot{0}}_{\text{d.h. } \dot{v}_2 = -\dot{v}_0} \dot{\rightarrow} \dot{v}_2 < \dot{v}_1 \dot{)} \dot{\big)} \dot{\Big)}$$

formalisiert „$|\dot{v}_0| < \dot{v}_1$“. Betrachten wir nun die Formel

$$\Delta(\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{v}_3, \dot{v}_4) :\equiv \forall\dot{v}_5\forall\dot{v}_6\forall\dot{v}_7 \overset{\cdot}{\Big(}\overset{\cdot}{(}\alpha\frac{\dot{v}_1}{\dot{v}_0}\frac{\dot{v}_5}{\dot{v}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} \overset{\cdot}{(}\mu\frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_0}\frac{\dot{v}_6}{\dot{v}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} \alpha\frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_0}\frac{\dot{v}_7}{\dot{v}_1}\overset{\cdot}{)}\overset{\cdot}{)} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \beta\frac{(\dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_5) \bullet \dot{v}_6 \dot{+} \dot{v}_7}{\dot{v}_0}\frac{\dot{v}_4}{\dot{v}_1}\overset{\cdot}{\Big)}.$$

Dann gilt in jedem angeordneten Körper $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} \models \Delta[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \iff \left|\frac{a_0 - a_1}{a_2} - a_3\right| < a_4.$$

Nun können wir den Satz beweisen.
zu „$\Rightarrow$“. Sei $g = f'$. Fixiere $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*$ mit $h \sim 0$ und $h \neq 0$. Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} \sim g^*(x)$$

gilt, daß also für jedes $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ gilt:

$$\left|\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - g^*(x)\right| < \eta.$$

Fixiere also $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$. $g = f'$ ist gleichwertig mit der Aussage

$$\forall t \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \longrightarrow \left|\frac{f(t+\xi) - f(t)}{\xi} - g(t)\right| < \varepsilon \right). \tag{1}$$

Zu unserem vorgegebenen η existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$\forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \longrightarrow \left|\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - g(x)\right| < \eta \right). \tag{2}$$

Dies können wir in der Sprache L' ausdrücken: (2) ist gleichwertig mit

$$\mathbb{R}' \models \dot{\forall}\xi \,\overset{\cdot}{\Big(}\overset{\cdot}{(}\beta\frac{\xi}{\dot{v}_0}\frac{\dot{\delta}}{\dot{v}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\neg}\, \xi \doteq \dot{0}\overset{\cdot}{)} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \Delta\frac{\dot{f}(\dot{x} \dot{+} \xi)}{\dot{v}_0}\frac{\dot{f}(\dot{x})}{\dot{v}_1}\frac{\xi}{\dot{v}_2}\frac{\dot{g}(\dot{x})}{\dot{v}_3}\frac{\dot{\eta}}{\dot{v}_4}\overset{\cdot}{\Big)}.$$

Also gilt

$$\dot{\forall}\xi \,\overset{\cdot}{\Big(}\overset{\cdot}{(}\beta\frac{\xi}{\dot{v}_0}\frac{\dot{\delta}}{\dot{v}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\neg}\, \xi \doteq \dot{0}\overset{\cdot}{)} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \Delta\frac{\dot{f}(\dot{x} \dot{+} \xi)}{\dot{v}_0}\frac{\dot{f}(\dot{x})}{\dot{v}_1}\frac{\xi}{\dot{v}_2}\frac{\dot{g}(\dot{x})}{\dot{v}_3}\frac{\dot{\eta}}{\dot{v}_4}\overset{\cdot}{\Big)} \in \mathrm{Th}(\mathbb{R}'),$$

woraus wegen $\mathbb{R}^* \models \mathrm{Th}(\mathbb{R}')$ folgt

$$\mathbb{R}^* \models \dot{\forall}\xi \,\overset{\cdot}{\Big(}\overset{\cdot}{(}\beta\frac{\xi}{\dot{v}_0}\frac{\dot{\delta}}{\dot{v}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} \dot{\neg}\, \xi \doteq \dot{0}\overset{\cdot}{)} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \Delta\frac{\dot{f}(\dot{x} \dot{+} \xi)}{\dot{v}_0}\frac{\dot{f}(\dot{x})}{\dot{v}_1}\frac{\xi}{\dot{v}_2}\frac{\dot{g}(\dot{x})}{\dot{v}_3}\frac{\dot{\eta}}{\dot{v}_4}\overset{\cdot}{\Big)}. \tag{3}$$

(Derartige Beweisschritte werden oft *Transfer vom Standard- zum Nichtstandardmodell* genannt.) (3) bedeutet

$$\forall \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \longrightarrow \left|\frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x)\right| < \eta \right).$$

Speziell folgt für $\xi :\equiv h$:

$$\left|\frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - g^*(x)\right| < \eta,$$

und dies war zu zeigen.
zu „$\Leftarrow$“. Sei $g \neq f'$. Dann gilt die Negation von (1), so daß $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existieren mit

$$\forall \delta > 0\, \exists \xi \left((|\xi| < \delta \wedge \xi \neq 0) \wedge \left|\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - g(x)\right| \geq \varepsilon \right).$$

Dies bedeutet

$$\mathbb{R}' \models \dot{\forall}\delta \dot{\Big(} \dot{0} \dot{<} \delta \dot{\longrightarrow} \exists \xi \;\dot{\Big(}\dot{(}\beta \frac{\xi}{\dot{v}_0} \frac{\dot{\delta}}{\dot{v}_1} \dot{\wedge} \dot{\neg}\, \xi \doteq \dot{0}\dot{)} \dot{\wedge} \dot{\neg}\, \Delta \frac{\dot{f}(\dot{x}\dot{+}\xi)}{\dot{v}_0} \frac{\dot{f}(\dot{x})}{\dot{v}_1} \frac{\xi}{\dot{v}_2} \frac{\dot{g}(\dot{x})}{\dot{v}_3} \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{v}_4} \dot{\Big)} \dot{\Big)}.$$

Wir transferieren diese Aussage wie im „⇒“-Teil in das Nichtstandardmodell und erhalten

$$\forall \delta > 0\, \exists \xi \left((|\xi| < \delta \,\wedge\, \xi \neq 0) \,\wedge\, \left| \frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x) \right| \geq \varepsilon \right).$$

Hier setzen wir $\delta :\equiv \theta^*$ und erhalten ein $\xi \in \mathbb{R}^*$ mit $0 < |\xi| < \delta$ und

$$\left| \frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} - g^*(x) \right| \geq \varepsilon.$$

Dann ist

$$\frac{f^*(x+\xi) - f^*(x)}{\xi} \not\sim g^*(x);$$

aus $0 < |\xi| < \theta^*$ folgt außerdem $\xi \neq 0$ und $0 \leq |\mathrm{st}(\xi)| = \mathrm{st}(|\xi|) \leq \mathrm{st}(|\theta^*|) = 0$, also $\xi \sim 0$.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer Anwendung des letzten Satzes.

18.38 Beispiel Für $0 < n < \omega$ ist $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, denn für $h \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ mit $h \sim 0$ gilt

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} + \underbrace{h \cdot \sum_{k=2}^{n} x^{n-k} h^{k-2}}_{\sim 0}.$$

19 Ultraprodukte.

Wir fixieren eine Sprache $L = (I, J, K, t)$ und eine nicht-leere Menge S. Für jedes $s \in S$ sei eine L-Struktur $\mathfrak{A}_s$ gegeben. Wir konstruieren eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, in der genau diejenigen durch L-Sätze ausdrückbaren Eigenschaften gelten, die in „fast allen“ $\mathfrak{A}_s$ gelten. Dies präzisieren wir wie folgt: es sei U ein Ultrafilter auf S.[159] Die zu konstruierende Struktur soll dann für alle $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ erfüllen:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \{s \in S \,|\, \mathfrak{A}_s \models \varphi\} \in U.$$

Wir beginnen unsere Konstruktion mit der Definition einer Relation $\sim$ auf $B :\equiv \times_{s \in S} A_s$[160] durch

$$f \sim g :\equiv \{s \in S \,|\, f(s) = g(s)\} \in U.$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf B: es ist $f \sim f$ wegen $S \in U$; gilt $\{s \in S \,|\, f(s) = g(s)\} \in U$ und $\{s \in S \,|\, g(s) = h(s)\} \in U$, so ist $\{s \in S \,|\, f(s) = h(s)\} \supset \{s \in S \,|\, f(s) = g(s)\} \cap \{s \in S \,|\, g(s) = h(s)\} \in U$, also auch $\{s \in S \,|\, f(s) = h(s)\} \in U$, so daß $\sim$ transitiv ist; die Symmetrie von $\sim$ ist klar. Wir bezeichnen mit $[f]$ die $\sim$-Äquivalenzklasse von $f \in B$. Der Träger unseres gesuchten Modelles wird

$$A :\equiv B/\sim\, :\equiv \{[h] \,|\, h \in B\}.$$

[159] Wir erinnern daran, daß man intuitiv einen Ultrafilter auffassen kann als Kriterium dafür, ob eine Menge $x \subset S$ eine „große Menge“ ($x \in U$) oder eine „kleine Menge“ ($S \setminus x \in U$) ist.

[160] Natürlich ist $A_s :\equiv |\mathfrak{A}_s|$.

Wir definieren auf A eine L-Struktur wie folgt:

$$R_i\left([h_0]\dots\left[h_{t(i)-1}\right]\right) :\equiv \left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(i)-1}(s)\right)\right\}\in U; \tag{i}$$

$$f_j\left([h_0]\dots\left[h_{t(j)-1}\right]\right) :\equiv \left[\left(\dot f_j^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s)\dots h_{t(j)-1}(s)) \;\middle|\; s\in S\right)\right]; \tag{j}$$

$$c_k :\equiv \left[\left(\dot c_k^{\mathfrak{A}_s} \;\middle|\; s\in S\right)\right]. \tag{k}$$

Um zu beweisen, daß (i) und (j) wohldefiniert sind, müssen wir zeigen, daß die Definitionen nur von den jeweiligen Äquivalenzklassen und nicht von den jeweils gewählten Repräsentanten abhängen.

Zunächst untersuchen wir (i). Wir setzen $n :\equiv t(i)-1$ und betrachten $(h_0,\dots,h_n),(h_0',\dots,h_n')\in A^n$ mit $h_l\sim h_l'$ für $l\le n$. Um die Wohldefiniertheit von (i) zu verifizieren, ist

$$\left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(i)-1}(s)\right)\right\}\in U \iff \left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0'(s)\dots h_{t(i)-1}'(s)\right)\right\}\in U$$

zu beweisen. Aus Symmetriegründen genügt es, „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Gelte also

$$\left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(i)-1}(s)\right)\right\}\in U.$$

Dann ist

$$\left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0'(s)\dots h_{t(i)-1}'(s)\right)\right\}\supset \underbrace{\left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(i)-1}(s)\right)\right\}\cap\bigcap_{l\le n}\underbrace{\left\{s\in S \;\middle|\; h_l(s)=h_l'(s)\right\}}_{\in U\text{ wegen }h_l\sim h_l'}}_{\in U,\text{ da }U\ \aleph_0-\text{vollständig}},$$

also $\left\{s\in S \;\middle|\; \dot R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0'(s)\dots h_{t(i)-1}'(s)\right)\right\}\in U$, da U gegen Obermengenbildung abgeschlossen ist.

Nun untersuchen wir (j). Wir setzen $n :\equiv t(j)-1$ und betrachten $(h_0,\dots,h_n)\in A^n$ und $(h_0',\dots,h_n')\in A^n$ mit $h_l\sim h_l'$ für $l\le n$. Um die Wohldefiniertheit von (j) zu verifizieren, ist

$$\left(\dot f_j^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(j)-1}(s)\right) \;\middle|\; s\in S\right)\sim\left(\dot f_j^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0'(s)\dots h_{t(j)-1}'(s)\right) \;\middle|\; s\in S\right)$$

zu zeigen. Wegen

$$\left\{s\in S \;\middle|\; \dot f_j^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s)\dots h_{t(j)-1}(s)\right)=\dot f_j^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0'(s)\dots h_{t(j)-1}'(s)\right)\right\}\supset\bigcap_{l\le n}\left\{s\in S \;\middle|\; h_l(s)=h_l'(s)\right\}\in U$$

folgt dieses sofort aus der Abgeschlossenheit von U gegen Obermengenbildung und der Definition von $\sim$.

Damit ist die Konstruktion der L-Struktur $\mathfrak{A}$ abgeschlossen.

19.1 Definition Die oben konstruierte L-Struktur heißt das **Ultraprodukt** der $(\mathfrak{A}_s \mid s\in S)$ über U und wird mit $\prod_{s\in S}\mathfrak{A}_s\,/\,U$ bezeichnet. Sind alle $\mathfrak{A}_s$ gleich einer L-Struktur $\mathfrak{B}$, so schreiben wir $\mathfrak{B}^S\,/\,U$ und sprechen von der **Ultrapotenz** von $\mathfrak{B}$ über U.

Der nächste Satz zeigt, wie sich die (Interpretationen der) Terme im Ultraprodukt berechnen und welche elementaren Eigenschaften in dieser Struktur gelten:

19.2 Satz (Satz von Łoś[161]) *Sei* $\mathfrak{A} :\equiv \prod_{s\in S}\mathfrak{A}_s\,/\,U$.

(a) *Sei* $r(x_0,\dots,x_n)\in\mathrm{Tm}(L)$ *und seien* $[h_1],\dots,[h_n]\in A$. *Dann gilt*

$$r^{\mathfrak{A}}\left[[h_1],\dots,[h_n]\right]=\left[\left(r^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\dots,h_n(s)] \;\middle|\; s\in S\right)\right].$$

[161] Jerzy Łoś

(b) Sei $\varphi(x_0,\ldots,x_n) \in \mathrm{Fml}(L)$ *und seien* $[h_1],\ldots,[h_n] \in A$*. Dann gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big] \;\longleftrightarrow\; \big\{s \in S \;\big|\; \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \in U.$$

Beweis. zu (a). Wir führen eine Induktion über den Termaufbau durch.
Fall 1. $r = \dot{v}_n$ für ein $n < \omega$. Dann gilt für jedes $[h] \in A$:

$$\Big[\Big(r^{\mathfrak{A}_s}[h(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\Big] = \big[\big(h(s) \mid s \in S\big)\big] = [h] = r^{\mathfrak{A}}\big[[h]\big].$$

Fall 2. $r = \dot{c}_k$ für ein $k \in K$. Dann gilt:

$$\Big[\Big(r^{\mathfrak{A}_s} \;\Big|\; s \in S\Big)\Big] = \Big[\Big(\dot{c}_k^{\mathfrak{A}_s} \;\Big|\; s \in S\Big)\Big] = c_k = r^{\mathfrak{A}}.$$

Fall 3. $r = \dot{f}_j r_0 \ldots r_{t(j)-1}$, wobei für $r_0,\ldots,r_{t(j)-1} \in \mathrm{Tm}(L)$ bereits die Gültigkeit von (a) bekannt ist. Dann gilt für alle $[h_1],\ldots,[h_n] \in A$:

$$\begin{aligned}
r^{\mathfrak{A}}\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big] &= f_j\Big(r_0^{\mathfrak{A}}\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big],\ldots,r_{t(j)-1}^{\mathfrak{A}}\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big]\Big)\\
&\overset{\text{Vor.}}{=} f_j\Big(\Big[\big(r_0^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \mid s \in S\big)\Big],\ldots,\Big[\big(r_{t(j)-1}^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \mid s \in S\big)\Big]\Big)\\
&\overset{\text{Def.}}{=} \Big[\Big(\dot{f}_j^{\mathfrak{A}_s}\big(r_0^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)],\ldots,r_{t(j)-1}^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big) \;\Big|\; s \in S\Big)\Big]\\
&= \Big[\Big(\big(\dot{f}_j r_0 \ldots r_{t(j)-1}\big)^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\cdots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\Big]\\
&= \Big[\Big(r^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Wir führen eine Induktion über den Formelaufbau durch.
Fall 1. $\varphi \in \mathrm{At}(L)$. Dann tritt einer der folgenden zwei Fälle ein:
Fall 1.1. $\varphi = r_1 \doteq r_2$, wobei $r_1, r_2 \in \mathrm{Tm}(L)$. Mit (a) folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big] &\iff r_1^{\mathfrak{A}}\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big] = r_2^{\mathfrak{A}}\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big]\\
&\overset{(a)}{\iff} \Big[\Big(r_1^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\Big] = \Big[\Big(r_2^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\Big]\\
&\iff \Big(r_1^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big) \sim \Big(r_2^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] \;\Big|\; s \in S\Big)\\
&\iff \Big\{s \in S \;\Big|\; r_1^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)] = r_2^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\Big\} \in U\\
&\iff \Big\{s \in S \;\Big|\; \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\Big\} \in U.
\end{aligned}$$

Fall 1.2. $\varphi = \dot{R}_i r_0 \ldots r_{t(i)-1}$. Diesen Fall behandelt man analog.
Damit ist (b) für atomare Formeln bewiesen.
Fall 2. $\varphi = \dot{\neg}\psi$ und (b) gilt für ψ. Da U ein Ultrafilter ist, gilt

(1) $\quad \big\{s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \notin U \iff \big\{s \in S \mid \neg\, \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \in U.$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big] &\iff \neg\, \mathfrak{A} \models \psi\big[[h_1],\ldots,[h_n]\big]\\
&\overset{\text{Vor.}}{\iff} \big\{s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \notin U\\
&\overset{(1)}{\iff} \big\{s \in S \mid \neg\, \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \in U\\
&\iff \big\{s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s),\ldots,h_n(s)]\big\} \in U.
\end{aligned}$$

Fall 3. $\varphi = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}$ und (b) gilt für ψ und χ. Da U als Filter gegen Schnitte und Obermengenbildung abgeschlossen ist, gilt für je zwei Teilmengen x, y von S:

(2) $(x \in U \wedge y \in U) \iff x \cap y \in U$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_1], \dots, [h_n]\big] &\iff \mathfrak{A} \models \psi\big[[h_1], \dots, [h_n]\big] \wedge \mathfrak{A} \models \chi\big[[h_1], \dots, [h_n]\big] \\
&\overset{\text{Vor.}}{\iff} \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\qquad \wedge \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \chi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\overset{(2)}{\iff} \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \\
&\qquad \cap \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \chi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\iff \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)] \wedge \mathfrak{A}_s \models \chi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\iff \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \varphi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U.
\end{aligned}$$

Fall 4. $\varphi = \dot\forall x\, \psi$ und (b) gilt für ψ. Der Schlüsselschritt des Beweises in diesem Fall ist:

(3) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\forall\, [h] \in A\ \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h(s), h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U$;

(ii) $\big\{s \in S \bigm| \forall a \in A_s\ \mathfrak{A}_s \models \psi\,[a, h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U$.

Beweis. „(i)⇒(ii)". Angenommen, die Menge aus (ii) ist nicht in U. Da U ein Ultrafilter ist, ist dann $Z :\equiv \big\{s \in S \bigm| \exists a \in A_s\ \neg\mathfrak{A}_s \models \psi\,[a, h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U$. Definiere m.H. von **(AC)** eine Funktion $h\colon S \to \bigcup_{s\in S} A_s$ durch

$$h(s) :\equiv \begin{cases} \text{ein } a \in A_s \text{ mit } \neg\mathfrak{A}_s \models \psi\,[a, h_1(s), \dots, h_n(s)]\,, & \text{falls } s \in Z; \\ \text{ein beliebiges } a \in A_s, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $Z \subset \big\{s \in S \bigm| \neg\mathfrak{A}_s \models \psi\,[h(s), h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\}$ ist $\big\{s \in S \bigm| \neg\mathfrak{A}_s \models \psi\,[h(s), h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U$. Nach Voraussetzung liegt aber das Komplement dieser Menge in U. Also muß die Menge aus (ii) doch in U sein.

„(ii)⇒(i)". Sei $h \in \times_{s\in S} A_s$ beliebig. Wegen

$$\big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h(s), h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \supset \big\{s \in S \bigm| \forall a \in A_s\ \mathfrak{A}_s \models \psi\,[a, h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\}$$

ist mit der rechts stehenden Menge ist auch die links stehende in U. qed(3)

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_1], \dots, [h_n]\big] &\iff \forall a \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\big[a, [h_1], \dots, [h_n]\big] \\
&\iff \forall\, [h] \in A\ \mathfrak{A} \models \psi\big[[h], [h_1], \dots, [h_n]\big] \\
&\overset{\text{Vor.}}{\iff} \forall\, [h] \in A\ \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \psi\,[h(s), h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\overset{(3)}{\iff} \big\{s \in S \bigm| \forall a \in A_s\ \mathfrak{A}_s \models \psi\,[a, h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U \\
&\iff \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \varphi\,[h_1(s), \dots, h_n(s)]\big\} \in U.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Für L-Sätze folgt aus dem Theorem von Łoś sofort, daß im Ultraprodukt genau diejenigen Eigenschaften erfüllt sind, die in „fast allen"Faktoren gelten:

19.3 Corollar *Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$. Dann gilt: $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \models \varphi \iff \big\{s \in S \bigm| \mathfrak{A}_s \models \varphi\big\} \in U$.*

Im Fall einer Ultrapotenz können wir das Ausgangsmodell in die Potenz elementar einbetten:

19.4 Corollar *Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur. Dann ist durch $\iota(b) :\equiv [(b|s \in S)]$ eine elementare Einbettung $\iota\colon \mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^S \,/\, U$ gegeben.*

Beweis. Sei $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann gilt für alle $b_1,\ldots,b_n \in |\mathfrak{B}|$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n] &\iff \big\{s \in S \;\big|\; \mathfrak{B} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n]\big\} \in U \quad \text{(da diese Menge } \in \{\emptyset, S\} \text{ ist)}\\ &\overset{\text{Łoś}}{\iff} \mathfrak{B}^S \,/\, U \models \big[\iota(b_1),\ldots,\iota(b_n)\big].\end{aligned}$$

Dies bedeutet gerade $\iota\colon \mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^S \,/\, U$. QED

Bei einem Ultra*produkt* müssen die einzelnen Faktoren nicht notwendig elementare Substrukturen des Ultraprodukts sein. I.a. sind sie zu diesem noch nicht einmal elementar äquivalent, wie das folgende Beispiel zeigt.

19.5 Beispiel Sei F der Filter der coendlichen Teilmengen der Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen und $U \supset F$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{P}$. Für $p \in \mathbb{P}$ sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen (also $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Sei $\mathbb{F} :\equiv \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{F}_p \,/\, U$. Dann ist $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik 0, da für jedes $p \in \mathbb{P}$ gilt $\{q \in \mathbb{P} \,|\, \mathbb{F}_q \models \dot\neg\, C_p\} = \mathbb{P} \setminus \{p\} \in U$.[162]

Aus dem Theorem von Łoś folgt, daß Hauptultrafilter für Ultraproduktkonstruktionen uninteressant sind:

19.6 Corollar *Ist U ein Hauptultrafilter, $U = \{x \subset S \,|\, s_0 \in x\}$, so ist $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \cong \mathfrak{A}_{s_0}$.*

Beweis. Wenn U ein Hauptultrafilter ist, gilt $f \sim g \iff f(s_0) = g(s_0)$ für alle $f, g \in \times_{s\in S} A_s$. Man sieht leicht, daß durch $[h] \mapsto h(s_0)$ ein Isomorphismus von $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U$ auf $\mathfrak{A}_{s_0}$ definiert ist. QED

Wir untersuchen abschließend einige Anwendungen für Ultraproduktkonstruktionen. Als erstes werfen wir nochmals einen Blick auf den Kompaktheitssatz 17.30, den wir unter Rückgriff auf den Endlichkeitssatz 17.5 für die Ableitbarkeitsrelation $\vdash$ eines vollständigen, korrekten Kalküls bewiesen haben. Da in der Aussage des Kompaktheitssatzes nicht auf einen derartigen Kalkül Bezug genommen wird, kann man erwarten, einen Beweis für diesen Satz zu finden, der ohne einen solchen Rückgriff auskommt. Mit Hilfe einer Ultraproduktkonstruktion ist dies in der Tat möglich:

19.7 Satz *Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ und jede endliche Teilmenge $s \subset \Phi$ habe ein Modell $\mathfrak{A}_s$. Dann existiert auf $S :\equiv \{s \subset \Phi \,|\, \overline{\overline{s}} < \aleph_0\}$ ein Ultrafilter U, so daß $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U$ ein Modell von Φ ist. Dies impliziert: ist Φ endlich erfüllbar, so ist Φ erfüllbar* **(Kompaktheitssatz)**.

Beweis. Für $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ sei $\langle\varphi\rangle :\equiv \{s \in S \,|\, \varphi \in s\}$. Dann hat $E :\equiv \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi \in \Phi\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft,[163] da $\bigcap_{i<n} \langle\varphi_i\rangle \ni \{\varphi_i \,|\, i < n\}$. Sei $U \supset E$ ein Ultrafilter auf S, vgl. 12.12. Ist dann $\varphi \in \Phi$, so ist $\mathfrak{A}_s \models \varphi$ für jedes $s \in S$ mit $\varphi \in s$, also für jedes $s \in \langle\varphi\rangle$. Somit ist $\{s \in S \,|\, \mathfrak{A}_s \models \varphi\} \supset \langle\varphi\rangle$, und wegen $\langle\varphi\rangle \in U$ folgt $\{s \in S \,|\, \mathfrak{A}_s \models \varphi\} \in U$, d.h., $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \models \varphi$. Dies war zu zeigen. QED

Als weitere Anwendung stellen wir Kriterien dafür vor, ob eine Klasse von L-Strukturen Δ-elementar bzw. elementar ist.

19.8 Satz *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{K}$ ist genau dann Δ-elementar, wenn $\mathcal{K}$ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen ist.*

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L(\Phi)$. Ist dann $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so gilt $\mathfrak{B} \models \Phi$, also $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Ist S eine Menge, U ein Ultrafilter auf S und ist für jedes $s \in S$ $\mathfrak{A}_s \in \mathcal{K}$, so gilt $\mathfrak{A}_s \models \Phi$ für alle $s \in S$, so daß nach Satz von Łoś auch $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \models \Phi$, also $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \in \mathcal{K}$ gilt. Folglich ist $\mathcal{K}$ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen.

zu „$\Leftarrow$“. Setze $\Phi :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L) \,|\, \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\ \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Dann ist $\mathcal{K} \subset \mathrm{Mod}^L(\Phi)$. Um $\mathrm{Mod}^L(\Phi) \subset \mathcal{K}$ zu zeigen, fixieren wir ein beliebiges $\mathcal{B} \in \mathrm{Mod}^L(\Phi)$. Sei $\Psi :\equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$. Sei $S :\equiv \{s \subset \Psi \,|\, \overline{\overline{s}} < \aleph_0\}$.

[162] Zur Erinnerung: $C_p = \sum_{i<p} \dot 1 \doteq \dot 0$ legt in der Gegenwart der Theorie $\Phi_{\text{Körper}}$ Charakteristik p fest.

[163] siehe 12.11.

(1) $\forall s \in S\, \exists \mathfrak{A}_s \in \mathcal{K}\; \mathfrak{A}_s \models s.$

Beweis. Wäre das nicht der Fall, gäbe es ein $s_0 \in S$, so daß $\mathfrak{A} \models \dot{\neg} \bigwedge s_0$[164] für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ gilt. Hieraus folgt $\dot{\neg} \bigwedge s_0 \in \Phi$, also $\mathfrak{B} \models \dot{\neg} \bigwedge s_0$. Wegen $s_0 \subset \Psi = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ gilt aber andererseits $\mathfrak{B} \models \bigwedge s_0$. Der Widerspruch zeigt, daß (1) doch richtig sein muß. qed(1)

Wegen (1) folgt aus 19.8 die Existenz eines Ultrafilters U auf S, so daß $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \models \Psi$ gilt. Da $\mathcal{K}$ gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen ist, folgt $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U \in \mathcal{K}$. Wegen $\Psi = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ sind ferner $\mathfrak{B}$ und $\prod_{s\in S} \mathfrak{A}_s \,/\, U$ elementar äquivalent. Da $\mathcal{K}$ bzgl. elementarer Äquivalenz abgeschlossen ist, folgt $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, und dies war zu zeigen. QED

Da nach 18.4 eine Modellklasse genau dann elementar ist, wenn sie und ihr Komplement Δ-elementar sind, folgt sofort:

19.9 Corollar *Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen ist genau dann elementar, wenn sowohl $\mathcal{K}$ als auch ihr Komplement*

$$\mathcal{K}^* :\equiv \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$$

bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen sind.

[164] Zur Definition von $\bigwedge s_0$: in 14.34 haben wir für endliche Folgen $(\varphi_i | i < n)$ von Formeln $\bigwedge_{i<n} \varphi_i$ definiert. Ist $\overline{\overline{s}} = n$, so wählen wir eine Funktion $\varphi\colon n \xrightarrow{bij.} s_0$ und setzen $\bigwedge s_0 :\equiv \bigwedge_{i<n} \varphi(i)$.

Teil III.
Axiomatische Mengenlehre.

20 Mengentheoretische Axiomensysteme.

Das Axiomensystem **ZFC** entstand in einer geschichtlichen Entwicklung, die am Ende des neunzehnten Jahrhunderts begann und im ersten Drittel des zwanzigsten Jahrhunderts ihr Ende fand. Zugleich entstanden konkurrierende Axiomensysteme, die wie **ZFC** der Mengenlehre ein formales Gewandt geben wollen.

Der erste Versuch, der von CANTOR begründeten Mengenlehre einen formalen Rahmen zu geben, geht auf GOTTLOB FREGE[165] zurück. Sein System enthält insbesondere das Aussonderungsprinzip in seiner allgemeinen Form: zu jeder Eigenschaft gibt es eine Menge, die alle diejenigen Mengen enthält, die dieser Eigenschaft genügen. Von FREGEs System ausgehend findet RUSSELL im Jahre 1901 die nach ihm benannte Antinomie,[166] die FREGEs System als widerspruchsvoll, also für den Aufbau der Mengenlehre nicht geeignet identifiziert. Um diesem Mißstand abzuhelfen, entwickelt RUSSELL zu Beginn dieses Jahrhunderts die sogenannte *Typentheorie*. Im Kontext der Typentheorie ist jeder Menge x eine Ordinalzahl n zugeordnet, die man den Typ von x nennt. Eine Relation $x \in y$ kann nur bestehen, wenn der Typ von x um genau 1 niedriger ist als der Typ von y. Die RUSSELLsche Antinomie kann in diesem System (zumindest ad hoc) nicht mehr nachvollzogen werden. Da die Typentheorie ein recht schwerfälliges und unhandliches Werkzeug ist, wurde die Suche nach einer typenfreien Axiomatisierung fortgesetzt.[167] Das erste brauchbare Axiomensystem dieser Art entwickelt ZERMELO in den Jahren 1904–1908. Es wird in den folgenden Jahren durch FRAENKEL, SKOLEM und MIRIMANOFF zu dem System erweitert, das wir heute **ZFC** nennen.

Da **ZFC** nur eine eingeschränkte Version des Aussonderungsprinzips umfaßt, läßt sich in diesem System die RUSSELLsche Antinomie (zumindest ad hoc) nicht nachvollziehen. Andererseits möchte man aber intuitiv davon ausgehen, daß die Zusammenfassung aller Mengen, die eine gewisse Eigenschaft erfüllen, ein gewisses „mathematisches Objekt“ ist. Diesem Umstand trägt das System **NBG** Rechnung, das auf JOHN VON NEUMANN, ISAAK BERNAYS und KURT GÖDEL zurückgeht. Die „mathematischen Objekte“ der **NBG**-Mengenlehre sind Klassen. Mengen sind hier spezielle Klassen, nämlich diejenigen, die Elemente einer Klasse sind. Wir skizzieren kurz den Aufbau von **NBG**. Die Axiome von **NBG** formulieren wir in einer Sprache mit genau einem zweistelligen Relationssymbol $\in$; die Variablen dieser Sprache bezeichnen wir mit Großbuchstaben. Hiermit bauen wir analog zur Definition der $\in$-Formeln[168] die Formeln der **NBG**-Mengenlehre auf. Die Formel $M(X) :\equiv \exists Y\, X \in Y$ besagt dann gerade, daß X eine Menge ist. Wir vereinbaren: die Formel $M(X)$ sei stets so gebildet, daß ihre gebundene Variable von ihrer freien Variablen verschieden ist. Abkürzend schreiben wir $\forall v\, \varphi$ für $\forall V\, (M(V) \to \varphi)$ und $\exists v\, \varphi$ für $\exists V\, (M(V) \wedge \varphi)$. Kleinbuchstaben bezeichnen also „Mengenvariablen“. Eine Formel, in der alle gebundenen Variablen Mengenvariablen sind, heißt auch **prädikative Formel**; prädikative Formeln formalisieren also diejenigen Eigenschaften, die man als „Eigenschaften von Mengen“ bezeichnen kann. In **NBG** zerfällt das Aussonderungsprinzip in zwei Teile: zum einen in den Prozeß des eigentlichen Aussonderns und zum anderen in den Prozeß des Bildens einer Menge. Der erste Teil wird formalisiert durch das

> **Komprehensionsschema**: Für jede prädikative Formel $\varphi(U, X_1, \ldots, X_n)$ enthält **NBG** das Axiom $\forall X_1, \ldots, X_n\, \exists Z\, \forall u\, \big(u \in Z \longleftrightarrow \varphi(u, X_1, \ldots, X_n)\big)$.
> In Worten: Zu jeder prädikativen Eigenschaft existiert eine Klasse, die genau diejenigen Mengen enthält, die dieser Eigenschaft genügen.

Der zweite Teil wird formalisiert durch das

> **Aussonderungsaxiom**: $\forall Y\, \forall x\, \exists z\, \forall u\, \big(u \in z \longleftrightarrow (u \in x \,\wedge\, u \in Y)\big)$.

[165] FRIEDRICH LUDWIG GOTTLOB FREGE (8.11.1848, Wismar–26.7.1925, Bad Kleinen) 1869–1873 Studium der Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie zunächst in Jena, ab 1871 in Göttingen, dort Promotion; 1874 Habilitation in Jena, hier danach Privatdozent, ab 1880 außerordentlicher Professor und von 1896 bis 1918 Honorarprofessor (Besoldung durch die Carl-Zeiss-Stiftung) für Mathematik. Obwohl FREGE kaum Vorlesungen über Logik abhält, beschäftigt er sich mit ihr intensiv mit dem Ziel, rein logische Beweisführungen für mathematische Theoreme zu finden. So wird er zum Begründer der modernen Prädikatenlogik.

[166] vgl. Seite 23.

[167] Die Typentheorie ist aber nicht ohne Bedeutung für Logik und Mengenlehre. Sie liegt z.B. der Argumentation GÖDELs in seinem Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes zu Grunde.

[168] siehe 2.1.

In Worten: Sondert man aus einer Klasse die Elemente einer Menge aus, so bilden die ausgesonderten Elemente eine Menge.

Des weiteren enthält **NBG** die Mengenaxiome **Paarmengenaxiom**, **Vereinigungsmengenaxiom**, **Unendlichkeitsaxiom** und **Auswahlaxiom**, die wir aufgrund unserer Konvention über Mengenvariablen analog zu den entsprechenden **ZFC**-Axiomen formulieren können. Neben dem **Komprehensionsschema** und dem **Aussonderungsaxiom** enthält **NBG** noch die drei folgenden Klassenaxiome:

(a) **Extensionalitätsaxiom**: $\forall X, Y \left(X = Y \longleftrightarrow \forall u \,(u \in X \leftrightarrow u \in Y)\right)$.
In Worten: Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Mengen als Elemente besitzen.

(b) **Ersetzungsaxiom**:[169]
$$\forall F\, \forall x\, \exists z \Big(\forall u, v, v', w, w' \big((w = (u,v) \,\wedge\, w' = (u,v') \,\wedge\, w \in F \,\wedge\, w' \in F) \to w = w'\big)$$
$$\longrightarrow \forall v \big(v \in z \leftrightarrow \exists u \,(u \in x \,\wedge\, \exists w \,(w = (u,v) \,\wedge\, w \in F))\big)\Big).$$
In Worten: Das Bild einer jeden Menge unter einer funktionalen Klasse ist eine Menge.

(c) **Fundierungsaxiom**: $\forall A \Big(\exists x\, x \in A \longrightarrow \exists x \left(x \in A \,\wedge\, \forall y \,(y \in x \to y \notin A)\right)\Big)$.
In Worten: Jede nicht-leere Klasse hat ein $\in$-minimales Element.

Vergleichen wir **NBG** mit **ZFC**, so fällt die geringe Anzahl an Schemata in **NBG** auf. Da wir in **ZFC** nicht über Klassen quantifizieren können, muß hier jede Aussage über alle Klassen als Liste von Aussagen über gewisse $\in$-Formeln geschrieben werden; dieser Umweg über die Metasprache ist in **NBG** i.a. nicht notwendig, da Klassenquantoren möglich sind. **NBG** hat lediglich ein Schema unter seinen Axiomen. Auch dieses läßt sich aber eliminieren: man kann zeigen, daß **NBG** endlich axiomatisierbar ist. Dies unterscheidet **NBG** grundsätzlich von **ZFC**, siehe 23.8. Inhaltlich unterscheiden sich **NBG** und **ZFC** auf dem Bereich, über den beide Systeme Aussagen treffen können, also auf dem Bereich der Mengen, jedoch nicht: in beiden Systemen lassen sich dieselben Aussagen über Mengen beweisen. **ZFC** und **NBG** sind *äquikonsistent*, d.h., **ZFC** ist genau dann konsistent, wenn **NBG** es ist.

Eine Verallgemeinerung von **NBG** erhalten wir, wenn wir im Komprehensionsschema jede Formel und nicht nur prädikative Formeln zulassen. Dieses stärkere, **NBG** umfassende System wird als Kelley-Morse-Theorie bezeichnet. Im Gegensatz zu **NBG** ist diese Theorie *nicht* endlich axiomatisierbar.

Welche dieser drei Theorien ist die „richtige“? Diese Frage kann nicht beantwortet werden. Für und gegen jede dieser drei Theorien sprechen gute Gründe: so können wir in **ZFC** nur durch einen Umweg über die Metasprache den wichtigen und hilfreichen Begriff der Klasse einführen, der uns in **NBG** von vorneherein gegeben ist. Bei **NBG** wiederum scheint die Beschränkung auf prädikative Formeln im Komprehensionsschema irritierend und überflüssig, wenn man Klassen als natürlich gegeben Objekte ansieht, wie **NBG** es tut. Andererseits zeichnet sich **NBG** gegenüber sowohl dem Kelley-Morse-System als auch gegenüber **ZFC** dadurch aus, endlich axiomatisierbar zu sein. **ZFC** scheint gegenüber den „Klassentheorien“ für rein mengentheoretische Untersuchungen gewisse Vorteile zu bieten, wohingegen die „Klassentheorien“ bei Anwendungen der Mengenlehre in der mathematischen Praxis handhabbarer zu sein scheint, wird doch in der Praxis z.T. direkt auf (echte) Klassen Bezug genommen, man denke etwa an die Kategorientheorie.

Da allen drei hier betrachteten Theorien dieselben Prinzipien zugrunde liegen, ist für die in diesem Text behandelten Fragen die Wahl des Systems eher zweitrangig. Alle unsere Beweise in **ZF** bzw. **ZFC** können leicht in Beweise in den beiden Klassentheorien umgeschrieben werden. Wir werden weiterhin das System **ZF** sowie Erweiterungen von **ZF** (wie **ZFC**, **ZFC + CH** oder **ZFC + GCH**) oder Teilsysteme von diesen (wie $\mathbf{ZF}^- :\equiv \mathbf{ZF} - (\mathbf{Pot})$, $\mathbf{ZFC}^- :\equiv \mathbf{ZF}^- + \forall x\, \exists \alpha \in \mathrm{On}\ x \sim \alpha$) betrachten. Gelegentlich ist es notwendig, die Sprache der Mengenlehre zu expandieren, indem neue Relations-, Funktions- oder Konstantensymbole hinzugefügt werden, und dann **ZF** bzw. **ZFC** zu geeigneten Theorien in diesen Sprachen zu erweitern. So fügen wir etwa zur Sprache der Mengenlehre ein Konstantensymbol M hinzu und expandieren **ZFC** zu einer Theorie $\mathbf{ZFC}_M$, die **ZFC** umfaßt und festlegt, daß M ein „abzählbares, transitives Modell von **ZFC**“ ist, um die Anwendung der forcing-Methode bei der Führung (relativer) Konsistenzbeweise zu rechtfertigen.

[169] Ausdrücke wie $w = (u,v)$ sind wie üblich aufzulösen.

Als erstes wenden wir uns aber den GÖDELschen Unvollständigkeitssätzen zu, die uns die Grenzen der axiomatischen Methode in der Mathematik aufzeigen.

21 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze für ZF.

21.1 $\in$-Formeln und Mathematische Logik.

Obwohl es sich bei $\in$-Formeln um metasprachliche Gebilde handelt, zeigen $\in$-Formeln und Formeln der Logik erster Stufe[170] wie wir sie in 14.13 definiert haben, dieselbe Struktur, siehe 14.18. Demgemäß können wir die Regeln des Sequenzenkalküls formal auch auf $\in$-Formeln anwenden: für eine Liste Φ von $\in$-Formeln und eine $\in$-Formel φ gilt $\Phi \vdash \varphi$, wenn es eine metasprachliche natürliche Zahl n sowie eine Folge $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}$ von endlichen Listen von $\in$-Formeln und eine Folge $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ von $\in$-Formeln gibt, so daß die Aussagen (AR),...,($\subset$) aus 16.13 sinngemäß gelten. Da das Mengenuniversums V eine Formalisierung des mathematischen Universums, in dem wir normalerweise Mathematik betreiben, ist, können wir den Adäquatheitssatz 17.29 auf die Ebene der $\in$-Formeln übertragen und erhalten, daß dieser syntaktische Beweisbegriff und der bisher von uns bei Beweisen mengentheoretischer Theoreme herangezogene, intuitiv gegebene semantische Folgerungsbegriff äquivalent sind. Wir werden folglich fortan oft $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ schreiben um anzudeuten, daß die $\in$-Formel φ aus **ZF** abgeleitet werden kann, gleichzeitig den Beweis für diese Beziehung durch intuitives, inhaltliches Argumentieren in einem „Modell“ V erbringen. So können wir etwa die Aussage, daß On transitiv ist, schreiben als $\mathbf{ZF} \vdash \mathrm{Trans}(\mathrm{On})$; als Beweis hierfür können wir wie in 4.4 argumentieren: „Sei $x \in \alpha$ und $\alpha \in \mathrm{On} \ldots$“.

Wir können nun auf kanonische Weise die im Abschnitt Mathematische Logik definierten Begriffsbildungen auf **ZF** (bzw. **ZF** umfassende Axiomensysteme) übertragen. Insbesondere ist damit festgelegt, was es heißen soll, wenn wir sagen, daß **ZF** konsistent ist oder daß **ZF** vollständig ist.

Um die soeben begründete Ableitbarkeitsrelation für (Erweiterungen von) **ZF** von der in V definierten zu unterscheiden, schreiben wir für letztere in Zukunft $\dot{\vdash}$. So schreiben wir z.B. statt $\Phi_{\mathrm{Gr}} \vdash \dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot(\dot f\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot e\dot\to\dot f\dot v_1\dot v_0 \doteq \dot e\dot)$ fortan $\Phi_{\mathrm{Gr}}\dot\vdash\dot\forall\dot v_0\dot\forall\dot v_1\dot(\dot f\dot v_0\dot v_1 \doteq \dot e\dot\to\dot f\dot v_1\dot v_0 \doteq \dot e\dot)$.

21.2 Eine Formalisierung von ZF in ZF.

Die GÖDELschen Unvollständigkeitssätze fußen im Kern auf der Tatsache, daß **ZF** in **ZF** formalisiert werden kann. Dies ist wie folgt zu verstehen. Wir betrachten (in V) die Sprache $L(\dot\in) :\equiv (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\})$, die genau ein zweistelliges Relationssymbol besitzt, das wir mit $\dot\in$ bezeichnen. Wir setzen $\mathrm{Fml}(\dot\in) :\equiv \mathrm{Fml}(L(\dot\in))$.

21.1 Lemma $\mathbf{ZF} \vdash \mathrm{Fml}(\dot\in) \subset V_\omega$.

BEWEIS. Es ist[171] $A_{L(\dot\in)} \subset \omega \times \omega$. Jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(\dot\in) = A^*_{L(\dot\in)}$ ist also von der Form $\varphi = \big\{\big(i, (k_i, l_i)\big) \mid i < n\big\}$ mit $n, k_i, l_i \in \omega$. Dann ist $\mathrm{rg}\big(\big(i, (k_i, r_i)\big)\big) \in \omega$ und $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{lub}\big\{\mathrm{rg}\big(\big(i, (k_i, r_i)\big)\big) \mid i < n\big\} < \omega$. Also ist $\mathrm{Fml}(L(\dot\in)) \subset V_\omega$. QED

Wir ordnen nun jeder $\in$-Formel φ eine Menge $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ zu.

21.2 Definition Sei φ eine $\in$-Formel. Wir definieren die **Gödel-Menge** $\ulcorner\varphi\urcorner$ von φ durch Rekursion über den Aufbau von φ:

(i) $\ulcorner v_i = v_j \urcorner :\equiv \dot v_i \doteq \dot v_j$;

(ii) $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner :\equiv \dot v_i \dot\in \dot v_j$;

(iii) $\ulcorner (\varphi \wedge \psi) \urcorner :\equiv \dot(\ulcorner\varphi\urcorner \dot\wedge \ulcorner\psi\urcorner\dot)$;

---

[170] bzgl. der Sprache $L = (I, J, K, t)$ mit $I = \{0\}$, $J = K = \emptyset$ und $t = \big\{(0,2)\big\}$

[171] vgl. 14.7.

(iv) $\ulcorner\neg\varphi\urcorner :\equiv \dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner$;

(v) $\ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner :\equiv \dot{\forall}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

Ist Φ eine konkret vorgegebene, endliche Liste von $\in$-Formeln $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$, so definieren wir $\ulcorner\Phi\urcorner :\equiv \{\ulcorner\varphi_0\urcorner,\ldots,\ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner\}$.

21.3 Bemerkung (a) (i) und (ii) in der obigen Definition müßten exakt $\ulcorner v_i = v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}} \doteq \dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ und $\ulcorner v_i \in v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}}\dot{\in}\dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ lauten, da $\tilde{n}$ die Formalisierung der metasprachlichen natürlichen Zahl n in V ist.[172]

(b) Ist φ eine $\in$-Formel, so ist $\ulcorner\varphi\urcorner$ ein Klassenterm der Form

$\{(\tilde{0},(\tilde{\imath_0},\tilde{\jmath_0})),\ldots,(\widetilde{n-1},(\widetilde{\imath_{n-1}},\widetilde{\jmath_{n-1}}))\}$,

wobei n und i_k, j_k für $k<n$ konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen sind. Dies beweist man leicht durch eine (metasprachliche!) Rekursion über den Aufbau von φ, wenn man (a) sowie die Definitionen von $\dot{v}_k$, $\dot{(}$, $\dot{)}$, $\dot{\neg}$, $\dot{\wedge}$ und $\dot{\forall}$ beachtet. Es ist $\mathrm{rg}(\ulcorner\psi\urcorner) = \tilde{l}$ mit $l = \max_{k=0,\ldots,n-1}\max\{k, i_k+2, j_k+2\}+2$.

(c) Wir fassen die Konnektoren $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und den Quantor $\exists$ in der üblichen Weise als Abkürzungen auf und erhalten:

$\ulcorner(\varphi\vee\psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\vee}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,

$\ulcorner(\varphi\rightarrow\psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\rightarrow}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,

$\ulcorner(\varphi\leftrightarrow\psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner\dot{\leftrightarrow}\ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,

$\ulcorner\exists v_i\varphi\urcorner = \dot{\exists}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

(d) Wir können nicht argumentieren, daß jedes $\sigma\in\mathrm{Fml}(L(\dot{\in}))$ von der Form $\sigma=\ulcorner\varphi\urcorner$ mit einer $\in$-Formel φ ist. Existiert z.B. ein $n\in\omega$, das nicht von der Form $\tilde{n}$ ist, so gibt es keine $\in$-Formel φ mit $\ulcorner\varphi\urcorner = \dot{v}_n \doteq \dot{v}_n$.

Mit Hilfe der GÖDEL-Mengen können wir **ZF** in **ZF** formalisieren.

21.4 Definition

$$\begin{aligned}\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner :\equiv{}& \Big\{\ulcorner(\mathbf{Ex})\urcorner,\ulcorner(\mathbf{Ext})\urcorner,\ulcorner(\mathbf{Paar})\urcorner,\ulcorner(\textstyle\bigcup\textbf{-Ax})\urcorner,\ulcorner(\mathbf{Pot})\urcorner,\ulcorner(\mathbf{Inf})\urcorner\Big\}\cup\\ &\Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1\ldots\dot{\forall}\dot{v}_n\dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{\exists}\dot{v}_{n+2}\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+2}\dot{\leftrightarrow}\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+1}\dot{\wedge}\varphi\dot{)}\dot{)}\;\Big|\; n<\omega\wedge\varphi\in\mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in}))\Big\}\cup\\ &\Big\{\dot{\forall}\dot{v}_2\ldots\dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{(}\dot{\forall}\dot{v}_0\dot{\forall}\dot{v}_{n+2}\dot{\forall}\dot{v}_{n+3}\dot{(}\dot{(}\varphi\frac{\dot{v}_{n+2}}{\dot{v}_1}\dot{\wedge}\varphi\frac{\dot{v}_{n+3}}{\dot{v}_1}\dot{)}\dot{\rightarrow}\dot{v}_{n+2}=\dot{v}_{n+3}\dot{)}\\ &\qquad\dot{\longrightarrow}\dot{\forall}\dot{v}_{n+2}\dot{\exists}\dot{v}_{n+3}\dot{\forall}\dot{v}_1\dot{(}\dot{v}_1\dot{\in}\dot{v}_{n+3}\dot{\leftrightarrow}\dot{\exists}\dot{v}_0\dot{(}\dot{v}_0\dot{\in}\dot{v}_{n+2}\dot{\wedge}\varphi\dot{)}\dot{)}\;\Big|\\ &\qquad n<\omega\wedge\varphi\in\mathrm{Fml}_{n+2}(L(\dot{\in}))\dot{\wedge}\{\dot{v}_{n+2},\dot{v}_{n+3}\}\cap\mathrm{var}(\varphi)=\emptyset\Big\}\cup\\ &\Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1\ldots\dot{\forall}\dot{v}_n\dot{(}\dot{\exists}\dot{v}_0\varphi\dot{\rightarrow}\dot{\exists}\dot{v}_0\dot{(}\varphi\dot{\wedge}\dot{\forall}\dot{v}_{n+1}\dot{(}\dot{v}_{n+1}\dot{\in}\dot{v}_0\dot{\rightarrow}\dot{\neg}\varphi\frac{\dot{v}_{n+1}}{\dot{v}_0}\dot{)}\dot{)}\dot{)}\;\Big|\\ &\qquad n<\omega\wedge\varphi\in\mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in}))\wedge\dot{v}_{n+1}\notin\mathrm{var}(\varphi)\Big\}.\end{aligned}$$

Es ergibt sich sofort:

21.5 Lemma *Ist φ ein* **ZF***-Axiom so gilt* $\mathbf{ZF}\vdash\ulcorner\varphi\urcorner\in\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$. *Ferner gilt* $\mathbf{ZF}\vdash\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\subset\mathrm{Fml}_0(L(\dot{\in}))$.

Weiter erhalten wir:

21.6 Lemma *Sei φ eine $\in$-Formel. Wenn* $\mathbf{ZF}\vdash\varphi$ *gilt, so existiert eine metasprachliche natürliche Zahl l und ein $P\in V_{\tilde{l}}$ mit* $\mathbf{ZF}\vdash$ *(P ist ein formaler Beweis von* $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner$*). Insbesondere gilt* $\mathbf{ZF}\vdash\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner$.

[172]zu $\tilde{n}$ siehe 2.9.

Beweis. $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ bedeutet, daß es eine metasprachliche natürliche Zahl n sowie eine Folge $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}$ von endlichen Listen von $\in$-Formeln und eine Folge $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ von $\in$-Formeln gibt, so daß die Aussagen (AR) , ..., ($\subset$) aus 16.13 sinngemäß gelten. Man sieht leicht, daß dann $P :\equiv \big((\ulcorner\Phi_i\urcorner, \ulcorner\varphi_i\urcorner) \bigm| i < \tilde{n}\big)$ ein Beweis von $\ulcorner\varphi\urcorner$ aus $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$ im Sinne von 16.13 ist, so daß $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner \dot{\vdash} \ulcorner\varphi\urcorner$ gilt. Da nach 21.3 zu jeder $\in$-Formel ψ eine metasprachliche natürliche Zahl $l(\psi)$ existiert mit $\mathrm{rg}(\ulcorner\psi\urcorner) = \widetilde{l(\psi)}$, ist $\mathrm{rg}(P) = \tilde{l}$ mit

$$l :\equiv \max_{i=0,\ldots,n-1} \max\big\{i, \max\{\max_{\psi\in\Phi_i} l(\psi), l(\varphi_i)\} + 2\big\} + 3.$$

Dies war zu zeigen. QED

21.3 Ein Fixpunktsatz.

Sind $\theta, \chi(v_0)$ $\in$-Formeln, so können wir den Klassenterm $\ulcorner\theta\urcorner$ in die $\in$-Formel χ einsetzen und erhalten die $\in$-Formel $\chi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big) :\equiv \exists v_0\big(v_0 = \ulcorner\theta\urcorner \wedge \chi\big)$. Von allen unter **ZF** äquivalenten Fassungen der $\in$-Formel $v_0 = \ulcorner\theta\urcorner$ wählen wir

$$v_0 = \ulcorner\theta\urcorner :\equiv \forall v_1\Big(v_1 \in v_0 \longleftrightarrow \bigvee_{(k,(i,j))\in\ulcorner\theta\urcorner} v_1 = \big(k,(i,j)\big)\Big);$$

hierbei ist $\bigvee_{(k,(i,j))\in\ulcorner\theta\urcorner} v_1 = \big(k,(i,j)\big)$ eine Abkürzung für die (bei Wahl eines konkreten θ explizit hinschreibbare) $\in$-Formel

$$v_1 = \big(\tilde{0}, (\tilde{\imath}_0, \tilde{\jmath}_0)\big) \vee \ldots \vee v_1 = \big(\widetilde{n-1}, (\widetilde{\imath_{n-1}}, \widetilde{\jmath_{n-1}})\big),$$

wobei $\ulcorner\theta\urcorner = \Big\{\big(\tilde{0}, (\tilde{\imath}_0, \tilde{\jmath}_0)\big), \ldots, \big(\widetilde{n-1}, (\widetilde{\imath_{n-1}}, \widetilde{\jmath_{n-1}})\big)\Big\}$ die Darstellung von $\ulcorner\theta\urcorner$ als Klassenterm ist.

$\chi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big)$ besagt inhaltlich, daß die Eigenschaft χ auf θ zutrifft. Der folgende Fixpunktsatz besagt inhaltlich, daß es zu jeder $\in$-Formel $\chi(v_0)$ einen $\in$-Satz θ gibt, der aussagt: „Die Eigenschaft χ trifft *auf mich* zu."

21.7 Satz (Fixpunktsatz) *Sei $\chi(v_0)$ eine $\in$-Formel. Dann existiert ein $\in$-Satz θ mit* $\mathbf{ZF} \vdash \theta \longleftrightarrow \chi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big)$.

Beweis. Unser Ziel ist es, eine $\in$-Formel $\varphi(v_0)$ zu konstruieren, die

$$\mathbf{ZF} \vdash \varphi\big(\ulcorner\psi\urcorner\big) \longleftrightarrow \chi\Big(\ulcorner\psi\big(\ulcorner\psi\urcorner\big)\urcorner\Big) \qquad (*_\psi)$$

für alle $\in$-Formeln $\psi(v_0)$ erfüllt. Setzen wir dann $\theta :\equiv \varphi\big(\ulcorner\varphi\urcorner\big)$, so gilt unter **ZF**:

$$\theta \longleftrightarrow \varphi\big(\ulcorner\varphi\urcorner\big) \overset{(*_\varphi)}{\longleftrightarrow} \chi\Big(\ulcorner\underbrace{\varphi\big(\ulcorner\varphi\urcorner\big)}_{=\theta}\urcorner\Big) \longleftrightarrow \chi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big).$$

Die Definition von φ verlangt eine Formalisierung von Substitutionen, die wir im folgenden vornehmen.

(1) Es gibt einen Klassenterm $E(v_0)$ mit
  (a) $\mathbf{ZF} \vdash \big(E(v_0) \in \mathrm{Fml}(\dot{\in}) \wedge \mathrm{fr}(E(v_0)) = \{\dot{v}_0\}\big)$;[173]
  (b) $\mathbf{ZF} \vdash E\big(\ulcorner\psi\urcorner\big) = \ulcorner v_0 = \ulcorner\psi\urcorner\urcorner$ für alle $\in$-Formeln ψ.

[173] Verwechseln Sie nicht v_0 und $\dot{v}_0$: der Klassenterm E hat die freie (metasprachliche) Variable v_0. E wird unter **ZF** als Element σ von $\mathrm{Fml}(\dot{\in})$ interpretiert; dieses hängt natürlich von v_0 ab. Für jedes solche v_0 hat σ genau die eine freie Variable $\dot{v}_0$. Beispiel: Der Klassenterm $E(\omega)$ hat keine (metasprachliche) freie Variable. Unter **ZF** ist $E(\omega)$ ein Element von $\mathrm{Fml}(\dot{\in})$ mit genau einer freien Variable, nämlich $\dot{v}_0$.

Beweis. Der Beweis bedarf einiger technischer Vorbereitungen und Definitionen. Sei zunächst A ein Klassenterm mit $\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \omega\, A \subset n \times n$. Die lexikographischen Wohlordnung von A ist dann von endlichem Ordnungstyp $m < \omega$. Sei $\pi\colon m \xrightarrow{bij.} A$ die Inverse des Mostowski-Isomorphismus' von A. Ist dann $\big(\varphi_{(i,j)} \mid (i,j) \in \omega \times \omega\big)$ eine Sequenz von $L(\dot\in)$-Formeln, so sei

$$\bigwedge_{(i,j)\in A} \varphi_{(i,j)} :\equiv \bigwedge_{i<m} \varphi_{\pi(i)}, \qquad \bigvee_{(i,j)\in A} \varphi_{(i,j)} :\equiv \bigvee_{i<m} \varphi_{\pi(i)}.$$

Analog definieren wir im Falle eines Klassentermes A mit $\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \omega\, A \subset n \times (n \times n)$ und einer Sequenz $\big(\varphi_{(k,(i,j))} \mid \big(k,(i,j)\big) \in \omega \times (\omega \times \omega)\big)$ von $L(\dot\in)$-Formeln.
Für $n < \omega$ definieren wir $\varphi_n(\dot v_5) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\begin{aligned}\varphi_n(\dot v_5) :\equiv \dot{\Big(}&\ulcorner v_5 \in \omega \urcorner \,\dot\wedge \\ &\dot{(}\dot\exists \dot v_6 \dots \dot\exists \dot v_{6+(n-1)} \dot{(} \bigwedge_{i<j<n} \dot\neg\, \dot v_{6+i} \doteq \dot v_{6+j} \;\dot\wedge\; \bigwedge_{i<n} \dot v_{6+i} \dot\in \dot v_5 \,\dot{)}\,\dot\wedge \\ &\dot\neg\, \dot\exists \dot v_6 \dots \dot\exists \dot v_{6+n} \dot{(} \bigwedge_{i<j<n+1} \dot\neg\, \dot v_{6+i} \doteq \dot v_{6+j} \;\dot\wedge\; \bigwedge_{i<n+1} \dot v_{6+i} \dot\in \dot v_5 \,\dot{)}\dot{)}\dot{\Big)}.\end{aligned}$$

Man sieht leicht: ist n eine konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahl, so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi_{\tilde n} = \ulcorner v_5 = \tilde n \urcorner$; genauer: es gibt eine unter $\mathbf{ZF}$ zu „$v_5 = \tilde n$“ äquivalente $\in$-Formel $\phi_n(v_5)$ mit $\mathbf{ZF} \vdash \varphi_{\tilde n} = \ulcorner \phi_n \urcorner$.
Für $n < \omega$ definieren wir $\psi_n(\dot v_4) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\psi_n(\dot v_4) :\equiv \dot\forall \dot v_5 \dot{(} \dot v_5 \dot\in \dot v_4 \dot\leftrightarrow \varphi_n \dot{)}.$$

Ist n eine konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahl, so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \psi_{\tilde n} = \ulcorner v_4 = \{\tilde n\} \urcorner$ bei geeigneter Auflösung von „$v_4 = \{\tilde n\}$“ in eine $\in$-Formel.
Für $(i,j) \in \omega \times \omega$ definieren wir $\psi_{(i,j)}(\dot v_4) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\psi_{(i,j)}(\dot v_4) :\equiv \dot{\Big(} \psi_i \,\dot\vee\, \dot\forall \dot v_5 \dot{\big(} \dot v_5 \dot\in \dot v_4 \dot\leftrightarrow \dot{(} \varphi_i \dot\vee \varphi_j \dot{)} \dot{\big)} \dot{\Big)}.$$

Sind i, j konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen, so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \psi_{(\tilde\imath,\tilde\jmath)} = \ulcorner v_4 \in (\tilde\imath, \tilde\jmath) \urcorner$ bei geeigneter Auflösung von „$v_4 \in (\tilde\imath, \tilde\jmath)$“ in eine $\in$-Formel.
Für $(i,j) \in \omega \times \omega$ definieren wir außerdem $\varphi_{(i,j)}(\dot v_3) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\varphi_{(i,j)}(\dot v_3) :\equiv \dot\forall \dot v_4 \dot{(} \dot v_4 \dot\in \dot v_3 \dot\leftrightarrow \psi_{(i,j)} \dot{)}.$$

Sind i, j konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen, so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi_{(\tilde\imath,\tilde\jmath)} = \ulcorner v_3 = (\tilde\imath, \tilde\jmath) \urcorner$ bei geeigneter Auflösung von „$v_3 = (\tilde\imath, \tilde\jmath)$“ in eine $\in$-Formel.
Für $\big(k,(i,j)\big) \in \omega \times (\omega \times \omega)$ definieren wir $\psi_{(k,(i,j))}(\dot v_2) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\psi_{(k,(i,j))}(\dot v_2) :\equiv \dot{\Big(} \psi_k \frac{\dot v_2}{\dot v_4} \,\dot\vee\, \dot\forall \dot v_3 \dot{\big(} \dot v_3 \dot\in \dot v_2 \dot\leftrightarrow \dot{(} \varphi_k \frac{\dot v_3}{\dot v_5} \,\dot\vee\, \varphi_{(i,j)} \dot{)} \dot{\big)} \dot{\Big)}.$$

Für konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen k, i, j gilt $\mathbf{ZF} \vdash \psi_{(\tilde k,(\tilde\imath,\tilde\jmath))} = \ulcorner v_2 \in \big(\tilde k, (\tilde\imath, \tilde\jmath)\big) \urcorner$ bei geeigneter Auflösung von $v_2 \in \big(\tilde k, (\tilde\imath, \tilde\jmath)\big)$“ in eine $\in$-Formel.
Abschließend definieren wir für $\big(k,(i,j)\big) \in \omega \times (\omega \times \omega)$ $\varphi_{(k,(i,j))}(\dot v_1) \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ durch

$$\varphi_{(k,(i,j))}(\dot v_1) :\equiv \dot\forall \dot v_2 \dot{\big(} \dot v_2 \dot\in \dot v_1 \dot\leftrightarrow \psi_{(k,(i,j))} \dot{\big)}.$$

Für konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen k, i, j gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi_{(\tilde k,(\tilde\imath,\tilde\jmath))} = \ulcorner v_1 = \big(\tilde k, (\tilde\imath, \tilde\jmath)\big) \urcorner$ bei geeigneter Auflösung von „$v_1 = \big(\tilde k, (\tilde\imath, \tilde\jmath)\big)$“ in eine $\in$-Formel.

Wir definieren nun den Klassenterm $A(v_0)$ durch

$$A(v_0) :\equiv \Big\{ \big(k,(i,j)\big) \;\Big|\; \big(k,(i,j)\big) \in v_0 \,\wedge\, \exists n < \omega\; v_0 \subset n \times (n \times n) \Big\}.$$

Dann gilt $\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \omega\; A \subset n \times (n \times n)$. Wir können also setzen

$$E(v_0) :\equiv \dot\forall \dot v_1 \Big(\dot v_1 \dot\in \dot v_0 \;\dot\longleftrightarrow \bigvee_{(k,(i,j)) \in A(v_0)} \varphi_{(k,(i,j))} \dot\Big).$$

Offenbar gilt (a). Sei nun ψ eine beliebige $\in$-Formel. Dann gilt $\mathbf{ZF} \vdash A(\ulcorner\psi\urcorner) = \ulcorner\psi\urcorner$, denn aus der Definition von $\ulcorner\psi\urcorner$ ergibt sich leicht $\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \omega\; \ulcorner\psi\urcorner \subset n \times (n \times n)$. Hieraus folgt

$$\mathbf{ZF} \vdash E(\ulcorner\psi\urcorner) = \ulcorner\forall v_1 \Big(v_1 \in v_0 \longleftrightarrow \bigvee_{(k,(i,j)) \in \ulcorner\psi\urcorner} v_1 = \big(k,(i,j)\big)\Big)\urcorner$$

und dies impliziert (b). Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Wir definieren den Klassenterm $S(v_0)$ durch $S(v_0) :\equiv \dot\exists \dot v_0 \dot(E(v_0) \dot\wedge v_0 \dot)$. (Beachten Sie wieder den Unterschied zwischen v_0 und $\dot v_0$!) Aus (1) ergibt sich sofort:

(2) S formalisiert die „Selbstsubstitution“, d.h.,
 (a) $\mathbf{ZF} \vdash v_0 \in \mathrm{Fml}_1(\dot\in) \longrightarrow S(v_0) \in \mathrm{Fml}_0(\dot\in)$,
 (b) Es gilt $\mathbf{ZF} \vdash S\big(\ulcorner\psi\urcorner\big) = \ulcorner\exists v_0\, (v_0 = \ulcorner\psi\urcorner \wedge \psi)\urcorner$, also $\mathbf{ZF} \vdash S\big(\ulcorner\psi\urcorner\big) = \ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner$ für jede $\in$-Formel $\psi(v_0)$.

Nun setzen wir

$$\varphi(v_0) :\equiv \big(v_0 \in \mathrm{Fml}_1(\dot\in) \,\wedge\, \chi(S(v_0))\big).$$

Ist $\psi(v_0)$ dann eine beliebige $\in$-Formel, so gilt unter **ZF** wegen (2) (b):

$$\varphi\big(\ulcorner\psi\urcorner\big) \longleftrightarrow \chi\Big(\ulcorner\psi\big(\ulcorner\psi\urcorner\big)\urcorner\Big),$$

so daß $(*_\psi)$ gilt. Wir haben uns bereits überlegt, daß hieraus der Fixpunktsatz folgt. QED

21.4 Die Undefinierbarkeit der Wahrheit.

21.8 Definition Sei $\psi(v_0)$ eine $\in$-Formel. ψ heißt **Definition der Wahrheit** (in **ZF**), falls für jeden $\in$-Satz φ gilt: $\mathbf{ZF} \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi\big(\ulcorner\varphi\urcorner\big)$, wenn also unter **ZF** ein beliebiger $\in$-Satz genau dann wahr ist, wenn ψ auf ihn zutrifft.

Aus dem Fixpunktsatz erhalten wir sofort, daß die Wahrheit undefinierbar ist:

21.9 Satz (Satz von Tarski; Undefinierbarkeit der Wahrheit) *Wenn* **ZF** *konsistent ist, so gibt es keine Definition der Wahrheit in* **ZF**.

Beweis. Angenommen, $\psi(v_0)$ sei eine Definition der Wahrheit in **ZF**. Nach dem Fixpunktsatz (mit $\chi :\equiv \neg\,\psi$) existiert dann ein $\in$-Satz θ mit

$$\mathbf{ZF} \vdash \theta \longleftrightarrow \neg\,\psi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big).$$

Da ψ die Wahrheit definiert, gilt andererseits

$$\mathbf{ZF} \vdash \theta \longleftrightarrow \psi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big),$$

so daß sich insgesamt

$$\mathbf{ZF} \vdash \psi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big) \longleftrightarrow \neg\,\psi\big(\ulcorner\theta\urcorner\big)$$

ergibt. Also ist **ZF** nicht konsistent. QED

21.5 Die Unvollständigkeitssätze.

Die Undefinierbarkeit der Wahrheit impliziert den ersten GÖDELschen Unvollständigkeitssatz für **ZF**:

21.10 Satz (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZF) *Wenn* **ZF** *konsistent ist, so ist* **ZF** *nicht vollständig. D.h., es gibt einen* $\in$*-Satz* φ*, für den weder* $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ *noch* $\mathbf{ZF} \vdash \neg\varphi$ *gilt.*

BEWEIS. Wir nehmen an, daß **ZF** konsistent und vollständig ist und leiten einen Widerspruch zum Satz von TARSKI her. Wir betrachten hierzu eine $\in$-Formel $\psi(v_0)$, die auf $\sigma \in \mathrm{Fml}_0(\dot\in)$ genau dann zutrifft, wenn der erste formale Beweis in $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$, der σ entscheidet, zeigt, daß $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot\vdash\sigma$ gilt; es ergibt sich, daß ψ eine Definition der Wahrheit ist, was dem Satz von TARSKI widerspricht. Hierbei verstehen wir unter dem „ersten" Beweis das folgende: aus der Definition des Begriffes „formaler Beweis", vgl. 16.13, folgt leicht, daß jeder formale Beweis in $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$ ein Element von V_ω ist. Auf V_ω definieren wir nun eine Wohlordnung $<$ wie folgt: wir definieren für $n < \omega$ auf V_n eine Wohlordnung $<_n$, so daß $<_{n+1}$ eine Enderweiterung von $<_n$ ist, d.h., auf V_n stimmt $<_{n+1}$ mit $<_n$ überein und für $x \in V_n$, $y \in V_{n+1}$ gilt $x <_{n+1} y$; ferner sollen die Elemente von $V_{n+1} \setminus V_n$ wie folgt geordnet werden: ist $x = \{x_i \mid i < k\}$ und $y = \{y_i \mid i < l\}$ mit $x_i <_n x_j$ bzw. $y_i <_n y_j$ für $i < j$, so sei $x <_{n+1} y$, falls $k < l$ und $x_i = y_i$ für $i < k$ oder falls es ein $k_0 < \min\{k, l\}$ gibt mit $x_i = y_i$ für $i < k_0$ und $x_{k_0} <_n y_{k_0}$. Es ist leicht zu sehen, daß unter **ZF** dies von der folgenden Definition geleistet wird.

Setze $<_0 :\equiv \emptyset$. Ist $<_n$ definiert, so setze

$$\begin{aligned} x <_{n+1} y :\equiv\ & x \in V_{n+1} \wedge y \in V_{n+1} \wedge \\ & \Big((x \in V_n \wedge y \in V_n \wedge x <_n y) \vee \\ & (x \in V_n \wedge y \notin V_n) \vee \\ & \big(x \notin V_n \wedge y \notin V_n \wedge x \subset y \wedge \forall z(z \in x \to \forall z'((z' \in y \wedge z' <_n z) \to z' \in x))\big) \vee \\ & \big(x \notin V_n \wedge y \notin V_n \wedge \exists z(z \in x \setminus y \wedge \forall z'(z' <_n z \to (z' \in x \leftrightarrow z' \in y)))\big)\Big). \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß $< :\equiv \bigcup_{n<\omega} <_n$ eine Wohlordnung auf V_ω definiert, die den Ordnungstyp ω hat. Es sei $e\colon \omega \xrightarrow{bij.} V_\omega$ die Inverse des MOSTOWSKI-Isomorphismus' von $(V_\omega, <)$. Dann gilt:

(1) Ist n eine konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahl, φ ein $\in$-Satz und gilt

$$\mathbf{ZF} \vdash e(\tilde n) \text{ ist ein formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot\vdash\ulcorner\varphi\urcorner,$$

so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$.

BEWEIS. Die Elemente $e(\tilde 0), e(\tilde 1), e(\tilde 2), \ldots, e(\tilde n)$ können sukzessive berechnet und explizit hingeschrieben werden, beachte, daß die Wohlordnung von ω nach 4.27 mit den $\tilde m$ „beginnt". Da $e(\tilde n)$ ein formaler Beweis ist, ist $e(\tilde n) = \big((\Psi_i, \psi_i) \bigm| i < l\big)$ für gewisse endliche $\Psi_i \subset \mathrm{Fml}(\dot\in)$, gewisse $\psi_i \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ und ein gewisses $l < \omega$. Da $e(\tilde n)$ explizit hingeschrieben werden kann, muß $\Psi_i = \ulcorner\Phi_i\urcorner$, $\psi_i = \ulcorner\varphi_i\urcorner$ und $l = \tilde k$ sein, wobei Φ_i eine endliche Liste von $\in$-Formeln, φ_i eine $\in$-Formel und k eine metasprachliche natürliche Zahl ist. Dann liefern $\Phi_0, \ldots, \Phi_{k-1}$ und $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ einen Beweis von $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. qed(1)

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \psi(v_0) :\equiv v_0 \in \mathrm{Fml}_0(\dot\in) \wedge \exists n < \omega\Big(&\big(e(n) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot\vdash v_0\big) \wedge \\ & \forall m < n \neg \big(e(m) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot\vdash\dot\neg v_0\big)\Big). \end{aligned}$$

Es bleibt zu beweisen, daß ψ eine Definition der Wahrheit in **ZF** ist, also:

(2) Für jede $\in$-Formel φ gilt $\mathbf{ZF} \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Beweis. Es ist $\mathbf{ZF} \vdash \varphi \iff \mathbf{ZF} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ zu zeigen.
zu „⇒". Gelte $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. Nach 21.6 existiert eine metasprachliche natürliche Zahl l und ein $P \in V_{\tilde{l}}$ mit $\mathbf{ZF} \vdash (P$ ist ein formaler Beweis von $\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner)$. Dann gibt es eine konkret angebbare metasprachliche natürliche Zahl n mit $P = e(\tilde{n})$, d.h.,

$$\mathbf{ZF} \vdash e(\tilde{n}) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner.$$

Jedes Element von $\tilde{n}$ ist von der Form $\tilde{m}$, wobei m eine metasprachliche natürliche Zahl ist. Für kein $\tilde{m}$ kann

$$\mathbf{ZF} \vdash e(\tilde{m}) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\underbrace{\dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner}_{=\ulcorner\neg\varphi\urcorner}$$

gelten: in diesem Fall impliziert (1) nämlich $\mathbf{ZF} \vdash \neg\varphi$, was wegen unserer Annahme $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ einen Widerspruch zur Konsistenz von **ZF** induziert. Damit ist gezeigt:

$$\mathbf{ZF} \vdash \forall m < \tilde{n}\ \neg\big(e(m) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner\big).$$

Insgesamt haben wir $\mathbf{ZF} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ bewiesen.
zu „⇐". Es gelte $\mathbf{ZF} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Wir nehmen an, daß $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ **nicht** gilt und leiten einen Widerspruch her. Wenn $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$ nicht gilt, so gilt $\mathbf{ZF} \vdash \neg\varphi$ aufgrund der Vollständigkeit von **ZF**. Nach dem im „⇒"-Teil bewiesenen existiert dann eine konkret angebbare (metasprachliche) natürliche Zahl n_0 mit

$$\mathbf{ZF} \vdash e(\widetilde{n_0}) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\neg\varphi\urcorner.$$

$\mathbf{ZF} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ bedeutet

$$\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \omega\Big(\big(e(n) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner\big) \wedge$$
$$\forall m < n\ \neg\big(e(m) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\underbrace{\dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner}_{=\ulcorner\neg\varphi\urcorner}\big)\Big).$$

Dann folgt

$$\mathbf{ZF} \vdash \exists n < \widetilde{n_0}\ e(n) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner.$$

Da jedes Element von $\widetilde{n_0}$ von der Form $\tilde{m}$ ist, wobei m eine konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahl ist, existiert ein solches m mit

$$\mathbf{ZF} \vdash e(\tilde{m}) \text{ ist formaler Beweis von } \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\varphi\urcorner.$$

Nach (1) gilt dann $\mathbf{ZF} \vdash \varphi$. Da nach Annahme $\mathbf{ZF} \vdash \neg\varphi$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten Konsistenz von **ZF**.
Damit ist (2) bewiesen. qed(2)

Wie wir bereits bemerkt haben, folgt aus (2) die Behauptung des Satzes. QED

Um den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu formulieren und zu beweisen, setzen wir

$$\dot{\mathrm{Kon}}(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner) :\equiv \neg\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\dot{\neg}\,\dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0.$$

Ist **ZF** konsistent, so bedeutet $\mathbf{ZF} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner)$, daß man auf der Basis von **ZF** die Konsistenz von **ZF** beweisen kann, m.a.W., daß man die Widerspruchsfreiheit der Mathematik mathematisch beweisen kann. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, daß dies **nicht** möglich ist.

21.11 Satz (Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZF) *Wenn* **ZF** *konsistent ist, so gilt* $\mathbf{ZF} \nvdash \dot{\mathrm{Kon}}(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner)$.

Beweis. Sei **ZF** als konsistent angenommen. Durch Anwendung des Fixpunktsatzes 21.7 auf die Formel $\chi(v_0) :\equiv \neg\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}v_0$, die inhaltlich besagt, daß v_0 nicht beweisbar ist, erhalten wir einen $\in$-Satz θ mit

$$\mathbf{ZF} \vdash \big(\theta \longleftrightarrow \neg\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\theta\urcorner\big).$$

θ besagt: „ich bin nicht beweisbar.“ Dann gilt

(1) Aus der Konsistenz von **ZF** folgt $\mathbf{ZF} \nvdash \theta$.

Beweis. Aus $\mathbf{ZF} \vdash \theta$ folgt nach 21.6 $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\theta\urcorner$. Nach Wahl von θ folgt hieraus $\mathbf{ZF} \vdash \neg\theta$. Da wir $\mathbf{ZF} \vdash \theta$ angenommen haben, ergibt sich, daß **ZF** nicht konsistent ist. Also gilt (1). qed(1)

Man sieht leicht, daß sich die Argumentation im Beweis von (1) in **ZF** formalisieren läßt. Somit gilt

(2) $\mathbf{ZF} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}\big(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\big) \longrightarrow \neg\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\theta\urcorner$.

Nehmen wir also an, daß $\mathbf{ZF} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}\big(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\big)$ gilt, so folgt nach (2) $\mathbf{ZF} \vdash \neg\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\dot{\vdash}\ulcorner\theta\urcorner$. Nach Definition von θ gilt dann $\mathbf{ZF} \vdash \theta$, was (1) widerspricht. $\mathbf{ZF} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}\big(\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner\big)$ kann also nicht gelten, so daß der Satz bewiesen ist. QED

21.12 Bemerkung Der Satz von Tarski und die Gödelschen Unvollständigkeitssätze gelten bereist für wesentlich schwächere Systeme, so z.B. für die Peano-Arithmetik, formuliert in der Logik 1. Stufe.[174] Sie gelten auch in Erweiterungen von **ZF**, wie z.B. **ZFC**, **ZFC** + (**AC**) oder **ZFC** + **GCH**.

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze offenbaren prinzipielle Beschränkungen der axiomatischen Methode in der Mathematik: zum einen ist kein Axiomensystem für die Mathematik, das **ZF** umfaßt, so umfangreich, daß es jede mathematische Eigenschaft entscheidet. Zum anderen kann man die Widerspruchsfreiheit der Mathematik mit formalen Methoden („mathematisch“) nicht beweisen. Das Hilbertsche Programm, das einen solchen Beweis fordert, läßt sich also nicht verwirklichen. Möglich sind lediglich „relative Konsistenzbeweise“ der Art

„wenn $\mathrm{Kon}(T)$ so auch $\mathrm{Kon}(T')$“.

Wir werden im folgenden sehen, wie wir derartige Beweise im Kontext der Mengenlehre führen können.

22 Relativierung und Absolutheit von Formeln und Termen.

Wir setzen in diesem Kapitel – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – nur EML voraus.

22.1 Die Relativierung einer $\in$-Formel auf einen $\in$-Term.

Ein wichtiger Begriff der axiomatischen Mengenlehre ist der Begriff der Relativierung einer $\in$-Formel. Mit Hilfe dieses Begriffes können wir Modelle der Mengenlehre definieren, deren Träger ein Klassenterm ist.[175]

22.1 Definition Ein **$\in$-Term** ist eine Variable oder ein Klassenterm.

22.2 Definition Sei W ein $\in$-Term und φ eine $\in$-Formel, so daß W und φ keine Variablen gemeinsam haben. Wir definieren die **Relativierung von φ auf W, φ^W**, durch Rekursion über den Formelaufbau durch

(i) $(v_i \in v_j)^W :\equiv v_i \in v_j$;

[174] siehe z.B. [8], pp. 243ff.
[175] Modelle, wie in 13.1 definiert, haben als Träger stets eine Menge.

(ii) $(v_i = v_j)^W \;:\equiv\; v_i = v_j$;
(iii) $(\neg\varphi)^W \;:\equiv\; \neg(\varphi)^W$;
(iv) $(\varphi \wedge \psi)^W \;:\equiv\; (\varphi^W \wedge \psi^W)$;
(v) $(\forall v_i \varphi)^W \;:\equiv\; \forall v_i(v_i \in W \to \varphi^W)$.

φ^W entsteht also aus φ, indem der Laufbereich jedes Quantors in φ auf den $\in$-Term W beschränkt wird. Ist W eine nicht-leere Menge, so gilt φ^W genau dann, wenn $\ulcorner\varphi\urcorner$ in der Struktur $(W, \in)$ gilt. Präziser:

22.3 Definition Sei $(x, \in_x) \;:\equiv\; \bigl(x, \{(0, \in\restriction x)\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\}\bigr)$ die Struktur mit Trägermenge x und der auf die Elemente von x eingeschränkten $\in$-Relation $\in_x = \bigl\{(u,v) \bigm| u \in x \wedge v \in x \wedge u \in v\bigr\}$. Statt $\in_x$ schreiben wir meist nur kurz $\in$.

22.4 Satz *Sei $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und die Variable x komme in φ nicht vor. Dann gilt:*

$$x \neq \emptyset \longrightarrow \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in x \;\bigl(\varphi^x(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow (x, \in) \models \ulcorner\varphi\urcorner[v_0, \ldots, v_{n-1}]\bigr).$$

Beweis. Dies zeigt man leicht durch eine Induktion über den Aufbau von φ. QED

22.5 Bemerkung Die Behauptung in 22.4 hätten wir genauer schreiben müssen als

$$\mathbf{EML} \vdash x \neq \emptyset \longrightarrow \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in x \;\bigl(\varphi^x(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow (x, \in) \models \ulcorner\varphi\urcorner[v_0, \ldots, v_{n-1}]\bigr).$$

Die Gültigkeit einer auf den $\in$-Term W relativierten Formel φ^W kann als Gültigkeit der Formel φ in dem „Modell“ $(W, \in)$ interpretiert werden. Wir zeigen, daß sich W wie ein Modell erster Stufe verhält, daß also aus $\Phi \vdash \varphi$ folgt $\Phi^W \longrightarrow \varphi^W$:

22.6 Satz (Modell-Lemma) *Sei $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ eine endliche Liste von $\in$-Formeln und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine $\in$-Formel. Es gelte $\Phi \vdash \varphi$. Ferner sei W ein $\in$-Term, der weder mit Φ noch mit φ gemeinsame Variablen hat. Dann gilt:*

$$W \neq \emptyset \longrightarrow \forall x_1 \in W \ldots \forall x_n \in W \;\Bigl(\bigwedge(\Phi^W) \to \varphi^W\Bigr).$$

Hierbei bezeichnet Φ^W die Liste $\in$-Formeln ψ^W, für die ψ zu Φ gehört; für jede endliche Liste Ψ von $\in$-Formeln ist $\bigwedge\Psi$ die Konjunktion der (endlich vielen) Formeln von Ψ.

Beweis. Sei $\Phi \vdash \varphi$. Dann existiert eine Liste
0. $\Phi_0 \vdash \varphi_0$
$\vdots$
$n-1$. $\Phi_{n-1} \vdash \varphi_{n-1}$,
die formal den Regeln des Sequenzenkalküls genügt. Hierbei sind dann $\varphi_i \equiv \varphi_i(z_{i,1}, \ldots, z_{i,n_i})$ $\in$-Formeln, $\varphi_{n-1} \equiv \varphi$, und die $\Phi_i \equiv \Phi_i(y_{i,1}, \ldots, y_{i,m_i})$ sind endliche Listen von $\in$-Formeln; wegen der Monotonieregel des Sequenzenkalküls können wir $\Phi_{n-1} \equiv \Phi$ annehmen. Wir modifizieren W so, daß W mit keinem Φ_i und keinem φ_i Variablen gemeinsam hat und erhalten einen $\in$-Term W'. Da W und Φ, φ nach Voraussetzung keine Variablen gemeinsam haben, gilt

$$W \neq \emptyset \longrightarrow \forall x_1 \in W \ldots \forall x_n \in W \;\Bigl(\bigwedge(\Phi^W) \to \varphi^W\Bigr)$$

genau dann, wenn

$$W' \neq \emptyset \longrightarrow \forall x_1 \in W' \ldots \forall x_n \in W' \;\Bigl(\bigwedge(\Phi^{W'}) \to \varphi^{W'}\Bigr)$$

gilt, so daß wir o.E. annehmen können, daß bereits W von dieser Form ist.[176] Es genügt nun, für $i < n$ zu zeigen:

[176] Diese Modifikation führen wir durch, damit die nachfolgend vorgenommenen Relativierungen auf W wohldefiniert sind.

(1) $\quad W \neq \emptyset \longrightarrow \forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W \, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i} \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \varphi_i^W \right).$

Beweis. Wir führen eine (metasprachliche!) Induktion nach i durch. Sei also $i < n$ und die Behauptung für alle natürlichen Zahlen, die kleiner sind als i, gezeigt. Wir unterscheiden die möglichen Fälle, wie die i-te Zeile des Beweises zustande gekommen ist.

Fall 1. Es wurde (AR) angewendet. Dann ist entweder $\varphi_i \equiv v_k = v_k$ oder φ_i kommt in der Liste Φ_i vor. Im ersten Fall gilt (1) wegen $(v_k = v_k)^W \equiv v_k = v_k$ trivialerweise; im zweiten Fall kommt φ_i^W in der Liste Φ_i^W vor, so daß φ_i^W aus $\bigwedge(\Phi_i^W)$ folgt.

Fall 2. Es wurde eine der Und-Regeln, die Widerspruchsregel, die Fallunterscheidungsregel, die Gleichheitsregel oder die Monotonieregel angewendet. Wir untersuchen hier exemplarisch den Fall, daß die Regel $(\wedge 3)$ angewendet wurde; die anderen Fälle behandelt man analog. Wenn $(\wedge 3)$ angewendet wurde, existieren $j_1, j_2 < i$ mit $\varphi_i \equiv (\varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2})$, die j_1-te Zeile des Beweises lautet

j_1. $\Phi_i \vdash \varphi_{j_1}$,

die j_2-te Zeile lautet

j_2. $\Phi_i \vdash \varphi_{j_2}$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann (mit den (1) entsprechenden Voraussetzungen über die „Belegung“ der freien Variablen mit Elementen von W) $\bigwedge(\Phi_i^W) \to \varphi_{j_1}^W$ und $\bigwedge(\Phi_i^W) \to \varphi_{j_2}^W$. Hieraus folgt trivialerweise $\bigwedge(\Phi_i^W) \to (\varphi_{j_1}^W \wedge \varphi_{j_2}^W)$. Dies bedeutet nach Definition der Relativierung $\bigwedge(\Phi_i^W) \to (\varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2})^W$, also $\bigwedge(\Phi_i^W) \to \varphi_i^W$.

Fall 3. Es wurde die Instanzierungsregel oder die Generalisierungsregel angewendet. Wir bemerken zunächst:

$(*)$ Seien $\psi(y_1, \ldots, y_r)$ und $\chi(z, z_1, \ldots, z_s)$ $\in$-Formeln. Dann gilt:

$$\forall y_1 \in W \ldots \forall y_r \in W \, \forall z_1 \in W \ldots \forall z_s \in W \, (\psi \to \forall z \in W \chi)$$

impliziert

$$\forall y_1 \in W \ldots \forall y_r \in W \, \forall z_1 \in W \ldots \forall z_s \in W \, \forall z \in W \, (\psi \to \chi).$$

Kommt z nicht unter den freien Variablen von ψ vor, so gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Der einfache Beweis verbleibt dem Leser. qed$(*)$

Wurde nun die Regel $(\forall 1)$ angewendet, so existiert ein $j < i$ und ein $\chi \equiv \chi(z_{i,1}, \ldots, z_{i,n_i-1}, z)$, so daß

j. $\Phi_i \vdash \forall z \chi$

i. $\Phi_i \vdash \chi \dfrac{z_{i,n_i}}{z}$,

wobei z_{i,n_i} keine gebundene Variable von χ ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W \, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i-1} \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \underbrace{(\forall z \chi)^W}_{\equiv \forall z \in W \, \chi^W} \right).$$

Nach $(*)$ folgt hieraus

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W \, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i-1} \in W \, \forall z \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \chi^W \right).$$

Da hierin alle freien Variablen durch $\forall$-Quantoren abquantifiziert sind und der Laufbereich aller dieser Quantoren auf W beschränkt ist, kann hierin z durch z_{i,n_i} ersetzt werden, d.h., es gilt

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W \, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i-1} \in W \, \forall z_{i,n_i} \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \chi^W \frac{z_{i,n_i}}{z} \right).$$

Dies war zu zeigen.

Wurde ($\forall 2$) in der i-ten Zeile angewendet, so existiert ein $j < i$ und ein $\chi \equiv \chi(z_{i,1}, \ldots, z_{i,n_i}, z)$, so daß
$j.\ \Phi_i \vdash \chi\frac{z_j}{z}$
$i.\ \Phi_i \vdash \forall z \chi$,
wobei z_j in χ nicht und in Φ nicht als freie Variable vorkommt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W\, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i} \in W\, \forall z_j \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \chi^W \frac{z_j}{z}\right).$$

Nach der Umkehrung von ($*$) folgt hieraus

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W\, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i} \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to \forall z_j \in W\, \chi^W \frac{z_j}{z}\right).$$

Da z_j in χ nicht vorkommt, kann man hier z_j durch z ersetzen. Dann gilt

$$\forall y_{i,1} \in W \ldots \forall y_{i,m_i} \in W\, \forall z_{i,1} \in W \ldots \forall z_{i,n_i} \in W \left(\bigwedge(\Phi_i^W) \to (\forall z \chi)^W\right),$$

und dies war zu zeigen.
Also gilt (1). qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

In Hinblick auf das Modell-Lemma schreiben wir auch $(W, \in) \models \varphi$ statt φ^W. Ist Φ eine unendliche Liste von $\in$-Formeln, so schreiben wir $(W, \in) \models \Phi$ für die unendliche Liste der Formeln Φ^W, also die Liste aller Formeln ψ, die von der Form $\psi \equiv \varphi^W$ sind, wobei φ in Φ vorkommt.

Da sich ein W wie ein Modell der Logik erster Stufe verhält, können wir uns zum Beweis einer Eigenschaft der Art φ^W „in W hinein" begeben und dort die Eigenschaft φ beweisen. Hierunter verstehen wir folgendes:

22.7 Lemma *Sei W ein transitiver Term. $\chi(\vec{x})$ sei eine $\in$-Formel und seien $\vec{y} \in W$. Dann gilt $\chi(\vec{y})^W$, wenn folgendes der Fall ist:*
Es gibt eine Liste T von $\in$-Sätzen und eine endliche Liste $\Phi(\vec{x})$ von $\in$-Formeln mit
(i) T^W, $\Phi(\vec{y})^W$;
(ii) $T \cup \Phi(\vec{x}) \vdash \chi(\vec{x})$.
Wird auf diese Weise die Gültigkeit von $\chi(\vec{y})^W$ bewiesen, so sagen wir, der Beweis wurde durch **Arbeiten in** *W erbracht.*

Beweis. Wähle ein endliches Teilsystem T_0 von T mit $T_0 \cup \Phi(\vec{x}) \vdash \chi(\vec{x})$. Nach dem Modell-Lemma gilt dann $\bigwedge(T_0 \cup \Phi(\vec{x}))^W \longrightarrow \chi(\vec{x})^W$ für alle $\vec{x} \in W$. Da T_0^W gilt, ist dies gleichwertig mit $\bigwedge \Phi(\vec{x})^W \longrightarrow \chi(\vec{x})^W$ für alle $\vec{x} \in W$. Wegen $\Phi(\vec{y})^W$ folgt hieraus die Gültigkeit von $\chi(\vec{y})^W$. QED

I.a. beinhaltet T diejenigen $\in$-Sätze, deren Gültigkeit in W nach Wahl von W vorausgesetzt wird. Um durch „Arbeiten in W" die Eigenschaft $\chi(\vec{y})^W$ zu beweisen, sind „geeignete", endlich viele mathematische Eigenschaften zu isolieren, die auf $\vec{y}$ in W zutreffen. Formal erhält man eine endliche Liste $\Phi(\vec{x})$ von $\in$-Formeln, so daß $\Phi(\vec{y})^W$ gilt. Dann setzen wir voraus, daß im mathematischen Universum $T \cup \Phi(\vec{x})$ für gewisse Parameter $\vec{x}$ zutrifft. Anschaulich gesprochen begeben wir uns damit innerhalb des Modells W, so daß W zum gesamten mathematischen Universum wird. Die außerhalb von W liegenden Teile der mathematischen Welt liegen nun außerhalb unseres mathematischen Horizontes. In unserem neuen mathematischen Universum argumentieren wir wie üblich, um aus den Gegebenheiten T und $\Phi(\vec{x})$ die Gültigkeit von $\chi(\vec{x})$ zu beweisen. Sind wir hierbei erfolgreich, so haben wir gemäß 22.7 die Gültigkeit von $\chi(\vec{y})^W$ in unserem „normalen" mathematischen Universum V gezeigt.

Bei diesem Vorgehen muß $\Phi(\vec{x})$ gerade so umfangreich sein, daß Punkt (ii) des obigen Lemmas erfüllt ist. $\Phi(\vec{x})$ ist zu Beginn des Beweises i.a. noch unbekannt. Erst im Laufe des Beweises wird klar, welche geeigneten „Zusatzvoraussetzungen" $\varphi(\vec{x})$ zu treffen sind. Wird eine derartige Zusatzvoraussetzung $\varphi(\vec{x})$ benötigt, so ist jeweils nachzuweisen, daß φ auf $\vec{y}$ in W zutrifft, daß also $\varphi(\vec{y})^W$ (in V) gilt. Ist dies gewährleistet, kann die Eigenschaft $\varphi(\vec{x})$ im Beweis von $\chi(\vec{x})$ benutzt werden. Beim Nachweis von $\varphi(\vec{x})^W$ müssen wir i.a. W verlassen und in V argumentieren. Wir werden dann gegebenenfalls zwischen W und V „hin- und herschalten" wann und wie oft auch immer wir es benötigen.

22.2 Relativierungen der ZFC-Axiome.

Wir untersuchen, wann **ZFC**-Axiome in Strukturen $(W, \in)$ gelten. Hierbei interessieren vor allem transitive Klassenterme W. Es gilt:

22.8 Satz *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein transitiver Klassenterm, $W \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) $(\mathbf{Ex})^W$.

(b) $(\mathbf{Ext})^W$.

(c) $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \forall b \in W\ \{a, b\} \in W$.

(d) $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \bigcup a \in W$.

(e) Sei ψ die mit der $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Aus)**. *Dann gilt:*
$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W\, \forall a \in W\ \{x \in a \mid \varphi^W(x, \vec{w})\} \in W$.

(f) $(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \operatorname{Pot}(a) \cap W \in W$.

(g) $(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W\ (\emptyset \in a \wedge \forall x \in a\ x + 1 \in a)$.
Speziell: $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$ *und* $\big((\mathbf{Inf})^W \wedge (\mathbf{Aus})^W\big) \longrightarrow \omega \in W$.

(h) $(\mathbf{Ers})^W$ *gilt genau dann, wenn für jede $\in$-Formel $\varphi(x, y, \vec{w})$ gilt:*
$$\forall \vec{w} \in W\ \Big(\forall x, y, y' \in W\ \big((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \to y = y'\big) \longrightarrow \forall a \in W\ \{y \mid \exists x \in a\ \varphi^W(x, y, \vec{w})\} \cap W \in W\Big).$$

(i) Es gilt $(\mathbf{Fund})^W$. *Genauer: Ist ψ eine Instanz von* **(Fund)**, *so gilt ψ^W.*

(j) $(\mathbf{AC})^W \longleftrightarrow \forall a \in W \Big(\big(\emptyset \notin a \wedge \forall x, y \in a\ (x \neq y \to x \cap y = \emptyset)\big) \longrightarrow \exists b \in W\, \forall x \in a\, \exists z\ b \cap x = \{z\}\Big)$.

Beweis. Wir notieren zunächst

(1) Sei $x \in W$ und seien φ und π $\in$-Formeln. Dann gilt:
  (a) $x \cap W = x$.
  (b) $\forall y\, \big((y \in x \wedge \varphi) \to \psi\big) \longleftrightarrow \forall y \in W\ \big((y \in x \wedge \varphi) \to \psi\big)$.
  (c) $\exists y\, (y \in x \wedge \varphi) \longleftrightarrow \exists y \in W\ (y \in x \wedge \varphi)$

Beweis. Da W transitiv ist, folgt $x \subset W$ aus $x \in W$, und dies impliziert (a). Da nach (a) $y \in x$ gleichwertig ist mit $y \in W \wedge y \in x$ ergeben sich (b) und (c). qed(1)

Wir beweisen nun die einzelnen Punkte des Satzes.

zu (a). Es gilt

$$(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W\, \forall y \in W\ y \notin x.$$

Da W transitiv ist, gilt $\forall y \in W\ y \notin x \longleftrightarrow \forall y\, y \notin x$ für jedes $x \in W$, beachte (1a). Letzteres ist gleichwertig mit $x = \emptyset$, so daß wir

$$(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W\ x = \emptyset$$

haben. Um (a) zu beweisen, ist somit $\emptyset \in W$ zu zeigen. Hierzu verifizieren wir:

(2) $\quad x \neq \emptyset \longrightarrow \emptyset \in \mathrm{TC}(x)$.[177]

Beweis. Wir führen eine $\in$-Induktion durch, siehe 5.18. Sei $x \in V$ und die Behauptung für die Elemente von x bewiesen. Ist $x = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Ist $x \neq \emptyset$, so sei $y \in x$ beliebig. Ist $y = \emptyset$, so ist (2) gezeigt; ist $y \neq \emptyset$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $\emptyset \in \mathrm{TC}(y)$, und weil $\mathrm{TC}(y) \subset \mathrm{TC}(x)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. qed(2)

Da $W \neq \emptyset$ gilt, existiert $x \in W$. Ist $x = \emptyset$, so sind wir fertig; ist $x \neq \emptyset$, so ist nach (2) $\emptyset \in \mathrm{TC}(x)$. Da W transitiv ist, folgt $\mathrm{TC}(x) \subset W$ und somit $\emptyset \in W$. Damit ist (a) bewiesen.
zu (b). Es gilt

$$(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ \big(a = b \leftrightarrow \forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b)\big).$$

Aus (1b) folgt[178], daß für $a, b \in W$ gilt

$$\forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \longleftrightarrow \forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b),$$

und letzteres ist gleichwertig mit $a \subset b\ \wedge\ b \subset a$. Also gilt

$$(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ \big(a = b \leftrightarrow (a \subset b\ \wedge\ b \subset a)\big).$$

Da **ZF** gilt, ist dies (nach **(Ext)**) erfüllt. Damit ist (b) bewiesen.
zu (c). Es gilt

$$(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\, \exists c \in W\, \forall x \in W\ \big(x \in c \leftrightarrow (x = a\ \vee\ x = b)\big).$$

Aus (1b) folgt

$$\forall x \in W\ \big(x \in c \leftrightarrow (x = a\ \vee\ x = b)\big) \longleftrightarrow \forall x\ \big(x \in c \leftrightarrow (x = a\ \vee\ x = b)\big)$$

für $a, b, c \in W$. Letzteres ist gleichwertig mit $c = \{a, b\}$. Also gilt

$$(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ \{a, b\} \in W.$$

Damit ist (c) bewiesen.
zu (d). Es ist

$$(\textstyle\bigcup\textbf{-Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\ \big(x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a\ \wedge\ x \in y)\big).$$

Mit (1) folgt wieder leicht, daß für $a, b \in W$

$$\forall x \in W\ \big(x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a\ \wedge\ x \in y)\big) \longleftrightarrow \forall x \big(x \in b \leftrightarrow \exists y\, (y \in a\ \wedge\ x \in y)\big)$$

gilt; letzteres ist mit $b = \bigcup a$ gleichwertig. Es folgt

$$(\textstyle\bigcup\textbf{-Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\ b = \bigcup a,$$

wie in (d) behauptet.
zu (e). Sei ψ die mit $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Aus)**. Dann gilt

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w}\, \forall a\, \exists\, b\, \forall x\ \big(x \in b \leftrightarrow (x \in a\ \wedge\ \varphi(x, \vec{w}))\big).$$

Es ergibt sich

$$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W\, \forall a \in W\, \exists\, b \in W\ \underbrace{\forall x \in W\ \big(x \in b \leftrightarrow (x \in a\ \wedge\ \varphi^W(x, \vec{w}))\big)}_{\overset{(1b)}{\longleftrightarrow} \forall x\, (x \in b \leftrightarrow (x \in a\, \wedge\, \varphi^W))}.$$

[177] $\mathrm{TC}(x)$ ist die kleinste transitive Obermenge von x, vgl. 5.19.
[178] Beachte hierbei und im folgenden, daß $\forall x\, (\varphi \leftrightarrow \psi)$ äquivalent ist zu $\forall x\, (\varphi \to \psi)\ \wedge\ \forall x\, (\psi \to \varphi)$.

Da $\forall x(x \in b \leftrightarrow \psi)$ gerade $b = \{x \mid \psi\}$ bedeutet, folgt hieraus (e).
zu (f). Es gilt

$$(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, \big(x \in b \leftrightarrow \forall y \in W\, (y \in x \to y \in a)\big).$$

Wegen (1b) ist dies gleichwertig mit

$$\forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, \big(x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \to y \in a)\big).$$

Wegen

$$\forall x \in W\, \big(x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \to y \in a)\big) \longleftrightarrow b = \mathrm{Pot}(a) \cap W$$

folgt

$$(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \ \mathrm{Pot}(a) \cap W \in W.$$

Dies war zu zeigen.
zu (g). $(\mathbf{Inf})^W$ ist äquivalent zu

$$\exists a \in W\, \Big(\, \exists x \in W\, \big(x \in a \wedge \forall y \in W\, y \notin x\big) \wedge \\ \forall x \in W\, \big(x \in a \to \exists y \in W\, \big(y \in a \wedge \forall z \in W\, \big(z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)\big)\big)\big)\Big).$$

Aus (1c) und den Überlegungen zu $(\mathbf{Ex})^W$ folgt, daß für $a \in W$ gilt

$$\exists x \in W\, \big(x \in a \wedge \forall y \in W\, y \notin x\big) \longleftrightarrow \exists x\, (x \in a \wedge x = \emptyset);$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt für $a \in W$

$$\forall x \in W\, \big(x \in a \to \exists y \in W\, \big(y \in a \wedge \forall z \in W\, \big(z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)\big)\big)\big) \\ \longleftrightarrow \forall x\big(x \in a \to \exists y\big(y \in a \wedge \forall z\big(z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)\big)\big)\big).$$

(Behandle zunächst $\forall z$, danach $\exists y$ und schließlich $\forall x$.) Dieses ist gleichwertig mit $\forall x \in a\ x+1 \in a$, so daß wir

$$(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W\, \big(\emptyset \in a \wedge \forall x \in a\ x+1 \in a\big)$$

haben. Hieraus folgt sofort $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$. Gelte nun $(\mathbf{Inf})^W$ und $(\mathbf{Aus})^W$. Wähle $a \in W$ mit $\emptyset \in a$, so daß a unter der $+1$-Bildung abgeschlossen ist. Sei

$$s(x) :\equiv \exists y \in x\, \forall z \in x\, (z \in y \vee z = y)$$

eine $\in$-Formel, die aussagt, daß x ein Nachfolger ist. Wegen

$$s(x)^W \longleftrightarrow \exists y \in x \cap W\ \forall z \in x \cap W\ (z \in y \vee z = y)$$

und (1a) gilt $s(x)^W \longleftrightarrow s(x)$ für alle $x \in W$. Sei

$$\psi(x) :\equiv s(x) \wedge \forall y \in x\ s(y).$$

Dann gilt $\omega = \{n \mid \psi(n)\} = \{n \in a \mid \psi(n)\}$, vgl. 4.26. Da aus (1a) und $s^W \longleftrightarrow s$ folgt, daß $\psi(x)^W \longleftrightarrow \psi(x)$ für $x \in W$ gilt, ergibt sich

$$\omega = \{n \in a \mid \psi^W(n)\} \in W$$

nach $(\mathbf{Aus})^W$. Damit ist (g) bewiesen.

zu (h). Sei $\varphi(x,y,\vec{x})$ eine $\in$-Formel und ψ die mit φ gebildete Instanz von **(Ers)**. Es ist zu zeigen, daß ψ^W äquivalent zu der in (h) angegebenen $\in$-Formel ist. Es ist

$$\begin{aligned}\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(& \forall x, y, y' \in W \left((\varphi^W(x,y,\vec{w}) \wedge \varphi^W(x,y',\vec{w})) \to y = y' \right) \\ & \longrightarrow \forall a \in W \, \exists b \in W \, \underbrace{\forall y \in W \left(y \in b \leftrightarrow \exists x \in \underbrace{a \cap W}_{\overset{(1a)}{=} a} \varphi^W(x,y,\vec{w}) \right)}_{\longleftrightarrow b = \{y \mid \exists x \in a \; \varphi^W(x,y,\vec{w})\} \cap W} \Big).\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

zu (i). Sei ψ die mit der $\in$-Formel $\varphi(x,\vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**, d.h.,

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w} \Big(\exists x \varphi(x,\vec{w}) \longrightarrow \exists x \left(\varphi(x,\vec{w}) \wedge \forall y \in x \, \neg \varphi(y,\vec{w}) \right) \Big).$$

Sei ψ_0 die mit der $\in$-Formel $x \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(x,\vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**. Dann gilt

$$\begin{aligned}\psi_0 \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(& \exists x \in W \, \varphi^W(x,\vec{w}) \\ & \longrightarrow \exists x \in W \left(\varphi^W(x,\vec{w}) \wedge \forall y \in x \, \underbrace{\neg (y \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(y,\vec{w}))}_{\leftrightarrow \neg \varphi^W \text{ da } y \in x \subset W \text{ und } \vec{w} \in W} \right) \Big),\end{aligned}$$

wie man leicht sieht. Mit Hilfe von (1b) folgt, daß dies äquivalent zu ψ^W ist. Da ψ_0 gilt, gilt somit auch ψ^W. Damit ist (i) gezeigt.

zu (j). $(\mathbf{AC})^W$ ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}\forall a \in W \, \exists b \in W \Big(& \big(\forall x \in W \, (x \in a \to \exists y \in W \, y \in x) \wedge \\ & \quad \forall x \in W \, \forall y \in W \left((x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y) \to \neg \exists z \in W \, (z \in x \wedge z \in y) \right) \big) \\ & \longrightarrow \forall x \in W \left(x \in a \to \exists y \in W \left(y \in x \wedge y \in b \wedge \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. \forall z \in W \, ((z \in x \wedge z \in b) \to z = y) \right) \right) \Big).\end{aligned}$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt analog zur Vorgehensweise bei der Analyse von $(\mathbf{Inf})^W$, daß dies äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\forall a \in W \, \exists b \in W \Big(& \big(\forall x \, (x \in a \to \exists y \, y \in x) \wedge \forall x \forall y \left((x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y) \to \neg \exists z \, (z \in x \wedge z \in y) \right) \big) \\ & \longrightarrow \forall x \left(x \in a \to \exists y \left(y \in x \wedge y \in b \wedge \forall z \, ((z \in x \wedge z \in b) \to z = y) \right) \right) \Big).\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu der in (j) angegebenen $\in$-Formel. Also gilt (j).

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir betrachten als Beispiel die VON NEUMANNsche Hierarchie.

22.9 Satz *Es gelte* **ZFC**. *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha > 0$.

(a) Es gelten $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$, $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$.

(b) Ist $\alpha > \omega$, *so gilt* $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$.

(c) Gilt $\mathrm{Lim}(\alpha)$, *so gelten* $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

(d) Gilt $\alpha = \omega$ *oder ist* α *eine (stark) unerreichbare Kardinalzahl, so gilt* $(\mathbf{Ers})^{V_\alpha}$.

Beweis. Da V_α transitiv ist,[179] folgt aus 22.8 sofort die Gültigkeit von $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$ und $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$. Um $(\bigcup\textbf{-Ax})^{V_\alpha}$ zu zeigen, fixieren wir $a \in V_\alpha$ beliebig. Ist $y \in \bigcup a$, so existiert ein $x \in a$ mit $y \in x$; also ist $\mathrm{rg}(y) < \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$. Damit folgt

$$\mathrm{rg}(\bigcup a) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(y)+1}_{\leq \mathrm{rg}(a)} \mid y \in \bigcup a\} \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha.$$

Somit gilt $\bigcup a \in V_\alpha$, und dies war zu zeigen. Die Gültigkeit von $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$ ergibt sich so: sei $a \in V_\alpha$ und seien $\vec{w} \in V_\alpha$, ferner sei $\varphi(x,\vec{w})$ eine $\in$-Formel. Da $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x,\vec{w})\} \subset a$ gilt, folgt $\mathrm{rg}\Big(\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x,\vec{w})\}\Big) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha$, also $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x,\vec{w})\} \in V_\alpha$. Dies war zu zeigen.

Um die Gültigkeit von $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ zu beweisen, fixiere eine Menge $a \in V_\alpha$ von nicht-leeren, disjunkten Mengen. Wegen $(\mathbf{AC})$ existiert ein $b \in V$, das mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat. Um aus b alle „überflüssigen“ Elemente zu entfernen (also jene, die nicht zu einem Element von a gehören), setzen wir $b' :\equiv \bigcup\{x \cap b \mid x \in a\}$. Dann ist b' eine Menge, die mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat; überdies gilt $b' \subset \bigcup a$. Aus letzterem folgt $\mathrm{rg}(b') \leq \mathrm{rg}(\bigcup a) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha$. Also ist $b' \in V_\alpha$ und $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ gezeigt.

Ist $\alpha > \omega$, so gilt $\omega \in V_\alpha$ (und damit $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$) wegen $\omega \in V_{\omega+1} \subset V_\alpha$.

Nun gelte $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Sind $a, b \in V_\alpha$, so gilt $\mathrm{rg}(a) < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b) < \alpha$. Da α ein Limes ist, ist auch $\mathrm{rg}(a)+1 < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b)+1 < \alpha$, so daß sich

$$\mathrm{rg}\big(\{a,b\}\big) = \max\{\mathrm{rg}(a)+1, \mathrm{rg}(b)+1\} < \alpha$$

ergibt. Somit ist $\{a,b\} \in V_\alpha$, d.h., es gilt $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$. Des weiteren ist

$$\mathrm{rg}\big(\mathrm{Pot}(a) \cap V_\alpha\big) \leq \mathrm{rg}\big(\{x \mid x \subset a\}\big) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(x)}_{\leq \mathrm{rg}(a)} + 1 \mid x \subset a\} \leq \mathrm{rg}(a)+1 < \alpha,$$

also $\mathrm{Pot}(a) \cap V_\alpha \in V_\alpha$. Somit gilt $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

Nun sei α stark unerreichbar.[180] Dann gilt

(1) $\quad \forall \beta < \alpha\ \overline{\overline{V_\beta}} < \alpha.$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $\beta < \alpha$ durch.
$\beta = 0$. $\overline{\overline{V_0}} = 0 < \alpha$.
$\beta = \gamma + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\lambda :\equiv \overline{\overline{V_\gamma}} < \alpha$. Da α unerreichbar ist, ist auch $2^\lambda < \alpha$ und es folgt $\overline{\overline{V_\beta}} = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(V_\gamma)}} = 2^\lambda < \alpha$.
$\mathrm{Lim}(\beta)$. Für $\gamma < \beta$ sei $\lambda_\gamma :\equiv \overline{\overline{V_\gamma}}$. Da $\lambda_\gamma < \alpha$, $\beta < \alpha$ und α regulär ist, ist $\sum_{\gamma<\beta} \lambda_\gamma = \overline{\overline{\beta}} \cdot \sup_{\gamma<\beta} \lambda_\gamma < \alpha$. Es folgt

$$\overline{\overline{V_\beta}} = \overline{\overline{\bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma}} \leq \sum_{\gamma<\beta} \lambda_\gamma < \alpha.$$

Damit ist (1) gezeigt. qed(1)

Fixiere nun eine $\in$-Formel $\varphi(x,y,\vec{w})$ und $\vec{w} \in V_\alpha$ mit $\forall x, y, y' \in V_\alpha\ \big((\varphi^{V_\alpha}(x,y,\vec{w}) \wedge \varphi^{V_\alpha}(x,y',\vec{w})) \to y = y'\big)$. Ferner sei $a \in V_\alpha$ beliebig. Dann existiert ein $\beta < \alpha$ mit $a \in V_\beta$. Da φ^{V_α} „funktional“ ist, existiert zu

[179]zu den Eigenschaften der V_α vgl. 5.11, 5.12 und 5.30.
[180]vgl. 10.21.

jedem $x \in a$ höchstens ein $y(x) \in V_\alpha$ mit $\varphi^{V_\alpha}(x, y(x), \vec{w})$; existiert für x kein derartiges $y(x)$, so setzen wir $y(x) :\equiv \emptyset$. Sei $\rho(x) :\equiv \mathrm{rg}\big(y(x)\big)$. Es ist $\rho(x) < \alpha$. Ferner gilt

$$\mathrm{rg}\Big(\big\{y \bigm| \exists x \in a\ \varphi^{V_\alpha}(x, y, \vec{w})\big\} \cap V_\alpha\Big) \leq \mathrm{rg}\Big(\big\{y(x) \bigm| x \in a\big\}\Big) = \sup\big\{\underbrace{\rho(x) + 1}_{<\alpha} \bigm| x \in a\big\}.$$

Wegen $a \subset V_\beta$ ist nach (1) $\overline{\overline{a}} < \alpha$. Da α regulär ist, folgt

$$\sup\big\{\rho(x) + 1 \bigm| x \in a\big\} < \alpha.$$

Also ist $\big\{y \bigm| \exists x \in a\ \varphi^{V_\alpha}(x, y, \vec{w})\big\} \cap V_\alpha \in V_\alpha$, so daß $(\mathbf{Ers})^{V_\alpha}$ gilt.

Im Fall $\alpha = \omega$ argumentiert man genau wie im Fall, daß α unerreichbar ist. QED

22.10 Corollar *Es gilt* $(\mathbf{ZFC} - (\mathbf{Inf}))^{V_\omega}$. *Ist* κ *unerreichbar, so gilt* $\mathbf{ZFC}^{V_\kappa}$.

Nun erhalten wir das folgende, wichtige Resultat über unerreichbare Kardinalzahlen:

22.11 Satz *Sei* $\mathbf{I} :\equiv \exists\kappa\ \kappa$ *unerreichbar. Dann gilt:*

(a) Wenn **ZFC** *konsistent ist, so* $\mathbf{ZFC} \not\vdash \mathbf{I}$; *d.h., in* **ZFC** *ist die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl nicht beweisbar.*

(b) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \neg\,\mathbf{I})$.

(c) Wenn **ZFC** *konsistent ist, gibt es keinen „finitistischen“ Beweis*[181] *für* $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}{+}\mathbf{I})$.

Beweis. zu (a). Die im Beweis von 22.9 durchgeführten Überlegungen können leicht dergestalt modifiziert werden, daß wir

(1) $\quad \mathbf{ZFC} \vdash \forall\kappa\,(\kappa \text{ unerreichbar } \longrightarrow (V_\kappa, \in) \models \ulcorner\mathbf{ZFC}\urcorner)$

erhalten.

Angenommen nun, $\mathbf{ZFC} \vdash \mathbf{I}$. Mit $\kappa_0 :\equiv \bigcap\{\kappa \,|\, \kappa \text{ unerreichbar}\}$ gilt dann $\mathbf{ZFC} \vdash \kappa_0$ unerreichbar, was wegen (1) auf

$$\mathbf{ZFC} \vdash (V_{\kappa_0}, \in) \models \ulcorner\mathbf{ZFC}\urcorner$$

führt, und dies bedeutet

$$\mathbf{ZFC} \vdash \dot{\mathrm{K}}\mathrm{on}(\ulcorner\mathbf{ZFC}\urcorner),$$

was nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz 21.11 die Inkonsistenz von **ZFC** nach sich zieht. Damit ist (a) gezeigt.

zu (b). Dies folgt sofort aus (a), da $\Phi \not\vdash \varphi$ zu der Konsistenz von $\Phi \cup \{\dot\neg\varphi\}$ gleichwertig ist, vgl. 17.7.

zu (c). Angenommen, wir hätten einen finitistischen Beweis von

(2) $\quad \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I})$.

Da dieser Beweis durch endlich viele konkret durchführbare Manipulationen an endlichen Zeichenreihen durchgeführt wird, kann er in **ZFC** formalisiert werden und wir haben

(3) $\quad \mathbf{ZFC} \vdash \dot{\mathrm{K}}\mathrm{on}(\ulcorner\mathbf{ZFC}\urcorner) \longrightarrow \dot{\mathrm{K}}\mathrm{on}(\ulcorner\mathbf{ZFC} + \mathbf{I}\urcorner)$.

[181] D.h., einen Beweis, der durch endlich viele konkret durchführbare Manipulationen an endlichen Zeichenreihen geführt wird. Dies ist gerade das, was wir normalerweise als mathematischen Beweis ansehen.

Nach (1) gilt

$$\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}(\ulcorner \mathbf{ZFC} \urcorner),$$

was in Verbindung mit (3) zu

$$\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} \vdash \dot{\mathrm{Kon}}(\ulcorner \mathbf{ZFC} + \mathbf{I} \urcorner)$$

führt. Nach dem zweiten GÖDELschen Unvollständigkeitssatz ist also $\mathbf{ZFC} + \mathbf{I}$ inkonsistent, was nach (2) die Inkonsistenz von **ZFC** impliziert. QED

22.12 Bemerkung Aus (c) folgt, daß es unbekannt ist (und – hoffentlich – bleibt), ob $\mathbf{ZFC}+\mathbf{I}$ konsistent ist.

22.3 Die Absolutheit von Formeln.

Um das Konzept der elementaren Substruktur[182] auf „Klassenmodelle" von $\in$-Theorien zu übertragen, führen wir den Begriff der „absoluten Formel" ein:

22.13 Definition Seien W, W' $\in$-Terme und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\in$-Formel, die sowohl mit W als auch mit W' keine Variable gemeinsam hat. φ heißt W**-**W'**-absolut**, falls gilt

$$\forall x_1 \in W \ \ldots \forall x_n \in W \ \big(\varphi^W \longleftrightarrow \varphi^{W'}\big).$$

Statt „W-V-absolut"sagen wir kurz W**-absolut**.

22.14 Bemerkung Eine $\in$-Formel $\varphi(\vec{x})$ ist also genau dann W-absolut, wenn $\forall \vec{x} \in W \ \big(\varphi^W \longleftrightarrow \varphi\big)$ gilt.

Ist $W \subset W'$ so bedeutet die W-W'-Absolutheit einer $\in$-Formel φ gerade, daß bei „Belegung" der freien Variablen von φ mit Parametern $x_1, \ldots .x_n$ aus W gilt

$$(W, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff (W', \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Welche Formeln sind absolut? Eine erste Antwort gibt das folgende Lemma:

22.15 Lemma *Seien W, W' $\in$-Terme und es gelte $W \subset W'$ und $W \neq \emptyset$. Dann folgt:*

(a) *Atomare Formeln, also Formeln der Gestalt $v_i \in v_j$ bzw. $v_i = v_j$ sind W-W'-absolut.*

(b) *Wenn φ und ψ W-W'-absolut sind, so auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \wedge \psi)$; damit sind dann auch $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ sowie $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ W-W'-absolut.*

(c) *Sei W transitiv. Ist dann φ W-W'-absolut, so auch $\forall x \in y \ \varphi$; damit ist dann auch $\exists x \in y \ \varphi$ W-W'-absolut.*

BEWEIS. zu (a). Dies ist klar, da $\varphi^W \equiv \varphi^{W'} \equiv \varphi$ gilt.

zu (b). Aus den Voraussetzungen $\forall \vec{x} \in W \ \big(\varphi^W \leftrightarrow \varphi^{W'}\big)$ sowie $\forall \vec{x} \in W \ \big(\psi^W \leftrightarrow \psi^{W'}\big)$ folgt

$$\forall \vec{x} \in W \ \Big(\underbrace{\neg(\varphi^W)}_{\equiv (\neg\varphi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{\neg(\varphi^{W'})}_{\equiv (\neg\varphi)^{W'}}\Big)$$

sowie

$$\forall \vec{x} \in W \ \Big(\underbrace{(\varphi^W \wedge \psi^W)}_{\equiv (\varphi\wedge\psi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{(\varphi^{W'} \wedge \psi^{W'})}_{\equiv (\varphi\wedge\psi)^{W'}}\Big).$$

Dies war zu zeigen.

zu (c). Wir halten zunächst fest:

[182]siehe 18.20

(1) Ist $y \in W$, so gilt $y \cap W = y \cap W'$.

Beweis. Da W transitiv ist, folgt $y \subset W$ aus $y \in W$. Also gilt $y = y \cap W \subset y \cap W' \subset y$. Hieraus folgt die Behauptung. qed(1)

Sei nun $\varphi \equiv \varphi(x, y, \vec{z})$. Seien $y, \vec{z}$ Elemente von W. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\big(\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z})\big)^W &\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x, y, \vec{z})^W \\ &\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x, y, \vec{z})^{W'} \text{ (da } \varphi\ W\text{-}W'\text{-absolut)} \\ &\overset{(1)}{\longleftrightarrow} \forall x \in y \cap W'\ \varphi(x, y, \vec{z})^{W'} \\ &\longleftrightarrow \big(\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z})\big)^{W'}\end{aligned}$$

Also gilt $\forall y, \vec{z} \in W \Big(\big(\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z})\big)^W \longleftrightarrow \big(\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z})\big)^{W'}\Big)$. QED

Das Lemma zeigt, daß für Absolutheitsbetrachtungen solche $\in$-Formeln eine herausragende Rolle spielen, deren Quantoren auf Mengen beschränkt sind. Solche Formeln heißen Σ_0-Formeln:

22.16 Definition Eine $\in$-Formel φ heißt **Σ_0-Formel**, falls sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) φ ist atomar, also von der Form $v_i \in v_j$ oder $v_i = v_j$;
(ii) $\varphi \equiv \neg\psi$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist;
(iii) $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, wobei ψ und χ Σ_0-Formeln sind;
(iv) $\varphi \equiv \forall x(x \in y \to \psi)$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist.

Aus 22.15 folgt sofort:

22.17 Satz *Seien W, W' $\in$-Terme, $W \neq \emptyset$, $W \subset W'$ und W sei transitiv. Dann ist jede Σ_0-Formel, die weder mit W noch mit W' eine Variable gemeinsam hat, W-W'-absolut.*

Wir können das letzte Resultat abschwächen, indem wir von einer Σ_0-Formel übergehen zu einer Formel, die zu einer Σ_0-Formel äquivalent ist unter einer Theorie, die in W und W' gilt.

22.18 Definition Sei T eine Liste von $\in$-Formeln. Eine $\in$-Formel $\varphi(\vec{x})$ heißt **Σ_0^T-Formel**, falls es eine Σ_0-Formel $\psi(\vec{x})$ gibt mit $T \vdash \forall\vec{x}\,(\varphi \longleftrightarrow \psi)$.

Nun ergibt sich das folgende, wichtige Resultat:

22.19 Satz *Es gelte* **EML**. *Sei T eine Liste von $\in$-Formeln, die* **EML** *umfaßt. Seien W, W' $\in$-Terme mit $W \neq \emptyset$, $W \subset W'$ und W sei transitiv. Ferner gelte T^W und $T^{W'}$. Dann ist jede Σ_0^T-Formel, die weder mit W noch mit W' eine Variable gemeinsam hat, W-W'-absolut.*

Beweis. Sei $\varphi(\vec{x})$ eine derartige $\in$-Formel. Sei $\psi(\vec{x})$ eine Σ_0-Formel mit $T \vdash \forall\vec{x}\,(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Sei Φ ein endlicher Teil von T mit $\Phi \vdash \forall\vec{x}\,(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Nach dem Modell-Lemma 22.6 gelten

$$\bigwedge\big(\Phi^W\big) \longrightarrow \forall\vec{x} \in W\big(\varphi^W \leftrightarrow \psi^W\big)$$

sowie

$$\bigwedge\big(\Phi^{W'}\big) \longrightarrow \forall\vec{x} \in W'\big(\varphi^{W'} \leftrightarrow \psi^{W'}\big).$$

Da nach Voraussetzung sowohl $\bigwedge\big(\Phi^W\big)$ als auch $\bigwedge\big(\Phi^{W'}\big)$ gelten, ergibt sich, daß für $\vec{x} \in W$ die Aussagen $\varphi^W(\vec{x})$ und $\psi^W(\vec{x})$ sowie $\varphi^{W'}(\vec{x})$ und $\psi^{W'}(\vec{x})$ gleichwertig sind. Da die Σ_0-Formel ψ W-W'-absolut ist,

ist für $\vec{x} \in W$ $\psi^W(\vec{x})$ gleichwertig mit $\psi^{W'}(\vec{x})$. Also ist $\varphi^W(\vec{x})$ gleichwertig mit $\varphi^{W'}(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in W$. Dies war zu zeigen. QED

Viele der am häufigsten benutzten Formeln der Sprache der Mengenlehre sind unter **EML** äquivalent zu einer Σ_0-Formel, also $\Sigma_0^{\mathbf{EML}}$-Formeln. Wichtige Beispiele sind im folgenden Lemma notiert.

22.20 Lemma *Die folgenden $\in$-Formeln sind $\Sigma_0^{\mathbf{EML}}$-Formeln und damit absolut zwischen transitiven Modellen von* **EML***:*

(a) $x = \emptyset$;	*(b)* $x \subset y$;	*(c)* $x = \bigcup y$;	*(d)* $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
(e) $x = (y, z)$;	*(f)* $x = (x_1, \ldots, x_n)$;	*(g)* $x = y \times z$;	*(h)* $\mathrm{Rel}(r)$;
(i) $\mathrm{Fun}(f)$;	*(j)* $\mathrm{dom}(r) \subset x$;	*(k)* $x = \mathrm{dom}(r)$;	*(l)* $\mathrm{ran}(r) \subset x$;
(m) $x = \mathrm{ran}(r)$;	*(n)* $z \in f(x)$;	*(o)* $y = f(x)$;	*(p)* f *ist injektiv;*
(q) $f: x \to y$;	*(r)* $f: x \supset\!\!\to y$;	*(s)* $f: x \xrightarrow{inj.} y$;	*(t)* $f: x \xrightarrow{surj.} y$;
(u) $f: x \xrightarrow{bij.} y$;	*(v)* $\mathrm{Trans}(x)$;	*(w)* $\mathrm{SLO}(x, \in\restriction x)$;	*(x)* $x \in \mathrm{On}$;
(y) $x = y + 1$;	*(z)* $\mathrm{Succ}(x)$;	*(†)* $\mathrm{Lim}(x)$;	*(‡)* $x = \omega$;
(∗) y *ist unbeschränkt in* x;		*(∗∗)* y *ist abgeschlossen in* x.	

Beweis. Unter **EML** sind die folgenden Formeln zu den o.a. Formeln äquivalent:[183]

(a) $\forall z \in x \neg z = z$;

(b) $\forall z \in x\, z \in y$;

(c) $\forall u \in x\, \exists v \in y\; u \in v \;\wedge\; \forall v \in y\; v \subset x$;

(d) $\forall z \in x\, (z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n) \wedge (x_1 \in x \wedge \ldots \wedge x_n \in x)$;

(e) $\forall u \in x\, (u = \{y\} \vee u = \{y, z\}) \wedge \exists u \in x\; u = \{y\} \wedge \exists u \in x\; u = \{y, z\}$;

(f) $\forall u \in x \Big(\big(\forall v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1})\big) \vee$
$\big(\forall v \in u\; (v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \vee v = x_n) \wedge \exists v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists v \in u\; v = x_n\big) \Big) \wedge$
$\exists u \in x \big(\forall v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1})\big) \wedge$
$\exists u \in x \big(\forall v \in u\; (v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \vee v = x_n) \wedge \exists v \in u\; v = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \wedge \exists v \in u\; v = x_n\big)$;

(g) $\forall u \in x\, \exists v \in y\, \exists w \in z\; u = (v, w) \;\wedge\; \forall v \in y\, \forall w \in z\, \exists u \in x\; u = (v, w)$;

(h) $\forall z \in r\, \exists u \in z\, \exists x \in u\, \exists y \in u\; z = (x, y)$;

(i) $\mathrm{Rel}(f) \wedge$
$\forall u_1 \in f\, \forall v_1 \in u_1\, \forall x_1 \in v_1\, \forall y_1 \in v_1\, \forall u_2 \in f\, \forall v_2 \in u_2\, \forall x_2 \in v_2\, \forall y_2 \in v_2$
$\big((u_1 = (x_1, y_1) \wedge u_2 = (x_2, y_2) \wedge x_1 = x_2) \to y_1 = y_2\big)$;

(j) $\forall z \in r\, \forall u \in z\, \forall v \in u\, \forall w \in u\; \big(z = (v, w) \to v \in x\big)$;

(k) $\forall u \in x\, \exists z \in r\, \exists v \in z\, \exists w \in v\; z = (u, w) \;\wedge\; \mathrm{dom}(r) \subset x$;

(l) analog zu $\mathrm{dom}(r) \subset x$;

(m) analog zu $x = \mathrm{dom}(r)$;

(n) $\forall u_0 \in f\, \forall v_0 \in u_0\, \forall y_0 \in v_0$
$\Big(\big(u_0 = (x, y_0) \wedge \big(\forall u_1 \in f\, \forall v_1 \in u_1\, \forall y_1 \in v_1\; (u_1 = (x, y_1) \to y_0 = y_1)\big)\big) \longrightarrow z \in y_0\Big)$;[184]

(o) $\exists u \in f\; \big(u = (x, y) \wedge \big(\forall u_0 \in f\, \forall v_0 \in u_0\, \forall y_0 \in v_0\; (u_0 = (x, y_0) \to y = y_0)\big)\big)$;

(p) $\mathrm{Fun}(f) \wedge$
$\forall z_0 \in f\, \forall z_1 \in f\, \forall u_0 \in z_0\, \forall u_1 \in z_1\, \forall x_0 \in u_0\, \forall y_0 \in u_0\, \forall x_1 \in u_1\, \forall y_1 \in u_1$
$\Big(\big(y_0 = y_1 \wedge y_0 = f(x_0) \wedge y_1 = f(x_1)\big) \to x_0 = x_1\Big)$;

[183] Der Leser möge sich zunächst selbst unter **EML** äquivalente Σ_0-Formeln überlegen und nur in Zweifelsfällen die im folgenden angegebenen Äquivalenzen studieren.

[184] beachte die Definition des Klassentermes $f(x)$, siehe 2.49.

(q) $\mathrm{Fun}(f) \wedge x = \mathrm{dom}(f) \wedge \mathrm{ran}(f) \subset y$;
(r) $\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \subset x \wedge \mathrm{ran}(f) \subset y$;
(s) $f{:}\, x \to y \wedge f$ ist injektiv;
(t) $f{:}\, x \to y \wedge \mathrm{ran}(f) = y$;
(u) $f{:}\, x \xrightarrow{inj.} y \wedge f{:}\, x \xrightarrow{surj.} y$;
(v) $\forall y \in x\ y \subset x$;
(w) $\forall y \in x\,\big(\neg\, y \in y \wedge \mathrm{Trans}(y) \wedge \forall z \in x\,(z = y \vee z \in y \vee y \in z)\big)$;
(x) $\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x, \in\restriction x)$;
(y) $\forall z \in x\ (z \in y \vee z = y) \wedge y \subset x \wedge y \in x$;
(z) $x \in \mathrm{On} \wedge \big(x = \emptyset \vee \exists y \in x\, x = y + 1\big)$;
(†) $x \in \mathrm{On} \wedge \neg\, \mathrm{Succ}(x)$;
(‡) $\mathrm{Lim}(x) \wedge \forall y \in x\ \mathrm{Succ}(x)$;
(∗) $\mathrm{Lim}(x) \wedge y \subset x \wedge \forall \alpha \in x\, \exists \beta \in y\ \alpha \in \beta$;
(∗∗) $\mathrm{Lim}(x) \wedge y \subset x \wedge \forall \alpha \in x\big((\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha \exists \gamma \in y\ (\gamma \in \alpha \wedge \beta \in \gamma)) \longrightarrow \alpha \in y\big)$.

Hieraus folgen die Behauptungen. QED

22.4 Relativierung von $\in$-Termen auf $\in$-Terme.

In einem Klassenmodell W wird jeder $\in$-Term t durch einen $\in$-Term t^W interpretiert.

22.21 Definition Sei $t(\vec{x})$ ein $\in$-Term und W ein Term, so daß t und W keine Variablen gemeinsam haben. Wir definieren die **Relativierung** t^W **von** t **auf** W wie folgt:

(i) Ist t eine Variable, so sei $t^W :\equiv t$;
(ii) Ist $t \equiv \{v \mid \varphi(v, \vec{x})\}$, so sei $t^W :\equiv \{v \in W \mid \varphi^W(v, \vec{x})\}$.

22.22 Satz (Relativierungslemma) *Sei $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y})$ eine $\in$-Formel und $t_0(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x})$ seien Klassenterme. Sei W ein transitiver Term. Ferner mögen in t_i und W sowie φ und W keine Variablen gemeinsam vorkommen. Dann gilt*

$$\forall \vec{x} \forall \vec{y} \in W\ \Big(\big(\varphi(t_0, \ldots, t_{n-1}, \vec{y})\big)^W \longleftrightarrow \varphi^W(t_0^W, \ldots, t_{n-1}^W, \vec{y})\Big).$$

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Aufbau von φ durch. Sei $t_i \equiv \{v \mid \psi_i(v, \vec{x})\}$.

Fall 1. $\varphi \equiv y \in u$. Dann gilt für $y \in W$:

$$\begin{aligned}\big(\varphi(t, y)\big)^W &\iff \big(y \in t\big)^W \iff \psi(y, \vec{x})^W\\ &\iff y \in W \wedge \psi^W(y, \vec{x}) \quad \text{(beachte, daß } y \in W \text{ nach Voraussetzung gilt)}\\ &\iff y \in t^W \iff \varphi^W(t^W, y).\end{aligned}$$

Fall 2. $\varphi \equiv y = u$. Dann folgt für $y \in W$

$$\begin{aligned}\big(\varphi(t, y)\big)^W \iff \big(y = t\big)^W &\iff \big(\forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \in t)\big)^W \iff \forall z \in W\ ((z \in y)^W \leftrightarrow (z \in t)^W)\\ &\iff \forall z \in W\ (z \in y \leftrightarrow z \in t^W) \quad \text{(nach Fall 1.)}\\ &\iff \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \in t^W) \quad (\text{da } t^W, y \subset W)\\ &\iff \varphi^W(t^W, y).\end{aligned}$$

Fall 3. $\varphi \equiv u \in y$. Dann folgt für $y \in W$:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(t,y)\big)^W &\iff \big(t \in y\big)^W \iff \big(\exists z(z = t \wedge z \in y)\big)^W \iff \exists z \in W\ ((z=t)^W \wedge z \in y)\\
&\iff \exists z \in W\ (z = t^W \wedge z \in y) \quad \text{(nach Fall 2.)}\\
&\iff \exists z\,(z = t^W \wedge z \in y) \quad (\text{da } y \subset W)\\
&\iff \varphi^W(t^W, y).
\end{aligned}$$

Fall 4. $\varphi \equiv u_0 \in u_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(t_0,t_1)\big)^W &\iff \big(t_0 \in t_1\big)^W \iff \big(\exists z(z = t_0 \wedge z \in t_1)\big)^W\\
&\iff \exists z \in W\ ((z=t_0)^W \wedge (z \in t_1)^W)\\
&\iff \exists z \in W\ (z = t_0^W \wedge z \in t_1^W) \quad \text{(nach Fall 1. und 2.)}\\
&\iff \exists z\,(z = t_0^W \wedge z \in t_1^W) \quad (\text{da } t_1^W \subset W)\\
&\iff \varphi^W(t_0^W, t_1^W).
\end{aligned}$$

Fall 5. $\varphi \equiv u_0 = u_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(t_0,t_1)\big)^W &\iff \big(t_0 = t_1\big)^W\\
&\iff \big(\forall z\,(z \in t_0 \leftrightarrow z \in t_1)\big)^W \iff \forall z \in W\ ((z \in t_0)^W \leftrightarrow (z \in t_1)^W)\\
&\iff \forall z \in W\ (z \in t_0^W \leftrightarrow z \in t_1^W) \quad \text{(nach Fall 1.)}\\
&\iff \forall z\,(z \in t_0^W \leftrightarrow z \in t_1^W) \quad (\text{da } t_i^W \subset W)\\
&\iff \varphi^W(t_0^W, t_1^W).
\end{aligned}$$

Fall 6. $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Dann gilt für $\vec{y} \in W$:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(t_0,\ldots,t_{n-1},\vec{y})\big)^W &\iff \big(\varphi_0(t_0,\ldots,t_{n-1},\vec{y})\big)^W \wedge \big(\varphi_1(t_0,\ldots,t_{n-1},\vec{y})\big)^W\\
&\iff \varphi_0^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,\vec{y}) \wedge \varphi_1^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,\vec{y})\\
&\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\
&\iff \varphi^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,\vec{y}).
\end{aligned}$$

Fall 7. $\varphi \equiv \neg\varphi_0$. Diesen Fall behandelt man analog zu Fall 6.
Fall 8. $\varphi \equiv \exists z \varphi_0(u_0,\ldots,u_{n-1},z,\vec{y})$. Dann gilt für $\vec{y} \in W$:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(t_0,\ldots,t_{n-1},\vec{y})\big)^W &\iff \exists z \in W\ \big(\varphi_0(t_0,\ldots,t_{n-1},z,\vec{y})\big)^W\\
&\iff \exists z \in W\ \varphi_0^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,z,\vec{y}) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\
&\iff \varphi^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,\vec{y}).
\end{aligned}$$

Fall 9. $\varphi \equiv \forall z \varphi_0(u_0,\ldots,u_{n-1},z,\vec{y})$. Diesen Fall behandelt man genau wie Fall 8.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Das folgende Corollar zeigt, daß t^W in W die Rolle spielt, die t in V spielt.

22.23 Corollar *Sei $\Phi(\vec{x},\vec{y})$ eine Liste von $\in$-Formeln und $\varphi(u_0,\ldots,u_{n-1},\vec{y})$ sei eine $\in$-Formel. Es seien $t_0(\vec{x}),\ldots,t_{n-1}(\vec{x})$ Klassenterme. Sei W ein transitiver Term, $W \neq \emptyset$. Ferner mögen in t_i und W sowie W und Φ,φ keine Variablen gemeinsam vorkommen. Es gelte $\Phi \vdash \varphi(t_0(\vec{x}),\ldots,t_{n-1}(\vec{x}),\vec{y})$. Gilt dann Φ^W, so gilt $\forall\vec{x} \in W\,\forall\vec{y} \in W\ \varphi^W(t_0^W,\ldots,t_{n-1}^W,\vec{y})$.*

Beweis. Wir können nach dem Endlichkeitssatz annehmen, daß Φ endlich ist. Nach dem Modell-Lemma 22.6 gilt dann

$$\forall\vec{x} \in W\,\forall\vec{y} \in W\ \bigwedge(\Phi)^W \longrightarrow \big(\varphi(t_0,\ldots,t_{n-1},\vec{y})\big)^W.$$

Wegen Φ^W ist die linke Seite richtig. Also gilt auch die rechte Seite. Diese ist nach dem Relativierungslemma 22.22 gerade $\varphi^W(t_0^W, \ldots, t_{n-1}^W, \vec{y})$. QED

Wir geben ein paar Beispiele für relativierte Terme an.

22.24 Lemma *Sei W transitiv und seien $x, x_1, \ldots, x_n, y \in W$. Dann gilt*

(a) $\emptyset^W = \emptyset$, $V^W = W$.

(b) $\left(\bigcup x\right)^W = \bigcup y$.

(c) $\mathrm{Pot}(x)^W = \mathrm{Pot}(x) \cap W$.

(d) $\{x_1, \ldots, x_n\}^W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(e) $\big((x, y)\big)^W = (x, y) \cap W$; *gilt* $(\mathbf{Paar})^W$, *so gilt* $(x, y)^W = (x, y)$.

(f) $(x + 1)^W = x + 1$.

(g) $\mathrm{On}^W = \mathrm{On} \cap W$.

(h) *Ist* $\omega \in W$, *so gilt* $\omega^W = \omega$.

Es gelte nun $(\mathbf{Paar})^W$. *Ferner seien A, B und F $\in$-Terme; im Fall, daß A bzw. B bzw. F eine Variable ist, gelte $A \in W$ bzw. $B \in W$ bzw. $F \in W$. Dann folgt*

(i) $\big(A \times B\big)^W = A^W \times B^W$.

(j) $\mathrm{dom}(R)^W = \mathrm{dom}(R^W)$; $\mathrm{dom}(r)^W = \mathrm{dom}(r)$.

(k) $\mathrm{ran}(R)^W = \mathrm{ran}(R^W)$; $\mathrm{ran}(r)^W = \mathrm{ran}(r)$.

Beweis. zu (a). $\emptyset^W = \{x \in W \mid x \neq x\} = \emptyset$ und $V^W = \{x \mid x = x\}^W = \{x \in W \mid x = x\} = W$.
zu (b).

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup x\right)^W &= \{z \mid \exists y\,(y \in x \,\wedge\, z \in y)\}^W \\
&= \{z \in W \mid \exists y \in W\ (y \in x \,\wedge\, z \in y)\} \\
&= \{z \in W \mid \exists y\,(y \in x \cap W \,\wedge\, z \in y)\} \\
&= \{z \mid \exists y\,(y \in x \cap W \,\wedge\, z \in y)\} \quad (\text{wegen } y \in W \longrightarrow y \subset W) \\
&= \bigcup (x \cap W) = \bigcup x.
\end{aligned}$$

zu (c).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pot}(x)^W &= \{z \mid \forall y\,(y \in z \to y \in x)\}^W = \{z \in W \mid \forall y \in W\ (y \in z \to y \in x)\} \\
&= \{z \in W \mid \forall y\,(y \in z \to y \in x)\} \quad (\text{da } y \in z \,\wedge\, z \in W \longrightarrow y \in W) \\
&= \mathrm{Pot}(x) \cap W.
\end{aligned}$$

zu (d). $\{x_1, \ldots, x_n\}^W = \{z \in W \mid z = x_1 \,\vee\, \ldots \,\vee\, z = x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
zu (e).

$$\begin{aligned}
(x, y)^W &= \big\{z \,\big|\, z = \{x\} \,\vee\, z = \{x, y\}\big\}^W = \big\{z \in W \,\big|\, (z = \{x\} \,\vee\, z = \{x, y\})^W\big\} \\
&= \big\{z \in W \,\big|\, z = \{x\}^W \,\vee\, z = \{x, y\}^W\big\} \quad (\text{Relativierungslemma 22.22}) \\
&= \big\{z \in W \,\big|\, z = \{x\} \,\vee\, z = \{x, y\}\big\} \quad (\text{nach (d)}) \\
&= (y, z) \cap W.
\end{aligned}$$

Wenn $(\mathbf{Paar})^W$ gilt, so ist $\{x\} \in W$ und $\{x, y\} \in W$, also $(x, y) \cap W = (x, y)$.
zu (f). $(x + 1)^W = \{z \in W \mid z \in x \,\vee\, z = x\} == \{z \mid z \in x \,\vee\, z = x\} = x + 1$.

zu (g). Man verifiziert unmittelbar, daß die Formel $\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x, \in\restriction x)$ eine Σ_0-Formel, also[185] W-V-absolut ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{On}^W &= \big\{x \mid \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x, \in\restriction x)\big\}^W = \big\{x \in W \mid (\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x, \in\restriction x))^W\big\} \\ &= \big\{x \in W \mid \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x, \in\restriction x)\big\} \quad \text{(wegen der Absolutheit der definierenden Formel)} \\ &= \mathrm{On} \cap W.\end{aligned}$$

zu (h). Für $x \in W$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(x)^W &\iff \big(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to y+1 \in x)\big)^W \\ &\iff \emptyset^W \in x \wedge \forall y \in W\ (y \in x \to (y+1)^W \in x) \quad \text{(Relativierungslemma)} \\ &\iff \emptyset \in x \wedge \forall y \in W\ (y \in x \to y+1 \in x) \quad \text{(nach dem bisher bereits bewiesenen)} \\ &\iff \emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to y+1 \in x) \quad \text{(da } W \text{ transitiv und } x \in W \text{ ist)} \\ &\iff \mathrm{Ind}(x).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\omega^W = \big\{x \mid \forall y\,(\mathrm{Ind}(y) \longrightarrow x \in y)\big\}^W = \big\{x \in W \mid \forall y \in W\ (\mathrm{Ind}(y) \longrightarrow x \in y)\big\}.$$

Wählt man hier $y :\equiv \omega$, so folgt $\omega^W \subset \omega$. Wegen $\omega = \{x \mid \forall y\,(\mathrm{Ind}(y) \longrightarrow x \in y)\}$ und $\omega \subset W$ folgt außerdem sofort $\omega \subset \omega^W$.

zu (i). Es ist $A \times B = \{z \mid \exists x, y\,(x \in A \wedge y \in B \wedge z = (x,y))\}$. Unter Anwendung des Relativierungslemmas folgt also

$$\begin{aligned}z \in (A \times B)^W &\iff z \in W \wedge \exists x, y \in W\ (x \in A^W \wedge y \in B^W \wedge z = (x,y)^W) \\ &\overset{(e)}{\iff} z \in W \wedge \exists x, y \in W\ (x \in A^W \wedge y \in B^W \wedge z = (x,y)) \\ &\iff \exists x, y \in W\ (x \in A^W \wedge y \in B^W \wedge z = (x,y)) \\ &\qquad \text{(da } (x,y) \in W \text{ für } x, y \in W \text{ wegen } (\mathbf{Paar})^W) \\ &\iff \exists x, y\,(x \in A^W \wedge y \in B^W \wedge z = (x,y)) \quad \text{(da } A^W, B^W \subset W) \\ &\iff z \in A^W \times B^W.\end{aligned}$$

zu (j), (k). Wir beweisen (j); bei (k) verfährt man analog. Es gelte $(\mathbf{Paar})^W$. Dann ist, wie bereits bewiesen, $(x,y)^W = (x,y)$ für $x, y \in W$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(F)^W &= \big\{x \mid \exists y\,(x,y) \in F\big\}^W = \big\{x \in W \mid (\exists y\,(x,y) \in F)^W\big\} \\ &= \big\{x \in W \mid \exists y \in W\ (x,y)^W \in F^W\big\} \quad \text{(Relativierungslemma)} \\ &= \big\{x \in W \mid \exists y \in W\ (x,y) \in F^W\big\} \\ &= \big\{x \mid \exists y\,(x,y) \in F^W\big\} \\ &\quad \text{(da } x, y \in \{x,y\} \in (x,y) \in F^W \subset W \text{ wegen } \mathrm{Trans}(W) \text{ impliziert } x, y \in W) \\ &= \mathrm{dom}(F^W).\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

22.25 Corollar *W, A, B und F seien wie im Lemma und es gelte* $\mathbf{EML}^W$.

(a) $\mathrm{Rel}(F)^W \longleftrightarrow \mathrm{Rel}(F^W)$.

(b) $\mathrm{Fun}(F)^W \longleftrightarrow \mathrm{Fun}(F^W)$.

(c) $\big(\mathrm{dom}(F) = A\big)^W \longleftrightarrow \mathrm{dom}(F^W) = A^W$.

---

[185] siehe 22.15.

(d) $\big(\mathrm{ran}(F) \subset B\big)^W \longleftrightarrow \mathrm{ran}(F^W) \subset B^W$.

(e) $\big(F\colon A \to B\big)^W \longleftrightarrow F^W\colon A^W \to B^W$. *Insbesondere gilt* $\big({}^{A}B\big)^W = {}^{(A^W)}(B^W) \cap W$.

(f) Gilt $F^W\colon A^W \to B^W$, *so ist* $\big(F(x)\big)^W = F^W(x)$ *für alle* $x \in A^W$.

Beweis. zu (a).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rel}(F)^W &\iff \big(\forall z\,(z \in F \longrightarrow \exists x, y\; z = (x,y))\big)^W \\
&\iff \forall z \in W\; (z \in F^W \longrightarrow \exists x, y \in W\; z = (x,y)^W) \quad \text{(Relativierungslemma)} \\
&\iff \forall z \in W\; (z \in F^W \longrightarrow \exists x, y \in W\; z = (x,y)) \\
&\iff \forall z \in W\; (z \in F^W \longrightarrow \exists x, y\; z = (x,y)) \quad (\text{da } x, y \in \{x,y\} \in z \in W \Rightarrow x, y \in W) \\
&\iff \forall z\,(z \in F^W \longrightarrow \exists x, y\; z = (x,y)) \quad (\text{da } F^W \subset W) \\
&\iff \mathrm{Rel}(F^W).
\end{aligned}$$

zu (b).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fun}(F)^W &\iff \big(\mathrm{Rel}(F) \wedge \forall x, y, y'\,(((x,y) \in F \wedge (x,y') \in F) \longrightarrow y = y')\big)^W \\
&\iff \mathrm{Rel}(F^W) \wedge \forall x, y, y' \in W\; (((x,y)^W \in F^W \wedge (x,y')^W \in F^W) \longrightarrow y = y') \\
&\iff \mathrm{Rel}(F^W) \wedge \forall x, y, y' \in W\; (((x,y) \in F^W \wedge (x,y') \in F^W) \longrightarrow y = y') \\
&\iff \mathrm{Rel}(F^W) \wedge \forall x, y, y'\,(((x,y) \in F^W \wedge (x,y') \in F^W) \longrightarrow y = y') \\
&\qquad (\text{da } x, y \in \{x,y\} \in (x,y) \in F^W \subset W \text{ und } y' \in \{x,y'\} \in (x,y') \in F^W \subset W \\
&\qquad \text{implizieren } x, y, y' \in W) \\
&\iff \mathrm{Fun}(F^W).
\end{aligned}$$

zu (c).

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{dom}(F) = A\big)^W &\iff \big(\forall x\,(x \in A \longleftrightarrow \exists y\,(x,y) \in F)\big)^W \\
&\iff \forall x \in W\; (x \in A^W \longleftrightarrow \exists y \in W\; (x,y)^W \in F^W) \\
&\iff \forall x \in W\; (x \in A^W \longleftrightarrow \exists y \in W\; (x,y) \in F^W) \\
&\iff \forall x \in W\; (x \in A^W \longleftrightarrow \exists y\,(x,y) \in F^W) \\
&\qquad (\text{da } y \in \{x,y\} \in (x,y) \in F^W \subset W \text{ impliziert } y \in W) \\
&\iff \forall x\,(x \in A^W \longleftrightarrow \exists y\,(x,y) \in F^W) \\
&\qquad (\text{wegen } A^W \subset W \text{ und weil } x \in \{x\} \in (x,y) \in F^W \subset W \text{ impliziert } x \in W) \\
&\iff \mathrm{dom}(F^W) = A^W.
\end{aligned}$$

zu (d). Dies beweist man analog zu (c).
zu (e). Die erste Aussage folgt wegen $F\colon A \to B \;\equiv\; \big(\mathrm{Rel}(F) \wedge \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{ran}(F) \subset B\big)$ sofort aus dem bereits bewiesenen. Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}
\big({}^{A}B\big)^W &= \big\{f \in W \bigm| (f\colon A \to B)^W\big\} \\
&= \big\{f \in W \bigm| f^W\colon A^W \to B^W\big\} \quad \text{(erste Behauptung in (e))} \\
&= \big\{f \in W \bigm| f\colon A^W \to B^W\big\} \quad \text{(Definition der Relativierung bei Variablen)} \\
&= {}^{(A^W)}(B^W) \cap W.
\end{aligned}$$

zu (f). Nach 2.50 gilt

(1) $\quad \mathbf{EML} \vdash F\colon A \to V \longrightarrow \forall x\big(x \in \mathrm{dom}(F) \to \forall y\,((x,y) \in F \leftrightarrow y = F(x))\big)$.

Wegen $\mathbf{EML}^W$ gilt diese Aussage, wenn man sie auf W relativiert. Da $(F\colon A \to V)^W$ gilt (beachte (e)), folgt dann nach Anwendung des Relativierungslemmas sowie von 22.24

(2) $\quad \forall x \in W \ \big(x \in \mathrm{dom}(F^W) \to \forall y \in W \ ((x,y) \in F^W \leftrightarrow y = (F(x))^W)\big).$

Sei nun $x \in A^W = \mathrm{dom}(F^W)$. Sei $y :\equiv F^W(x)$. Dann gilt $(x,y) \in F^W$ nach (1) mit F^W statt F und A^W statt A. Nach (2) impliziert dies $y = \big(F(x)\big)^W$. Wegen $y = F^W(x)$ folgt hieraus die Behauptung. Damit ist alles gezeigt. QED

Aus 22.24 und 22.23 erhalten wir leicht die folgenden, z.T. bereits bekannten Resultate:

22.26 Corollar *Sei W ein nicht-leerer, transitiver Term. Es gelte $\mathbf{EML}^W$. Dann gilt für $x, y \in W$*
(a) $\emptyset \in W$.
(b) $\bigcup y \in W$.
(c) $\{x, y\} \in W$.
(d) $(x, y) \in W$.
(e) $x + 1 \in W$.
Gilt zusätzlich $(\mathbf{Aus})^W$, so gilt für alle $f \in W$:
(f) $\mathrm{dom}(f) \in W$.
(g) $\mathrm{ran}(f) \in W$.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch (g). Wegen $\mathbf{EML} + (\mathbf{Aus}) \vdash \exists z\, z = \mathrm{ran}(f)$, siehe 3.13, und $(\mathbf{EML} + (\mathbf{Aus}))^W$ folgt $\exists z \in W \ z = \mathrm{ran}(f)^W$. Wegen $\mathrm{ran}(f)^W = \mathrm{ran}(f^W) = \mathrm{ran}(f)$ folgt $\mathrm{ran}(f) \in W$. QED

22.5 Die Absolutheit von $\in$-Termen.

Betrachten wir zwei Terme W und W'. Es gelte $W \subset W'$ und W, W' seien transitiv. Ist $t(\vec{x})$ ein weiterer Term, so definiert $t(\vec{x})$ ein gewisses mathematisches Objekt, das aus den Werten $\vec{x}$ „berechnet" wird. Für $\vec{x} \in W$ haben wir also zwei mathematische Objekte $t^W(\vec{x})$ und $t^{W'}(\vec{x})$. Verhalten sich diese für jede Wahl von $\vec{x} \in W$ relativ zu W bzw. W' gleich, so wollen wir den Term t W-W'-absolut nennen. Hierbei soll „gleiches Verhalten relativ zu W bzw. W'" bedeuten:
(1) $t^W(\vec{x}) \in W \longleftrightarrow t^{W'}(\vec{x}) \in W'$;
(2) $t^W(\vec{x}) \in W \longrightarrow t^W(\vec{x}) = t^{W'}(\vec{x})$.
Wir definieren etwas allgemeiner:

22.27 Definition Seien W und W' Terme. Der Term $t(\vec{x})$ habe weder mit W noch mit W' Variablen gemeinsam. t ist **W-W'-absolut**, falls gilt
(i) $\exists y\, y = t(\vec{x})$ ist W-W'-absolut;
(ii) $y = t(\vec{x})$ ist W-W'-absolut.
Hierbei ist y eine beliebige, in W, W' und t nicht vorkommende Variable.

Die Definition stimmt mit dem in der Motivation verlangten überein:

22.28 Lemma *Es gelte $W \subset W'$ und W, W' seien transitiv. Dann ist t genau dann W-W'-absolut, wenn (1) und (2) für alle $\vec{x} \in W$ gelten.*

Beweis. zu „$\Rightarrow$". Es gelte (1) und (2). Seien $\vec{x} \in W$. Dann folgt unter Benutzung des Relativierungslemmas:

$$\begin{aligned}(\exists y\, y = t(\vec{x}))^W &\iff \exists y \in W \ y = t^W(\vec{x}) \iff t^W(\vec{x}) \in W \overset{(1)}{\iff} t^{W'}(\vec{x}) \in W' \\ &\iff \dots \iff (\exists y\, y = t(\vec{x}))^{W'}.\end{aligned}$$

Also gilt (i). Sei nun $y \in W$. Dann ist $(y = t(\vec{x}))^W$ gleichwertig mit $t^W(\vec{x}) = y \in W$. Nach (2) gilt $t^{W'}(\vec{x}) = t^W(\vec{x}) = y$, also $(y = t(\vec{x}))^{W'}$ nach dem Relativierungslemma. Gilt andererseits $(y = t(\vec{x}))^{W'}$, so folgt $t^{W'}(\vec{x}) = y \in W \subset W'$, also $t^W(\vec{x}) \in W$ nach (1). (2) liefert dann $t^W(\vec{x}) = t^{W'}(\vec{x}) = y$, so daß $y = t^W(\vec{x})$, also $(y = t(\vec{x}))^W$ gilt. Damit ist (ii) gezeigt.

zu „$\Leftarrow$". Es gelte (i) und (ii). Ist U ein transitiver Term, der mit t keine Variablen gemeinsam hat, so gilt

$$t^U(\vec{x}) \in U \iff \exists y \in U\ y = t^U(\vec{x}) \iff (\exists y\, y = t(\vec{x}))^U.$$

Hieraus folgt sofort, daß (1) von (i) impliziert wird. Seien nun $\vec{x} \in W$ und $t^W(\vec{x}) \in W$. Sei $y :\equiv t^W(\vec{x})$. Nach (ii) gilt

$$y = t^W(\vec{x}) \longleftrightarrow y = t^{W'}(\vec{x}).$$

Da hier die linke Seite gilt, muß $y = t^{W'}(\vec{x})$ sein. Also gilt $t^W(\vec{x}) = t^{W'}(\vec{x})$, d.h., (2) ist erfüllt.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

22.29 Beispiel Nach 22.24 gilt $\omega^U = \omega$ für jeden transitiven Term U mit $\omega \in U$. Zum Beweis dieser Tatsache haben wir gezeigt, daß

$$\omega^U = \{x \in U \mid \forall y \in U\ (\mathrm{Ind}(y) \longrightarrow x \in y)\}$$

für alle transitiven Terme U gilt. Da es im Fall $\alpha \leq \omega$ in $U :\equiv V_\alpha$ kein induktives Element gibt, ist die definierende Formel für jedes $x \in U$ erfüllt, also $\omega^U = U$. Zusammen mit der Tatsache, daß $\omega \in V_{\omega+1}$ gilt, ergibt sich demnach

$$\omega^{V_\alpha} = \begin{cases} V_\alpha, & \text{falls } \alpha \leq \omega; \\ \omega, & \text{falls } \alpha > \omega. \end{cases}$$

Hiermit folgt

(a) Ist $m < n \leq \omega$, so ist der Term ω V_m-V_n-absolut, denn es ist weder $\omega^{V_m} \in V_m$ noch $\omega^{V_n} \in V_n$.

(b) Ist $m \leq \omega < \alpha$, so ist der Term ω nicht V_m-V_α-absolut, denn es ist $\omega^{V_m} \notin V_m$ aber $\omega^{V_\alpha} \in V_\alpha$, also (1) verletzt.

(c) Ist $\omega < \alpha < \beta$, so ist der Term ω V_α-V_β-absolut, denn es ist $\omega^{V_\alpha} \in V_\alpha$, $\omega^{V_\beta} \in V_\beta$ und $\omega^{V_\alpha} = \omega^{V_\beta}$.

Ein einfaches Beispiel eines nicht W-W'-absoluten Termes (für geeignete Terme W,W'), der (1) erfüllt aber (2) verletzt, ist $t :\equiv \{\{\emptyset\}\}$: es ist

$$t^{V_1} = \{\{\emptyset\}\} \cap \underbrace{V_1}_{=\{\emptyset\}} = \emptyset \in V_1 \quad \text{und} \quad t^{V_3} = \{\{\emptyset\}\} \cap \underbrace{V_3}_{\ni\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}} = \{\{\emptyset\}\} \in V_3.$$

22.30 Lemma *Seien W, W' transitive, nicht-leere Terme, $W \subset W'$. Es gelte* $\mathbf{EML}^W$ *und* $\mathbf{EML}^{W'}$. *Dann sind folgende Terme W-W'-absolut:*

(a) $\emptyset$, V.

(b) $\bigcup y$.

(c) $\{x, y\}$.

(d) (x, y).

(e) $x + 1$.

(f) Gilt zusätzlich $(\mathbf{Aus})^W$ *, so sind die Terme* $\mathrm{dom}(f)$ *und* $\mathrm{ran}(f)$ *W-W'-absolut.*

(g) Gilt zusätzlich $\omega \in W$ oder $(\mathbf{Inf})^W + (\mathbf{Aus})^W$*, so ist ω W-W'-absolut.*

Beweis. Aus 22.24 und 22.26 folgen leicht (a) – (f). Wir zeigen exemplarisch, daß unter der Zusatzvoraussetzung $(\mathbf{Aus})^W$ der Term $\mathrm{ran}(f)$ W-W'-absolut ist. Nach 22.24 ist für $f \in W$ einerseits $\mathrm{ran}(f)^W = \mathrm{ran}(f)^{W'} = \mathrm{ran}(f)$ (beachte $\mathbf{EML}^{W,W'}$ und $f^{W,W'} = f$). Wegen $(\mathbf{Aus})^W$ ist außerdem $\mathrm{ran}(f) \in W$, siehe 22.26. Wegen $W \subset W'$ folgt $\mathrm{ran}(r) \in W'$. Also gelten (1) und (2) für $t :\equiv \mathrm{ran}(r)$.

zu (g). Unter den angegebenen Voraussetzungen ist $\omega \in W$ und somit auch $\omega \in W'$, so daß nach 22.24 $\omega^W = \omega^{W'} = \omega$ gilt. Also sind (1) und (2) erfüllt. QED

Wann sind $\in$-Formeln mit eingesetzten Termen absolut? Eine Antwort liefert:

22.31 Satz *Seien W, W' nicht-leere, transitive Terme, $W \subset W'$. $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y})$ sei eine W-W'-absolute $\in$-Formel und $t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y})$ seien Terme.*

(a) *Für $i < n$ gelte: an jeder Stelle, an der u_i in φ frei vorkommt, sei keine der freien Variablen von t_i Laufvariable eines Quantors; d.h., ist $\exists v\, \psi$ oder $\forall v\, \psi$ Teilformel von φ und ist u_i freie Variable von ψ, so ist v keine freie Variable von t_i. Dann gilt*

$$\Big(\big(\varphi(t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})\big)^W \longleftrightarrow \varphi^{W'}(t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})\Big)$$

für alle $\vec{x} \in V$, $\vec{y} \in W$, für die $t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$ ist. Sind überdies $t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y})$ W-W'-absolut, so gilt

$$\big(\varphi^W(t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y}) \longleftrightarrow \varphi^{W'}(t_0^{W'}(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^{W'}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})\big),$$

also

$$\Big(\big(\varphi(t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})\big)^W \longleftrightarrow \big(\varphi(t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})\big)^{W'}\Big)$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in W$ mit $t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$. Insbesondere ist die Formel

$$\varphi(t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y})$$

W-W'-absolut, falls $t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y})$ W-W'-absolut sind und $t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in W$ gilt.

(b) *Sind $t_0(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y})$ W-W'-absolut, so ist die Formel*

$$\exists u_0, \ldots, u_{n-1}\, \big(u_0 = t_0(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y})\big)$$

W-W'-absolut.

Beweis. zu (a). Seien $\vec{x} \in V$ und $\vec{y} \in W$ mit $a_i :\equiv t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$ für $i < n$. Aus den Voraussetzungen von (a) folgt leicht, da die freien Variablen eines jeden t_i in φ nicht quantifiziert sind:

$$\varphi^W(t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y}) \longleftrightarrow \varphi^W(a_0, \ldots, a_{n-1}, \vec{y})$$

und

$$\varphi^{W'}(t_0^W(\vec{x}, \vec{y}), \ldots, t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}), \vec{y}) \longleftrightarrow \varphi^{W'}(a_0, \ldots, a_{n-1}, \vec{y}).$$

Da φ W-W'-absolut und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in W$ gilt, sind die jeweils rechten Seiten der Äquivalenzen gleichwertig. Dies ist gerade die erste Behauptung in (a). Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, da wegen der W-W'-Absolutheit von t_i aus $t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \in W$ folgt $t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) = t_i^W(\vec{x}, \vec{y})$; beachte, daß wir hierbei $\vec{x} \in W$ voraussetzen. Die dritte Behauptung folgt sofort aus der zweiten.

zu (b). Es ist

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in W\ \Big(\big(\exists u_0, \ldots, u_{n-1}\, (u_0 = t_0(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))\big)^W \longleftrightarrow \big(\exists u_0, \ldots, u_{n-1}\, (u_0 = t_0(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))\big)^{W'}\Big),$$

also für alle $\vec{x}, \vec{y} \in W$

$$(*) \quad \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W\, \big(u_0 = t_0^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^W\big) \longleftrightarrow \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W\, \big(u_0 = t_0^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^{W'}\big)$$

zu zeigen. Seien also $\vec{x}, \vec{y} \in W$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1. Es gibt ein $i < n$ mit $t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) \notin W$. Dann ist wegen der W-W'-Absolutheit von t_i auch $t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \notin W'$, d.h., es gilt

$$\neg \exists u_i \in W \; u_i = t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) \;\text{ und }\; \neg \exists u_i \in W' \; u_i = t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Hier impliziert die linke bzw. rechte Seite, daß die linke bzw. rechte Seite von $(*)$ falsch ist. $(*)$ gilt also.
Fall 2. Für alle $i < n$ ist $t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$. Dann gilt $t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) = t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) \in W$ wegen der W-W'-Absolutheit von t_i. Es folgt

$$\begin{aligned}
& \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W \; \big(u_0 = t_0^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^W\big) \\
\iff & \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W \; \big(u_0 = t_0^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^{W'}\big) \\
& (\text{da } \varphi \; W\text{-}W'\text{-absolut ist}) \\
\iff & \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W' \; \big(u_0 = t_0^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^W(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^{W'}\big) \\
& (\text{da } t_i^W \in W \subset W') \\
\iff & \exists u_0, \ldots, u_{n-1} \in W' \; \big(u_0 = t_0^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \ldots \wedge u_{n-1} = t_{n-1}^{W'}(\vec{x}, \vec{y}) \wedge (\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}))^{W'}\big) \\
& (\text{da } t_i^W(\vec{x}, \vec{y}) = t_i^{W'}(\vec{x}, \vec{y})).
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

22.6 Absolutheit rekursiv definierter Terme.

Wir untersuchen nun die Absolutheit von Termen, die mit Hilfe des Rekursionssatzes konstruiert sind. Um ein dementsprechendes Resultat beweisen zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

22.32 Lemma *Es gelte* $\mathbf{ZF}^-$. *Sei U ein nicht-leerer, transitiver Klassenterm und es gelte $(\mathbf{ZF}^-)^U$. A, R und G seien Klassenterme; F sei der kanonische Term, der durch R-Rekursion auf A durch Rekursionsvorschrift G bestimmt ist. Es gelte*

$$\Big(\mathrm{SF}(A, R) \wedge G\colon A \times V \to V\Big)^U.$$

Dann gilt

$$\mathrm{SF}(A^U, R^U), \;\; G^U\colon A^U \times U \to U \;\;\text{ und }\;\; F^U\colon A^U \to U.$$

Für $a \in A^U$ ist

$$\big(F^U(b) \bigm| bR^U a\big) \in U \;\;\text{ und }\;\; (F(a))^U = F^U(a) = G^U\big(a, (F^U(b) \,|\, bR^U a)\big).$$

Im Fall $a \in U \setminus A^U$ ist $(F(a))^U = U \notin U$.

Beweis. Wegen 22.24 gilt

$$(G\colon A \times V \to V)^U \Rightarrow G^U\colon (A \times V)^U \to V^U \Rightarrow G^U\colon A^U \times U \to U.$$

Weiter folgt:

(1) $\quad \mathrm{SF}(A^U, R^U)$.

Beweis. Da unter $\mathbf{ZF}^-$ $\mathrm{SF}(A, R)$ nach 5.16 gleichwertig ist zu

$(*) \quad R \subset A \times A \wedge \forall u \, \exists x \, \big(u \neq \emptyset \to \big(x \in u \wedge \forall y \, (y \in u \to \neg yRx)\big)\big) \wedge \forall x \, \{z \,|\, zRx\} \in V$

und $\big(\mathbf{ZF}^-\big)^U$ gilt, folgen aus $\mathrm{SF}(A, R)^U$ folgende zwei Aussagen:
(a) $\;(R \subset A \times A)^U$.

(b) $\forall x \in U \; \{z \in U \mid (z,x) \in R^U\} \in U$.
Mit dem Modell-Lemma 22.6 und 22.24 folgt

$$\begin{aligned}(R \subset A \times A)^U &\iff \big(\forall z\,(z \in R \to z \in A \times A)\big)^U\\ &\iff \forall z \in U\;(z \in R^U \to z \in A^U \times A^U)\\ &\iff \forall z\,(z \in R^U \to z \in A^U \times A^U) \quad (\text{da } R^U \subset U)\\ &\iff R^U \subset A^U \times A^U.\end{aligned}$$

Wegen (a) gilt also $R^U \subset A^U \times A^U$.

Zum Nachweis der Existenz von R^U-minimalen Elementen fixiere $u \in V$ mit $u \neq \emptyset$. Existiert ein $x \in u \setminus A^U$, so ist x ein R^U-minimales Element von u, denn $(y,x) \in R^U$ impliziert $x \in \operatorname{ran}(R^U) \subset A^U$. Wir können also $u \subset A^U$ annehmen. Sei ϱ der kanonische Term, der durch R-Rekursion (sic!) auf A durch Rekursionsvorschrift

$$H :\equiv \big\{((x,f), \operatorname{lub}\operatorname{ran}(f)) \;\big|\; x \in A \,\wedge\, f\colon x \to \mathrm{On}\big\} \cup \big\{((x,f),\emptyset) \;\big|\; x \in A \,\wedge\, \neg\, f\colon x \to \mathrm{On}\big\}$$

definiert ist. Gilt $\mathrm{SF}(A,R)$, so ist nach dem Rekursionssatz 5.23 unter $\mathbf{ZF}^-$

$$\varrho\colon A \to \mathrm{On} \quad \text{und} \quad \varrho(x) = \operatorname{lub}\big\{\varrho(y) \;\big|\; yRx\big\} \quad \text{für alle } x \in A.$$

Also haben wir

$$\mathbf{ZF}^- \vdash \mathrm{SF}(A,R) \longrightarrow \Big(\varrho\colon A \to \mathrm{On} \wedge \forall x,y \in A\;\big(yRx \to \varrho(y) \in \varrho(x)\big)\Big).$$

Wegen $(\mathbf{ZF}^-)^U$ und $\mathrm{SF}(A,R)^U$ folgt hieraus

$(*)$ $\quad \varrho^U\colon A^U \to (\mathrm{On} \cap U) \,\wedge\, \forall x,y \in A^U\;\big(yR^Ux \to \varrho^U(y) \in \varrho^U(x)\big)$.

Betrachte $x \in u$ mit $\varrho^U(x) = \min\big\{\varrho^U(y) \;\big|\; y \in u\big\}$. x existiert wegen $\emptyset \neq u \subset A^U = \operatorname{dom}(\varrho^U)$ und $\operatorname{ran}(\varrho^U) \subset \mathrm{On}$. x ist R^U-minimales Element von u: gäbe es nämlich $y \in u$ mit yRx, so wäre nach $(*)$ $\varrho^U(y) \in \varrho^U(x)$, was der Minimalität von $\varrho^U(x)$ widerspricht.

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\forall x \in U\;\{z \in U \mid (z,x) \in R^U\} \in U &\iff \forall x \in U\;\{z \mid (z,x) \in R^U\} \in U\\ &\qquad (\text{da } z \in \{z\} \in (z,x) \in R^U \subset U \text{ impliziert } z \in U)\\ &\iff \forall x\,\{z \mid (z,x) \in R^U\} \in U;\end{aligned}$$

hierbei gilt die letzte Äquivalenz, da $\{z \mid (z,x) \in R^U\} = \emptyset$ im Fall $x \notin U$ (also speziell $x \notin \operatorname{ran}(R^U)$) gilt. (b) impliziert nun die Gültigkeit von $\forall x\,\{z \mid (z,x) \in R^U\} \in U$.

Insgesamt haben wir nachgewiesen, daß $(*)$ mit R^U statt R und A^U statt A gilt. Damit ist $\mathrm{SF}(A^U, R^U)$ gezeigt. qed(1)

Aus dem Rekursionssatz 5.23 und der Definition des Termes $F(a)$, siehe 2.49, folgt

$$\begin{aligned}&\mathbf{ZF}^- \vdash \big(\mathrm{SF}(A,R) \,\wedge\, G\colon A \times V \to V\big)\\ &\qquad \longrightarrow \big(F\colon A \to V \,\wedge\, \forall a \in A\,\exists y\,\big(y = (F(b)|bRa) \,\wedge\, F(a) = G(a,y)\big) \,\wedge\, \forall a\,\big(a \notin A \to F(a) = V\big)\big).\end{aligned}$$

Wegen $(\mathbf{ZF}^-)^U$ gilt dann die rechts stehende $\in$-Formel, wenn sie auf U relativiert wird. Wir haben also

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{SF}(A,R) \,\wedge\, G\colon A \times V \to V\big)^U\\ &\longrightarrow \big(F\colon A \to V \,\wedge\, \forall a \in A\,\exists y\,\big(y = (F(b)|bRa) \,\wedge\, F(a) = G(a,y)\big) \,\wedge\, \forall a\,(a \notin A \to F(a) = V)\big)^U.\end{aligned}$$

Da $(\mathrm{SF}(A,R) \wedge G{:}\, A \times V \to V)^U$ gilt, ist die Konklusion dieser Formel erfüllt:

$$\big(F{:}\, A \to V \;\wedge\; \forall a \in A\, \exists y\, \big(y = (F(b)|bRa) \;\wedge\; F(a) = G(a,y)\big) \;\wedge\; \forall a\, \big(a \notin A \to F(a) = V\big)\big)^U.$$

Mit dem Relativierungslemma 22.22 und 22.25 folgt leicht, daß dies gleichwertig ist mit:

$$F^U{:}\, A^U \to U \;\wedge\; \forall a \in A^U\, \exists y \in U\, \big(y = (F(b)|bRa)^U \;\wedge\; F^U(a) = G^U(a,y)\big) \;\wedge\; \forall a \in U \setminus A^U\; F(a)^U = U.$$

Es bleibt zu zeigen, daß für $a \in A^U$ gilt $(F(b)|bRa)^U = (F^U(b)|bR^U a)$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
\big(F(b) \mid bRa\big)^U &= \big\{z \mid \exists b,y\,((b,a) \in R \;\wedge\; y = F(b) \;\wedge\; z = (b,y))\big\}^U \\
&= \big\{z \in U \mid \exists b,y \in U\,((b,a) \in R^U \;\wedge\; y = (F(b))^U \;\wedge\; z = (b,y))\big\} \\
&= \big\{z \in U \mid \exists b,y \in U\,((b,a) \in R^U \;\wedge\; y = F^U(b) \;\wedge\; z = (b,y))\big\} \\
&\quad \text{(da } b \in \mathrm{dom}(R^U) \subset A^U = \mathrm{dom}(F^U) \text{ gilt)} \\
&= \big\{z \mid \exists b,y \in U\,((b,a) \in R^U \;\wedge\; y = F^U(b) \;\wedge\; z = (b,y))\big\} \\
&\quad \text{(da } (b,y) \in U \text{ für } b,y \in U \text{ wegen } (\mathbf{Paar})^U\text{)} \\
&= \big\{z \mid \exists b,y\,((b,a) \in R^U \;\wedge\; y = F^U(b) \;\wedge\; z = (b,y))\big\} \\
&\quad \text{(da } b,y \in A^U \subset U \text{ für } (b,y) \in R^U \text{ wegen } R^U \subset A^U \times A^U\text{)} \\
&= \big(F^U(b) \mid bR^U a\big).
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. QED

Nun können wir das angekündigte Resultat über Absolutheit von rekursiv definierten Termen beweisen.

22.33 Satz *Es gelte* $\mathbf{ZF}^-$. *Seien* W, W' *nicht-leere, transitive Terme mit* $W \subset W'$. *Es gelte* $(\mathbf{ZF}^-)^W$ *und* $(\mathbf{ZF}^-)^{W'}$. *Seien* A, R *und* G *Klassenterme und es gelte*

(∗) $\quad \Big(\mathrm{SF}(A,R) \wedge G{:}\, A \times V \to V\Big)^W$

und

(∗∗) $\quad \Big(\mathrm{SF}(A,R) \wedge G{:}\, A \times V \to V\Big)^{W'}.$

Sei F *der kanonische Term, der durch* R*-Rekursion auf* A *durch Rekursionsvorschrift* G *bestimmt ist. Die* $\in$*-Formeln*

$$x \in A \quad \text{und} \quad yRx$$

seien W*-*W'*-absolut und es gelte*

$$\forall a \in A^W\, \forall y \in W\; G^W(a,y) = G^{W'}(a,y).^{186}$$

W *sei relativ zu* W' *bezüglich* R*-Vorgängern abgeschlossen, d.h.,*

$$\forall x \in W\, \forall y \in W'\, \Big(\big(yRx\big)^{W'} \longrightarrow y \in W\Big).$$

Dann ist der Term $F(a)$ W*-*W'*-absolut.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes gelten die Aussagen von 22.32 mit W bzw. W' statt U. Wir zeigen zunächst durch R^W-Induktion:

(1) $\quad a \in A^W \longrightarrow F^W(a) = F^{W'}(a).$

[186] äquivalent, siehe 22.25: $\forall a \in \mathrm{On} \cap W\, \forall y \in W\; (G(a,y))^W = (G(a,y))^{W'}$.

Beweis. Ist $a \in A^W$, so ist wegen der W-W'-Absolutheit der Formel $x \in A$ auch $a \in A^{W'}$. Nach 22.32 gilt

$$F^{W'}(a) = G^{W'}(a, y) \text{ mit } y :\equiv \big(F^{W'}(b) \mid bR^{W'}a\big).$$

Hierbei ist $y \in W'$. Gilt $bR^{W'}a$, also $(bRa)^{W'}$, so folgt zunächst $b \in W$, da W relativ zu W' bzgl. R-Vorgängern abgeschlossen ist. Aus $(bRa)^{W'}$ sowie $a, b \in W$ folgt $(bRa)^W$, also bR^Wa, wegen der W-W'-Absolutheit der Formel xRz. Wir haben also

$$y = \big(F^{W'}(b) \mid bR^W a\big).$$

Gilt bR^Wa, so ist $b \in A^W$ wegen $b \in \mathrm{dom}(R^W) \subset A^W$; in diesem Fall ist nach Induktionsvoraussetzung $F^{W'}(b) = F^W(b)$, so daß wir

$$y = \big(F^W(b) \mid bR^W a\big)$$

nachgewiesen haben. Nach dem Lemma ist $y \in W$. Es folgt

$$F^{W'}(a) = G^{W'}(a, y) = G^W(a, y) = F^W(a),$$

wobei wir 22.32 (für $U :\equiv W$) herangezogen haben. Dies war zu zeigen. qed(1)

Aus (1) folgt sofort

(2) $\quad F(a)^{W'} = F(a)^W \in W$, falls $a \in A^W$.

Ist andererseits $a \in W \setminus A^W$, so gilt auch $a \in W' \setminus A^{W'}$, da $W \subset W'$ und $a \notin A^{W'}$ wegen der W-W'-Absolutheit der Formel $x \in A$ gilt. 22.32 liefert also

$$F(a)^W = W \notin W \text{ und } F(a)^{W'} = W' \notin W'.$$

Für den Term $F(a)$ ist also insgesamt gezeigt:

$$\forall a \in W\ (F(a)^W \in W \longleftrightarrow F(a)^{W'} \in W') \text{ und } \forall a \in W\ (F(a) \in W \longrightarrow F(a)^W = F(a)^{W'}).$$

Nach 22.28 bedeutet das gerade, daß $F(a)$ W-W'-absolut ist. QED

22.34 Corollar *Es gelte* $\mathbf{ZF}^-$. *Seien* W, W' *nicht-leere, transitive Terme mit* $W \subset W'$. *Es gelte* $(\mathbf{ZF}^-)^W$ *und* $(\mathbf{ZF}^-)^{W'}$.

(a) *Sei* G *ein Klassenterm und es gelte*

$$\Big(G\colon \mathrm{On} \times V \to V\Big)^W \quad \text{und} \quad \Big(G\colon \mathrm{On} \times V \to V\Big)^{W'}.$$

Sei F *der kanonische Term, der durch* $<$*-Rekursion auf* On *durch Rekursionsvorschrift* G *bestimmt ist. Es gelte*

$$\forall a \in \mathrm{On} \cap W\ \forall y \in W\ G^W(a, y) = G^{W'}(a, y).$$ [187]

Dann ist der Term $F(a)$ W-W'*-absolut.*

(b) *Sei* G *ein Klassenterm und es gelte*

$$\Big(G\colon V \times V \to V\Big)^W \quad \text{und} \quad \Big(G\colon V \times V \to V\Big)^{W'}.$$

Sei F *der kanonische Term, der durch* $\in$*-Rekursion auf* V *durch Rekursionsvorschrift* G *bestimmt ist. Es gelte*

$$\forall a, y \in W\ G^W(a, y) = G^{W'}(a, y).$$ [188]

Dann ist der Term $F(a)$ W-W'*-absolut.*

[187] bzw. $\forall a \in \mathrm{On} \cap W\ \forall y \in W\ (G(a, y))^W = (G(a, y))^{W'}$.

[188] bzw. $\forall a, y \in W\ (G(a, y))^W = (G(a, y))^{W'}$.

Beweis. Wir beweisen (a). (b) zeigt man analog.
Wegen $\mathbf{ZF}^- \vdash \mathrm{SF}(\mathrm{On}, <)$ und $(\mathbf{ZF}^-)^{W,W'}$ gelten $(*)$ und $(**)$ des Satzes (mit $A :\equiv \mathrm{On}$, $R :\equiv <$). Da $x \in \mathrm{On}$ eine $\Sigma_0^{\mathbf{EML}}$-Formel ist, ist

$$x < y \;\equiv\; x \in \mathrm{On} \wedge y \in \mathrm{On} \wedge x \in y$$

eine $\Sigma_0^{\mathbf{EML}}$-Formel, also W-W'-absolut. Wegen $\mathrm{On}^W = \mathrm{On} \cap W$ ist die in (a) genannte Bedingung für G^W und $G^{W'}$ gerade die im Satz verlangte. Ferner ist W relativ zu W' bzgl. $<$-Vorgängern abgeschlossen, denn ist $y \in W$, so gilt

$$(x < y)^{W'} \longrightarrow x \in y \;\wedge\; y \in W,$$

also auch $x \in W$, da W transitiv ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. QED

Als Beispiel für eine Anwendung von 22.33 zeigen wir:

22.35 Satz *Es gelte* $\mathbf{ZF}^-$. *Seien W, W' nicht-leere, transitive Terme, $W \subset W'$. Es gelte* $(\mathbf{ZF}^-)^W$ *und* $(\mathbf{ZF}^-)^{W'}$. *Dann ist der Term* $\mathrm{rg}(a)$ *W-W'-absolut. Insbesondere gilt* $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}^W(a) \in W$ *für alle* $a \in W$.

Beweis. rg ist der kanonische Term, der durch $\in$-Rekursion auf V durch Rekursionsvorschrift

$$G :\equiv \bigl\{((x,f), \mathrm{lub}\,\mathrm{ran}(f)) \bigm| f\colon x \to \mathrm{On}\bigr\} \cup \bigl\{((x,f),\emptyset) \bigm| \neg\, f\colon x \to \mathrm{On}\bigr\}$$

definiert ist. Wegen $\mathbf{ZF}^- \vdash G\colon V \times V \to V$ und $(\mathbf{ZF}^-)^{W,W'}$ gilt

$$\bigl(G\colon V \times V \to V\bigr)^W \quad \text{und} \quad \bigl(G\colon V \times V \to V\bigr)^{W'}.$$

Insbesondere gilt also $G^W\colon W \times W \to W$. Da

$$\mathbf{ZF}^- \vdash y = G(x,f) \longleftrightarrow y \in \mathrm{On} \wedge \bigl((f\colon x \to y \;\wedge\; \forall z \in y\, \neg\, f\colon x \to z) \;\vee\; (\neg\, f\colon x \to y \;\wedge\; y = \emptyset)\bigr)$$

und $(\mathbf{ZF}^-)^{W,W'}$ gilt, folgt für $x, f, y \in W$ durch Relativierung obiger $\in$-Formel (beachte, daß die Formel $h\colon u \to v$ W-absolut und W'-absolut ist):

$$y = G^W(x,f) \longleftrightarrow y \in \mathrm{On} \cap W \;\wedge\; \bigl((f\colon x \to y \;\wedge\; \forall z \in y\, \neg\, f\colon x \to z) \;\vee\; (\neg\, f\colon x \to y \;\wedge\; y = \emptyset)\bigr)$$

und

$$y = G^{W'}(x,f) \longleftrightarrow y \in \mathrm{On} \cap W' \;\wedge\; \bigl((f\colon x \to y \;\wedge\; \forall z \in y\, \neg\, f\colon x \to z) \;\vee\; (\neg\, f\colon x \to y \;\wedge\; y = \emptyset)\bigr).$$

Also für $x, f, y \in W$

$$y = G^W(x,f) \longleftrightarrow y = G^{W'}(x,f).$$

Da $G^W(x,f) \in W$ gilt, können wir hier $y :\equiv G^W(x,f)$ setzen und erhalten $G^W(x,f) = G^{W'}(x,f)$. Nach Teil (b) von 22.34 ist damit alles bewiesen. QED

22.36 Corollar *Es gelte* $\mathbf{ZF}^-$. *W sei ein nicht-leerer, transitiver Term mit* $(\mathbf{ZF}^-)^W$.
Dann gilt: $\forall \alpha \in \mathrm{On} \cap W\; (V_\alpha)^W = V_\alpha \cap W$.

Beweis. Nach 22.35 ist rg W-absolut. Also gilt

$$(V_\alpha)^W = \{x \mid \mathrm{rg}(x) < \alpha\}^W = \{x \in W \mid \underbrace{\mathrm{rg}(x)^W}_{=\mathrm{rg}(x)} < \alpha\} = V_\alpha \cap W,$$

wie behauptet. QED

22.7 Relativierungen und Absolutheit bei Kardinalzahlen.

Wir untersuchen, wie sich Kardinalitäten unter Relativierungen verhalten.

22.37 Satz *Sei W ein nicht-leerer, transitiver Term mit* $\mathbf{ZFC}^W$*. Sei $x \in W$ Dann gilt:*

(a) $\overline{\overline{x}}^W = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f \in W\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha\}$.

(b) $\forall \alpha \in \mathrm{On} \cap W\ \big(\omega \leq \alpha \longrightarrow \omega \leq \overline{\overline{\alpha}}^W \leq \alpha\big)$.

(c) $\mathrm{Card}^W = \{\overline{\overline{z}}^W \mid z \in W \wedge \overline{\overline{z}}^W \geq \omega\} = \{\aleph_\alpha^W \mid \alpha \in \mathrm{On} \cap W\}$*. Hierbei und im folgenden steht* $\aleph_\alpha^W$ *für* $(\aleph_\alpha)^W$.

(d) $\mathrm{Cd}^W = \omega \cup \mathrm{Card}^W$.

(e) $\forall \alpha \in \mathrm{On} \cap W\ (\alpha^+)^W = \min\{\kappa \in \mathrm{Card}^W \mid \kappa > \alpha\}$.

(f) $\forall \alpha \in \mathrm{On} \cap W\ \forall \kappa \in \mathrm{Card}^W\ \big(\kappa = \aleph_\alpha^W \longleftrightarrow (\kappa^+)^W = \aleph_{\alpha+1}^W\big)$.

Beweis. zu (a). Nach Definition gilt $\overline{\overline{x}} = \{\beta \mid \beta \in \mathrm{On} \wedge \forall \alpha\, ((\alpha \in \mathrm{On} \wedge \exists f\, f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha) \rightarrow \beta \in \alpha)\}$. Wegen der W-V-Absolutheit der Formel $f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha$, siehe 22.20, folgt für $x \in W$:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{x}}^W &= \{\beta \in W \mid \beta \in \mathrm{On} \cap W \wedge \forall \alpha \in W\ ((\alpha \in \mathrm{On} \cap W \wedge \exists f \in W\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha) \rightarrow \beta \in \alpha)\}\\ &= \{\beta \mid \beta \in \mathrm{On} \cap W \wedge \forall \alpha\, ((\alpha \in \mathrm{On} \cap W \wedge \exists f \in W\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha) \rightarrow \beta \in \alpha)\}\\ &= \min\{\alpha \in \mathrm{On} \cap W \mid \exists f \in W\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha\}.\end{aligned}$$

Für $f \in W$ ist $\mathrm{ran}(f) \in W$ nach 22.26, so daß hier „$\alpha \in \mathrm{On} \cap W$" durch „$\alpha \in \mathrm{On}$" ersetzt werden kann.

zu (b). Aus $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \alpha \in \mathrm{On}\ \big(\omega \leq \alpha \longrightarrow \omega \leq \overline{\overline{\alpha}} \leq \alpha\big)$ folgt nach dem Modell-Lemma und dem Relativierungslemma $\forall \alpha \in \mathrm{On}^W\ \big(\omega^W \leq \alpha \longrightarrow \omega^W \leq \overline{\overline{\alpha}}^W \leq \alpha\big)$. Wegen 22.24 und 22.30 folgt hieraus die Behauptung.

zu (c). Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \exists \alpha\, \overline{\overline{x}} = \alpha$ gilt $\overline{\overline{x}}^W \in W$ für alle $x \in W$. Aus $\mathrm{Card} = \{\alpha \mid \omega \leq \alpha \wedge \exists z\, \alpha = \overline{\overline{z}}\}$ folgt also

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}^W &= \{\alpha \in W \mid \omega^W \leq \alpha \wedge \exists z \in W\ \alpha = \overline{\overline{z}}^W\}\\ &= \{\alpha \mid \omega \leq \alpha \wedge \exists z \in W\ \alpha = \overline{\overline{z}}^W\}\\ &= \{\overline{\overline{z}}^W \mid \omega \leq \overline{\overline{z}}^W \wedge z \in W\}.\end{aligned}$$

Aus $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \kappa\, \big(\kappa \in \mathrm{Card} \longleftrightarrow \exists \alpha\, (\alpha \in \mathrm{On} \wedge \kappa = \aleph_\alpha)\big)$ folgt wegen $\mathbf{ZFC}^W$

$$\forall \kappa \in W\ \big(\kappa \in \mathrm{Card}^W \longleftrightarrow \exists \alpha \in W\ (\alpha \in \mathrm{On}^W \wedge \kappa = \aleph_\alpha^W)\big)$$

und dies ist gleichwertig zu $\forall \kappa\, \big(\kappa \in \mathrm{Card}^W \longleftrightarrow \exists \alpha\, (\alpha \in \mathrm{On} \cap W \wedge \kappa = \aleph_\alpha^W)\big)$, also $\mathrm{Card}^W = \{\aleph_\alpha^W \mid \alpha \in \mathrm{On} \cap W\}$.

zu (d). Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \kappa\, \big(\kappa \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow (\kappa < \omega \vee \kappa \in \mathrm{Card})\big)$ gilt

$$\forall \kappa \in W\ \big(\kappa \in \mathrm{Cd}^W \longleftrightarrow (\kappa < \omega^W \vee \kappa \in \mathrm{Card}^W)\big),$$

was wegen $\omega^W = \omega \subset W$ und $\mathrm{Cd}^W, \mathrm{Card}^W \subset W$ mit $\forall \kappa\, \big(\kappa \in \mathrm{Cd}^W \longleftrightarrow (\kappa < \omega \vee \kappa \in \mathrm{Card}^W)\big)$ gleichwertig ist.

zu (e). Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \alpha \in \mathrm{On}\ \Big(\alpha^+ \in \mathrm{Card} \wedge \alpha < \alpha^+ \wedge \forall \kappa \in \mathrm{Card}\ \big((\alpha < \kappa \wedge \kappa \leq \alpha^+) \longrightarrow \kappa = \alpha^+\big)\Big)$ folgt m.H. des Modell-Lemmas und des Relativierungslemmas

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathrm{On} \cap W\ \Big(&(\alpha^+)^W \in \mathrm{Card}^W \wedge \alpha < (\alpha^+)^W \wedge\\ &\forall \kappa \in \mathrm{Card}^W\ \big((\alpha < \kappa \wedge \kappa \leq (\alpha^+)^W) \longrightarrow \kappa = (\alpha^+)^W\big)\Big)\end{aligned}$$

zu (f). Dies folgt analog aus **ZFC** $\vdash \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \forall\kappa \in \mathrm{Card}\ \big(\kappa = \aleph_\alpha \longleftrightarrow \kappa^+ = \aleph_{\alpha+1}\big)$.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Zwischen zwei **ZFC**-Modellen stellen wir dann bezüglich Kardinalitäten folgende Beziehungen fest:

22.38 Satz *Seien W,W' nicht-leere, transitive Terme mit $W \subset W'$. Es gelte* $\mathbf{ZFC}^W$ *und* $\mathbf{ZFC}^{W'}$. *Sei $x \in W$. Dann gilt:*
(a) $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{x}}^{W'} \leq \overline{\overline{x}}^{W}$.
(b) $x \in \mathrm{Card}^{W'} \longrightarrow x \in \mathrm{Card}^W$*; m.a.W.: Kardinalzahlen sind* **abwärts absolut**.
(c) Die $\in$-Formel „x ist endlich“ ist W-W'-absolut.
(d) $\aleph_0^W = \aleph_0^{W'}$.

Beweis. zu (a). Wegen $V \supset W' \supset W$ gilt

$$\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha\} \supset \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f \in W'\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha\} \supset \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists f \in W\ f\colon x \xrightarrow{bij.} \alpha\}.$$

Da $\mathrm{On} \supset A \supset B$ auf $\min B \geq \min A$ führt, folgt aus 22.37 die Behauptung.
zu (b). Sei $x \in \mathrm{Card}^{W'} \cap W$. Wegen **ZFC** $\vdash \forall\alpha \in \mathrm{Card}\ \overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ gilt dann $\overline{\overline{x}}^{W'} = x$, und es folgt mit (a) und 22.37(b): $x = \overline{\overline{x}}^{W'} \leq \overline{\overline{x}}^{W} \leq x$. Also $x = \overline{\overline{x}}^{W}$, was wegen $x \in W$ nach 22.37(c) auf $x \in \mathrm{Card}^W$ führt.
zu (c). Es genügt offenbar, den Fall $W' = V$ zu betrachten. Wegen **ZFC** $\vdash x$ ist endlich $\longleftrightarrow \overline{\overline{x}} < \omega$ und $\omega^W = \omega$ gilt $\forall x \in W\big((x \text{ ist endlich})^W \longleftrightarrow \overline{\overline{x}}^{W} < \omega\big)$, so daß

$$\forall x \in W\big(\overline{\overline{x}}^{W} < \omega \longleftrightarrow \overline{\overline{x}} < \omega\big)$$

zu zeigen ist. „$\Rightarrow$“ folgt hier sofort aus (a). Um „$\Leftarrow$“ zu beweisen fixiere $x \in W$ und nimm $\kappa :\equiv \overline{\overline{x}}^{W} \geq \omega$ an. Dann existiert nach 22.37(a) ein $f \in W$ mit $f\colon x \xrightarrow{bij.} \kappa$. Wäre $\overline{\overline{x}} < \omega$, so gäbe es ein $n < \omega$ und ein $g \in V$ mit $g\colon n \xrightarrow{bij.} x$, so daß $f \circ g$ eine Bijektion von n auf $\kappa \geq \omega$ wäre. Eine derartige Bijektion existiert aber nicht. Also muß $\overline{\overline{x}} \geq \omega$ sein.
zu (d). Dies folgt wegen $\omega^W = \omega^{W'} = \omega$ und $\mathbf{ZFC}^{W,W'}$ aus **ZFC** $\vdash \aleph_0 = \omega$.
Damit ist alles gezeigt. QED

Wir notieren das Transformationsverhalten einiger $\in$-Sätze, die Kardinalzahlen involvieren.

22.39 Lemma *Sei W ein nicht-leerer, transitiver Term mit* $\mathbf{ZFC}^W$. *Dann gilt:*
(a) $\forall\kappa \in \mathrm{Cd}^W\ \forall\mu\ \Big(\mu = \big(\kappa^+\big)^W \longrightarrow \big(\mathrm{cf}(\mu)^W = \mu \wedge (\mu \textit{ ist regulär})^W\big)\Big)$.
(b) $\forall\alpha \in \mathrm{On}\cap W\ \forall\kappa\ \Big(\kappa = \aleph_\alpha^W \longrightarrow \big(\big({}^{\aleph_\alpha}2\big)^W = \big({}^{\kappa}2\big)^W \wedge \big({}^{\aleph_\alpha}\omega\big)^W = \big({}^{\kappa}\omega\big)^W \wedge \big({}^{\aleph_\alpha}\mathrm{On}\big)^W = \big({}^{\kappa}\mathrm{On}\big)^W\big)\Big)$.
(c) $\forall x \in W\ \Big(\big(x \subset \mathrm{Cd}^W \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Cd}^W\big) \wedge \big((x \subset \mathrm{Card}^W \wedge x \neq \emptyset) \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Card}^W\big)\Big)$.

Beweis. zu (a). Dies folgt analog zu 22.37(e) aus

$$\mathbf{ZFC} \vdash \forall\kappa \in \mathrm{Cd}\ \forall\mu\ \big(\mu = \kappa^+ \longrightarrow \big(\mathrm{cf}(\mu) = \mu \wedge \mu \text{ ist regulär}\big)\big).$$

zu (b). Wir beweisen nur die Aussage über On. Sei also $\alpha \in \mathrm{On}\cap W$ und $\kappa = \aleph_\alpha^W$. Dann folgt mit 22.25

$$\begin{aligned}\big({}^{\aleph_\alpha}\mathrm{On}\big)^W &= {}^{(\aleph_\alpha^W)}(\mathrm{On}^W) \cap W = {}^{\kappa}(\mathrm{On}^W) \cap W\\ &= {}^{(\kappa^W)}(\mathrm{On}^W) \cap W \quad \text{(Definition der Relativierung bei Variablen)}\\ &= \big({}^{\kappa}\mathrm{On}\big)^W.\end{aligned}$$

zu (c). Dies folgt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Terme $\bigcup x$ und $\emptyset$ W-V-absolut sind, auf die bekannte Art und Weise aus

$$\mathbf{ZFC} \vdash \forall x \Big(\big(x \subset \mathrm{Cd} \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Cd}\big) \wedge \big((x \subset \mathrm{Card} \wedge x \neq \emptyset) \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Card}\big)\Big).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Die nächsten Resultate zeigen analog zu 22.37 und 22.38 Eigenschaften der Konfinalität $\mathrm{cf}(\delta)$ bei Relativierung auf.

22.40 Satz *Sei W ein nicht-leerer, transitiver Term mit $\mathbf{ZFC}^W$. Sei $\delta \in \mathrm{On} \cap W$, $\mathrm{Lim}(\delta)$.*[189] *Dann gilt:*

(a) $\mathrm{cf}(\delta)^W = \min\{\overline{\overline{z}}^W \mid z \in W \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\}$.

(b) $\omega \leq \mathrm{cf}(\delta)^W \leq \delta$.

Beweis. zu (a). Es gilt $\mathrm{cf}(\delta) = \big\{\beta \mid \beta \in \mathrm{On} \wedge \forall z \big((z \subset \delta \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta) \to \beta \in \overline{\overline{z}}\big)\big\}$. Unter Ausnutzung der Absolutheit der Formeln $z \subset \delta$ und „z ist unbeschränkt in δ“ folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\delta)^W &= \big\{\beta \in W \mid \beta \in \mathrm{On} \cap W \wedge \forall z \in W \ \big((z \subset \delta \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta) \to \beta \in \overline{\overline{z}}^W\big)\big\}\\ &= \big\{\beta \mid \beta \in \mathrm{On} \cap W \wedge \forall z \in W \ \big((z \subset \delta \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta) \to \beta \in \overline{\overline{z}}^W\big)\big\}\\ &= \min\{\overline{\overline{z}}^W \mid z \in W \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\}.\end{aligned}$$

zu (b). Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \gamma \big(\mathrm{Lim}(\gamma) \longrightarrow \omega \leq \mathrm{cf}(\gamma) \leq \gamma\big)$ folgt m.H. des Modell-Lemmas und des Relativierungslemmas $\omega^W \leq \mathrm{cf}(\delta)^W \leq \delta$, woraus wegen $\omega^W = \omega$ die Behauptung folgt.

Damit ist alles gezeigt. QED

22.41 Satz *Seien W,W' nicht-leere, transitive Terme mit $W \subset W'$. Es gelte $\mathbf{ZFC}^W$ und $\mathbf{ZFC}^{W'}$. Sei $\delta \in \mathrm{On} \cap W$, $\mathrm{Lim}(\delta)$. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{cf}(\delta) \leq \mathrm{cf}(\delta)^{W'} \leq \mathrm{cf}(\delta)^W$.

(b) $\big(\delta \textit{ ist regulär}\big)^{W'} \longrightarrow \big(\delta \textit{ ist regulär}\big)^W$.

Beweis. zu (a). Aus den aus 22.38(a) folgenden Ungleichungen $\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{z}}^{W'}$, falls $z \in W'$; $\overline{\overline{z}}^{W'} \leq \overline{\overline{z}}^W$, falls $z \in W$; ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $A \subset B \subset \mathrm{On}$ auf $\min B \leq \min A$ führt:

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\delta) &= \min\{\overline{\overline{z}} \mid z \in V \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\}\\ &\leq \min\{\overline{\overline{z}} \mid z \in W' \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\}\\ &\leq \min\{\overline{\overline{z}}^{W'} \mid z \in W' \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\} \ \big(= \mathrm{cf}(\delta)^{W'}\big)\\ &\leq \min\{\overline{\overline{z}}^{W'} \mid z \in W \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\}\\ &\leq \min\{\overline{\overline{z}}^{W} \mid z \in W \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\} \ \big(= \mathrm{cf}(\delta)^{W}\big).\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

zu (b). Es gilt $\big(\delta \text{ regulär }\big)^{W'} \Rightarrow \big(\mathrm{cf}(\delta) = \delta\big)^{W'} \Rightarrow \mathrm{cf}(\delta)^{W'} = \delta$. Hieraus folgt mit (a) und 22.40(b): $\delta = \mathrm{cf}(\delta)^{W'} \leq \mathrm{cf}(\delta)^W \leq \delta$, also $\delta = \mathrm{cf}(\delta)^W$, was zu $\big(\delta = \mathrm{cf}(\delta)\big)^W$, d.h., $\big(\delta \text{ ist regulär}\big)^W$ äquivalent ist. QED

[189] Dann gilt auch $\mathrm{Lim}(\delta)^W$, vgl. 22.20.

Ein Wort zu Spracherweiterungen.

Man sieht leicht, daß alle Überlegungen die Relativierung und Absolutheit von $\in$-Formeln und Termen betreffend richtig bleiben, wenn wir auf Terme relativieren, die ein zusätzliches Konstantensymbol M enthalten, also z.B. auf M selbst relativieren. Bei Forcing-Konstruktionen werden im allgemeinen derartige Relativierungen durchgeführt.

23 Relative Konsistenzbeweise.

23.1 Die Methode der inneren Modelle.

23.1 Definition Sei W ein Klassenterm. W heißt **inneres Modell** von **ZF**, falls $W \neq \emptyset$ und transitiv ist und φ^W für jedes **ZF**-Axiom φ gilt.

Innere Modelle lassen sich wie folgt für relative Konsistenzbeweise nutzen:

23.2 Satz *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein inneres Modell von* **ZF***und φ ein $\in$-Satz mit* $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^W$. *Dann gilt* $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZF} + \varphi)$.

Beweis. Angenommen, $\mathbf{ZF}+\varphi$ ist inkonsistent. Dann gilt $\mathbf{ZF}+\varphi \vdash x \neq x$. Sei Φ ein endliches Teilsystem von **ZF** mit $\Phi + \varphi \vdash x \neq x$. Nach dem Modell-Lemma 22.6 gilt dann

$$\mathbf{ZF} \vdash \bigwedge\left(\Phi^W\right) \ \wedge \varphi^W \longrightarrow \forall x \in W\, x \neq x.$$

Da nach Voraussetzung $\mathbf{ZF} \vdash \bigwedge\left(\Phi^W\right) \ \wedge \varphi^W$ gilt, folgt $\mathbf{ZF} \vdash \forall x \in W\ x \neq x$. Andererseits gilt $\mathbf{ZF} \vdash W \neq \emptyset$, d.h., $\mathbf{ZF} \vdash \exists x \in W\ x = x$. Also ist **ZF** inkonsistent. QED

23.3 Bemerkung Unter Verwendung von 23.2 kann man relative Konsistenzbeweise mit Hilfe der **Methode der inneren Modelle** wie folgt führen. Sei φ ein $\in$-Satz und es sei die (relative) Konsistenz von $\mathbf{ZF} + \varphi$ zu zeigen. Hierzu konstruiere man einen unter der Voraussetzung **ZF** nicht-leeren, transitiven Klassenterm W mit $(\mathbf{ZF} + \varphi)^W$. Wir werden dieses Verfahren in 24.10 mit $\varphi \equiv (\mathbf{AC})$ anwenden. Eine weitere Anwendung haben innere Modelle beim Nachweis der relativen Konsistenz von **GCH** mit Hilfe des inneren Modells L der konstruktiblen Mengen.

Wir entwickeln ein Kriterium dafür, ob ein vorgelegter Klassenterm W ein inneres Modell ist. Hierzu benötigen wir die folgenden zwei Begriffe:

23.4 Definition Sei W ein Klassenterm.

(a) W ist **fast-universell** $:\equiv \forall x(x \subset W \longrightarrow \exists y \in W\ x \subset y)$.

(b) W ist **Σ_0-abgeschlossen**, falls für jede Σ_0-Formel $\varphi(x, \vec{y})$ gilt: $\forall a, \vec{y} \in W\ \left\{x \mid x \in a \wedge \varphi(x, \vec{y})\right\} \in W$.

23.5 Lemma *Für jede $\in$-Formel φ definiere die Σ_0-Formel $\bar{\varphi}$, indem jeder Quantor $\exists x$ von φ durch $\exists x \in v_j$ ersetzt wird, wobei für jeden Quantor in φ ein neues v_j gewählt wird.*[190]
Gelte nun **ZF**. *Sei W ein transitiver, fast-universeller Klassenterm und $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ eine $\in$-Formel. Sei $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Dann gilt*

$$\forall x \in W\, \exists y_1, \ldots, y_n \in W\, \forall x_1, \ldots, x_m \in x\ \left(\varphi^W(x_1, \ldots, x_m) \longleftrightarrow \bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\right).$$

[190] O.E. seien alle $\in$-Formeln nur unter Verwendung von $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ aufgebaut. Auf eine formale Definition von $\bar{\varphi}$ verzichten wir.

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Formelaufbau durch. Der atomare Fall, der $\wedge$-Fall und der $\neg$-Fall sind einfach und können dem Leser überlassen bleiben. Es gelte nun $\varphi \equiv \exists v\, \psi(v, x_1, \ldots, x_m)$. Um die Bezeichnung der Variablen festzulegen sei $\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}(v, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1})$ und $\bar{\varphi} \equiv \exists v \in y_n\, \bar{\psi}(v, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Sei $x \in W$. Für $x_1, \ldots, x_m \in x$ sei

$$\alpha(x_1, \ldots, x_m) :\equiv \min\Big(\big\{\mathrm{rg}(v) \;\big|\; v \in W \wedge \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m)\big\}\Big) + 1$$

(wobei wir $\min(\emptyset) :\equiv 0$ setzen) und

$$F(x_1, \ldots, x_m) :\equiv \{v \,|\, v \in W \wedge \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m)\} \cap V_{\alpha(x_1, \ldots, x_m)}.$$[191]

Dann ist $F(x_1, \ldots, x_m) \subset W$, $F(x_1, \ldots, x_m) \in V$ und $F\colon x^m \to V$. Setze $x' :\equiv x \cup \bigcup F[x^m]$. Dann ist $x' \subset W$ (beachte, daß wegen der Transitivität von W aus $x \in W$ folgt $x \subset W$). Da W fast-universell ist, existiert ein $x_0 \in W$ mit $x_0 \supset x'$. Aus der Definition von x' folgt

$$(1) \qquad \forall x_1, \ldots, x_m \in x\; \big(\exists v \in W\; \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m) \longleftrightarrow \exists v \in x_0\; \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m)\big).$$

Wähle nun $y_1, \ldots, y_{n-1} \in W$ mit

$$(2) \qquad \forall v, x_1, \ldots, x_m \in x_0\; \big(\psi^W(v, x_1, \ldots, x_m) \longleftrightarrow \bar{\psi}(v, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1})\big)$$

und setze $y_n :\equiv x_0$. Dann folgt für $x_1, \ldots, x_m \in x$:

$$\begin{aligned} \varphi^W(x_1, \ldots, x_m) &\longleftrightarrow \exists v \in W\; \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m) \\ &\overset{(1)}{\longleftrightarrow} \exists v \in x_0\; \psi^W(v, x_1, \ldots, x_m) \\ &\overset{(2)}{\longleftrightarrow} \exists v \in x_0\; \bar{\psi}(v, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\ &\longleftrightarrow \bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Nun können wir das angekündigte Kriterium beweisen.

23.6 Satz *Gelte* **ZF**. *Sei W ein Klassenterm. W sei transitiv, fast-universell und Σ_0-abgeschlossen. Dann ist W ein inneres Modell.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist W transitiv. Da W fast-universell und $\emptyset \subset W$ ist, existiert ein $y \in W$ (mit $\emptyset \subset y$). Also ist $W \neq \emptyset$.

Aus der Transitivität von W und $W \neq \emptyset$ folgen nach 22.8 $(\mathbf{Ex})^W$, $(\mathbf{Ext})^W$ und $(\mathbf{Fund})^W$.

zu $(\mathbf{Paar})^W$. Seien $a, b \in W$. Da $\{a, b\} \subset W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $z \supset \{a, b\}$. Dann gilt $\{a, b\} = \{x \in z \,|\, x = a \vee x = b\}$, und da W Σ_0-abgeschlossen ist, folgt hieraus $\{a, b\} \in W$. Nach 22.8 gilt $(\mathbf{Paar})^W$.

zu $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W$. Sei $a \in W$. Da W transitiv ist, ist dann $\bigcup a \subset W$, so daß wegen der fast-Universalität von W ein $z \in W$ existiert mit $z \supset \bigcup a$. Somit ist $\bigcup a = \{y \in z \,|\, \exists x \in a\; y \in x\}$. Da die definierende Formel des Klassentermes rechts eine Σ_0-Formel ist, folgt $\bigcup a \in W$ aus der Σ_0-Abgeschlossenheit von W. Nach 22.8 gilt $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W$.

zu $(\mathbf{Aus})^W$. Sei $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{w} \in W$. Nach 23.5 existieren $y_1, \ldots, y_n \in W$ mit

$$\big\{x \in a \;\big|\; \varphi^W(x, \vec{w})\big\} = \big\{x \in a \;\big|\; \bar{\varphi}(x, \vec{w}, y_1, \ldots, y_n)\big\}.$$

Da $\bar{\varphi}$ eine Σ_0-Formel und W Σ_0-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite der Identität in W, d.h., $\big\{x \in a \;\big|\; \varphi^W(x, \vec{w})\big\} \in W$. Nach 22.8 gilt $(\mathbf{Aus})^W$.

[191] Dies ist „Scott's Trick“, siehe die Fußnote auf Seite 71.

zu $(\mathbf{Pot})^W$. Sei $a \in W$. Dann ist $\mathrm{Pot}(a) \cap W \in V$ und $\mathrm{Pot}(a) \cap W \subset W$. Da W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\mathrm{Pot}(a) \cap W \subset z$, und es gilt $\mathrm{Pot}(a) \cap W = \{x \in z \,|\, \forall y \in x\; y \in a\}$. Da W Σ_0-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W, d.h., $\mathrm{Pot}(a) \cap W \in W$. Nach 22.8 gilt $(\mathbf{Pot})^W$.

zu $(\mathbf{Inf})^W$. Wir zeigen $\mathrm{On} \subset W$; hieraus folgt $\omega \in W$, was $(\mathbf{Inf})^W$ bedeutet. Wenn $\mathrm{On} \not\subset W$ ist, so ist $\alpha :\equiv \mathrm{On} \cap W \in \mathrm{On}$, da W transitiv ist. Da $\alpha \subset W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\alpha \subset z$. Aus der Definition von α folgt dann $\alpha = z \cap \mathrm{On}$. Sei $\psi(x)$ eine Σ_0-Formel, die unter **EML** zu der $\in$-Formel $x \in \mathrm{On}$ äquivalent ist, siehe 22.20. Dann gilt $\alpha = \{x \in z \,|\, \psi(x)\}$. Da W Σ_0-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W. Also ist $\alpha \in W$. Nach Wahl von α ist aber $\alpha \notin \mathrm{On} \cap W$. Der Widerspruch zeigt, daß doch $\mathrm{On} \subset W$ sein muß.

zu $(\mathbf{Ers})^W$. Sei $\varphi(x, y, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{w} \in W$ und es gelte

$$\forall x, y, y' \big((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \longrightarrow y = y'\big)$$

Wende (**Ers**) an auf die Formel $y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})$; dann ist

$$b :\equiv \big\{y \bigm| \exists x\, (x \in a \wedge (y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})))\big\} \in V.$$

Wegen $b \subset W$ existiert ein $z \in W$ mit $z \supset b$. Aufgrund von $(\mathbf{Aus})^W$ gilt dann (siehe 22.8)

$$b = \big\{y \in z \bigm| \exists x\, (x \in a \wedge (y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})))\big\} \in W.$$

Andererseits ist nach Definition von b

$$b = \big\{y \in W \bigm| \exists x \in a\; \varphi^W(x, y, \vec{w})\big\}.$$

Also gilt

$$\big\{y \in W \bigm| \exists x \in a\; \varphi^W(x, y, \vec{w})\big\} \in W,$$

so daß wir nach 22.8 $(\mathbf{Ers})^W$ gezeigt haben.

Damit ist $\mathbf{ZF}^W$ bewiesen. QED

23.2 Der Lévysche Reflexionssatz und Folgerungen.

Um das Prinzip zur Führung relativer Konsistenzbeweise vorzustellen, das die Grundlage für relative Konsistenzbeweis m.H. der Forcing-Methode ist, müssen wir zeigen, daß je endlich viele der **ZFC**-Axiome bereits in einer abzählbaren, transitiven Menge M gelten. Hierzu „reflektieren" wir diese endliche Liste zunächst in ein geeignetes V_θ (i.e. wir bestimmen θ, so daß jedes der Axiome V_θ-absolut ist), dann wählen wir mit Hilfe eines LÖWENHEIM-SKOLEM-Argumentes ein abzählbares $W \subset V_\theta$, so daß diese Axiome W-V_θ-absolut sind, und abschließend Kollabieren wir W mit Hilfe des MOSTOWSKI-Isomorphiesatzes 6.6 zu einer transitiven Menge M. Kernstück ist also:

23.7 Satz (Reflexionssatz von Lévy[192]) *Es gelte* **ZF**. *Sei* $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{r-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *eine endliche Liste von* $\in$*-Formeln und sei* $\theta_0 \in \mathrm{On}$. *Dann existiert ein* $\theta \geq \theta_0$, *so daß* $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ V_θ*-absolut sind.*

BEWEIS. Wir können o.E. annehmen, daß die $\in$-Formeln φ_i nur unter Verwendung von $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ aufgebaut sind und die Liste der φ_i wie folgt bzgl. Subformeln abgeschlossen ist: ist ψ eine Subformel von φ_i, so ist $\psi \equiv \varphi_j$ für ein $j < i$. Für $i < n$ definiere $f_i\colon V^r \to V$ durch

$$f_i(x_0, \ldots, x_{r-1}) :\equiv \begin{cases} \bigcap\big\{V_\beta \bigm| \exists v \in V_\beta\; \psi(x_0, \ldots, x_{r-1})\big\}, & \text{falls } \varphi_i \equiv \exists v\psi \text{ und } \varphi_i^V; \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

[192] AZRIEL LÉVY

Falls $\varphi_i \equiv \exists v\psi$ ist und φ_i^V gilt, ist wegen $V = \bigcup_{\beta\in\mathrm{On}} V_\beta$

$$\{V_\beta \mid \exists v \in V_\beta\ \psi(x_0,\dots,x_{r-1})\} \neq \emptyset,$$

so daß $f_i(x_0,\dots,x_{r-1})$ eine Menge ist; überdies folgt sofort

(1) $\forall \vec{x}\,\big(\exists v\psi \longleftrightarrow \exists v \in f_i(\vec{x})\ \psi(\vec{x})\big)$.

Definiere nun eine Folge $(\theta_m|m<\omega)$ rekursiv, so daß θ_{m+1} das kleinste $\alpha > \theta_m$ ist, für das

$$f_i\big[V^r_{\theta_m}\big] \subset V_\alpha$$

für alle $i<n$ gilt. Sei $\theta :\equiv \bigcup_{m<\omega}\theta_m$. Ist dann $\varphi_i \equiv \exists v\psi$, so gilt für alle $\vec{x}\in V_\theta$:

(2) $\exists v \in f_i(\vec{x})\ \psi(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in V_\theta\ \psi(\vec{x})$.

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Wähle ein $m<\omega$ mit $\vec{x}\in V_{\theta_m}$. Dann gilt $f_i(\vec{x}) \in f_i\big[V_{\theta_m}\big] \subset V_{\theta_{m+1}} \subset V_\theta$, also $f_i(\vec{x}) \subset V_\theta$. Hieraus folgt die Behauptung.
zu „$\Leftarrow$“. Dies folgt sofort aus (1). qed(2)

Wir zeigen, daß $\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}$ V_θ-absolut sind, durch Induktion nach $i<n$. Sei also $i<n$ und die V_θ-Absolutheit von φ_j für alle $j<i$ bewiesen. Dann sind folgende Fälle möglich:
Fall 1. φ_i ist atomar. Dann ist φ_i V_θ-absolut.
Fall 2. $\varphi \equiv (\psi\wedge\chi)$ oder $\varphi \equiv \neg\psi$. Dann gilt $\psi \equiv \varphi_{j_1}$ und $\chi \equiv \varphi_{j_2}$ für gewisse $j_1, j_2 < i$. Nach Induktionsvoraussetzung sind φ_{j_1} und φ_{j_2} V_θ-absolut. Da aussagenlogische Verknüpfungen von absoluten Formeln wieder absolute Formeln sind, siehe 22.15, ergibt sich, daß φ_i V_θ-absolut ist.
Fall 3. $\varphi_i \equiv \exists v\psi$. Dann ist $\psi \equiv \varphi_j$ für ein $j<i$. Da nach Induktionsvoraussetzung φ_j V_θ-absolut ist, folgt für alle $\vec{x}\in V_\theta$:

$$\varphi_i(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v\varphi_j(\vec{x}) \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \exists v \in f_i(\vec{x})\ \varphi_j(\vec{x}) \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \exists v\in V_\theta\ \varphi_j(\vec{x}) \overset{\text{Ind.Vor.}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\exists v \in V_\theta\ \varphi_j^{V_\theta}(\vec{x})}_{\equiv \varphi_i^{V_\theta}(\vec{x})}.$$

Also $\forall\vec{x}\in V_\theta\big(\varphi_i^{V_\theta}(\vec{x}) \longleftrightarrow \varphi(\vec{x})\big)$, und dies war zu zeigen.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Aus dem Lévyschen Reflexionssatz erhalten wir als interessantes Nebenresultat:

23.8 Satz ZF *ist nicht endlich axiomatisierbar.*

Beweis. Angenommen, es gibt endlich viele **ZF**-Axiome $\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}$ mit $\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1} \vdash \mathbf{ZF}$. Dann existiert ein $\theta\in\mathrm{On}$ mit $\varphi_i^{V_\theta}$ für $i<n$. Sei θ minimal mit dieser Eigenschaft. Nach dem Reflexionssatz gilt

$$\mathbf{ZF} \vdash \exists\kappa\in\mathrm{On}\ \exists x\,\big(x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x\big).$$

Wegen $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \vdash \mathbf{ZF}$ folgt

$$\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \vdash \exists\kappa\in\mathrm{On}\ \exists x\,\big(x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x\big).$$

Da $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^{V_\theta}$ gilt, folgt aus dem Modell-Lemma 22.6

$$\Big(\exists\kappa\in\mathrm{On}\ \exists x\,\big(x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x\big)\Big)^{V_\theta},$$

was nach dem Relativierungslemma 22.22 zu

(1) $\exists\kappa\in\mathrm{On}\cap V_\theta\ \exists x\in V_\theta\ \big(x = (V_\kappa)^{V_\theta} \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x\big)$

äquivalent ist. (Beachte, daß $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x$ eine Σ_0-Formel ist.) Nach 22.36 gilt $(V_\kappa)^{V_\theta} = V_\kappa \cap V_\theta = V_{\min\{\kappa,\theta\}}$.[193] Aus $\kappa \in V_\theta \cap \mathrm{On} = \theta$ folgt $\kappa < \theta$, also $(V_\kappa)^{V_\theta} = V_\kappa$. Aus (1) folgt dann

$$(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^{V_\kappa},$$

was wegen $\kappa < \theta$ der Minimalität von θ widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen. QED

23.9 Bemerkung Analog beweist man, daß auch **ZFC**, **ZFC** + **CH** und **ZFC** + **GCH** nicht endlich axiomatisierbar sind.

23.10 Satz *Es gelte* **ZFC**. *Sei $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{r-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{r-1})$ eine endliche Liste von $\in$-Formeln. Dann existiert ein abzählbares $W \in V$, so daß $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ W-absolut sind.*

Beweis. Der Beweis entspricht nahezu dem des Reflexionssatzes. Wir nehmen o.E. wieder an, daß die Liste der φ_i in der oben beschriebenen Weise bzgl. Subformeln abgeschlossen ist. Sei $\theta \geq \omega$ so, daß jedes φ_i V_θ-absolut ist. Sei ferner $<_\theta$ eine Wohlordnung auf V_θ. (Beachte, daß wir **(AC)** voraussetzen.) Für $i < n$ definiere $f_i\colon V_\theta^r \to V_\theta$ durch

$$f_i(x_0, \ldots, x_{r-1}) :\equiv \begin{cases} \big\{v \in V_\theta \bigm| \psi(\vec{x})\frac{v}{x_j} \wedge \forall v' \, (v' <_\theta v \longrightarrow \neg\psi(\vec{x})\frac{v'}{x_j})\big\}, & \text{falls } \varphi_i \equiv \exists x_j \psi(\vec{x}); \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f_i(\vec{x})$ enthält höchstens ein Element und es gilt im Fall $\varphi_i \equiv \exists x_j \psi$ für $\vec{x} \in V_\theta$:

(1) $\exists x_j \psi(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists x_j \in f_i(\vec{x}) \; \psi(\vec{x})$.

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Es ist $\psi \equiv \varphi_k$ für ein $k < i$. Wegen der V_θ-Absolutheit von φ_i und φ_k folgt

$$\exists x_j \psi(\vec{x}) \longrightarrow (\exists x_j \varphi_k(\vec{x}))^{V_\theta} \longrightarrow \exists x_j \in V_\theta \; \underbrace{\varphi_k^{V_\theta}(\vec{x})}_{\leftrightarrow \varphi_k} \longrightarrow \exists x_j \in f_i(\vec{x}) \varphi_k(\vec{x}).$$

zu „$\Leftarrow$“. Dies ist klar. qed(1)

Definiere nun eine aufsteigende Folge von Mengen wie folgt:

$$\begin{aligned} W_0 &:\equiv \{\emptyset\}; \\ W_{m+1} &:\equiv \{m\} \cup W_m \cup \bigcup f_0\big[W_m^r\big] \cup \ldots \cup \bigcup f_{n-1}\big[W_m^r\big]. \end{aligned}$$

Dann ist $W :\equiv \bigcup_{m<\omega} W_m$ eine abzählbare Teilmenge von V_θ. Mit Hilfe von (1) zeigt man wie im Beweis des Reflexionssatzes leicht, daß jedes φ_i W-absolut ist.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

23.3 Die Methode der abzählbaren, transitiven Modelle.

Aus 23.10 gewinnen wir mit dem Isomorphiesatz von Mostowski 6.6 das folgende Resultat, das grundlegend für die Methode der abzählbaren, transitiven Modelle ist.

23.11 Satz *Sei T eine (unendliche) Liste von $\in$-Sätzen, die* **ZFC** *umfaßt. Sei T_0 ein endliches Teilsystem von T. Dann gilt $T \vdash \exists M\big(M$ abzählbar und transitiv $\wedge\ (T_0)^M\big)$.*

[193] 22.36 darf angewendet werden, weil $\mathbf{ZF}^{V_\theta}$ wegen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \mathbf{ZF}$ und $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^{V_\theta}$ gilt.

Beweis. Es gelte T. (Insbesondere gilt dann **ZFC**!) Wir können o.E. annehmen, daß **(Ext)** zu T_0 gehört. Sei dann W eine abzählbare Menge, so daß jedes φ aus T_0 W-absolut ist, siehe 23.10. $R :\equiv \in\upharpoonright W$ ist stark fundiert auf W, da[194] für jedes x gilt $\{y \mid yRx\} = x \cap W \in V$ und es keine unendlich langen, absteigenden R-Ketten geben kann, da diese ebensolche $\in$-Ketten induzieren würden, solche aber nicht existieren. Da **(Ext)** gilt und nach Wahl von W **(Ext)** W-absolut ist, gilt $(\mathbf{Ext})^W$; dies impliziert, daß R extensional ist. Also kann der Isomorphiesatz von Mostowski 6.6 auf (W, R) angewendet werden. Sei M der Mostowski-Kollaps und $\pi\colon W \xrightarrow{bij.} M$ der Mostowski-Isomorphismus von (W, R). Durch eine (metasprachliche) Induktion über den Aufbau der $\in$-Formeln zeigt man leicht

$$\forall \vec{x} \in W \;\big(\varphi^W(\vec{x}) \longleftrightarrow \varphi^M(\pi(\vec{x}))\big).$$

Insbesondere folgt für $\in$-Sätze φ: $\varphi^W \longleftrightarrow \varphi^M$. Da nach Voraussetzung die $\in$-Sätze aus T_0 gelten und W-absolut sind, folgt φ^M für jeden solchen Satz. Dies war zu zeigen. QED

23.12 Bemerkung Sei $\varphi :\equiv \exists x\,(x = \aleph_1 \wedge \aleph_1 > \omega)$ und T_0 eine Liste von endlich vielen **ZFC**-Axiomen mit $T_0 \vdash \varphi$. Nach dem letzten Satz existiert ein **abzählbares**, transitives Universum M, in dem die Axiome aus T_0 erfüllt sind und φ gilt. Das Element x von M, das φ^M bezeugt, ist in M **überabzählbar**, wohingegen M doch abzählbar ist! Derartige „Paradoxien“ werden manchmal als „Skolem-Paradoxon“ bezeichnet. Unser Paradoxon löst sich wie folgt auf: x ist nur aus der Sicht von M überabzählbar, d.h., in M gibt es keine Funktion, die x bijektiv auf ω abbildet. Außerhalb von M existiert eine derartige Funktion sehr wohl. x ist von außerhalb M gesehen keine Kardinalzahl.

Um 23.11 für relative Konsistenzbeweise nutzbar zu machen, führen wir ein neues Konstantensymbol M ein. Ist T eine Liste von $\in$-Sätzen, die **ZFC** umfaßt, so sei

$$T_M :\equiv T + M \text{ abzählbar } + M \text{ transitiv } + T^M.$$

23.11 impliziert dann

23.13 Satz *Wenn* $\mathrm{Kon}(T)$ *so auch* $\mathrm{Kon}(T_M)$.

Beweis. Angenommen, T_M ist inkonsistent. Nach dem Endlichkeitssatz 17.5 existiert dann ein endliches Teilsystem T_0 von T, so daß $(T_0)_M$ inkonsistent ist. Dies bedeutet

$$T_0 \vdash \neg\,(M \text{ abzählbar } + M \text{ transitiv } + (T_0)^M).$$

Nach dem Lemma über Konstantenelimination 17.20 können wir M durch eine Variable x ersetzen und erhalten

$$T_0 \vdash \neg\,(x \text{ abzählbar } + x \text{ transitiv } + (T_0)^x).$$

Nach der Universalisierungsregel ($\forall$ 2) folgt hieraus

$$T_0 \vdash \forall x\, \neg\,(x \text{ abzählbar } + x \text{ transitiv } + (T_0)^x),$$

woraus

$$T \vdash \neg\,\exists x\,(x \text{ abzählbar } + x \text{ transitiv } + (T_0)^x)$$

folgt. Dies widerspricht 23.11. Also muß T_M doch konsistent sein. QED

Wir haben nun das folgende Prinzip für relative Konsistenzbeweise:

[194] vgl. 5.16 und 5.17.

23.14 Satz *Sei T eine Liste von $\in$-Sätzen, die* **ZFC** *umfaßt. Sei T' eine weitere Liste von $\in$-Sätzen. Für jedes endliche Teilsystem T_0' von T' gelte*

$$T_M \vdash \exists M' \left((T_0')^{M'} \wedge M' \neq \emptyset\right).$$

Dann gilt $\mathrm{Kon}(T) \Rightarrow \mathrm{Kon}(T')$.

Beweis. Angenommen, T' ist inkonsistent. Dann existiert ein endliches Teilsystem T_0' von T_0, das inkonsistent ist. Also gilt $T_0' \vdash x \neq x$ und somit

$$\mathbf{ZF} \vdash M' \neq \emptyset \longrightarrow \left(\bigwedge (T_0')^{M'} \to (\forall x\, x \neq x)^{M'}\right)$$

nach dem Modell-Lemma 22.6. Wegen

$$T_M \vdash \exists M' \left((T_0')^{M'} \wedge M' \neq \emptyset\right)$$

gilt für ein solches M'

$$T_M \vdash M' \neq \emptyset \wedge \forall x \in M'\; x \neq x.$$

Hieraus folgt, daß T_M inkonsistent ist. Nach 23.13 ist dann T inkonsistent. QED

23.15 Bemerkung Unter Verwendung von 23.14 kann man mit Hilfe der **Methode der abzählbaren, transitiven Modelle** relative Konsistenzbeweise der Art $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}+\varphi)$ wie folgt führen. Man nimmt an, daß man ein abzählbares, transitives Modell M von **ZFC** vorgegeben hat. Ein solches Modell wird auch als **Grundmodell** bezeichnet. Man konstruiert dann ausgehend von M ein weiteres Modell M' mit $(\mathbf{ZFC} + \varphi)^{M'}$. Dieses Verfahren findet bei Konsistenzbeweisen, die sich der Forcing-Methode bedienen, Anwendung. In diesem Fall ist $M' = M[G]$ eine „generische Erweiterung“ von M.

24 Die relative Konsistenz von (AC).

Mit Hilfe der Methode der inneren Modelle beweisen wir die relative Konsistenz von **ZFC**. Das hierbei benutzte innere Modell ist die Klasse HOD der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen. Wir setzen in diesem Kapitel stets **ZF** voraus.

24.1 Definition x heißt **definierbar**, wenn es eine $\in$-Formel $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ und $y_1, \dots, y_n \in V$ gibt, so daß

$$\forall v_0 \left(v_0 = x \longleftrightarrow \varphi(v_0, y_1, \dots, y_n)\right)$$

gilt. In diesem Fall sagen wir, x ist definierbar aus $y_1, \dots, y_n$ mit $\in$-Formel $\varphi(v_0, \dots, v_n)$. Sind hierbei die y_i Ordinalzahlen, so nennen wir x **ordinalzahldefinierbar**.

Dies sind keine Definitionen in **ZF**, so daß wir z.B. die „Klasse aller ordinalzahldefinierbaren Mengen“ nicht bilden können. Wir definieren deshalb in **ZF**:

24.2 Definition Definiere den Klassenterm OD durch

$$\mathrm{OD} :\equiv \left\{x \,\middle|\, \exists \theta \in \mathrm{On}\, \exists \chi \in \mathrm{Fml}_2(\dot\in)\, \exists \alpha < \theta \left(x \in V_\theta \wedge \forall y \in V_\theta \left(y = x \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y, \alpha]\right)\right)\right\}.$$

Diese Definition entspricht dem intuitiven Begriff der Ordinalzahldefinierbarkeit:

24.3 Satz *(a) Sei $i \mapsto \varphi_i$ eine definierbare Bijektion zwischen ω und* $\mathrm{Fml}_2(\dot\in)$.[195] *Sei*

$$\varphi(v_0, \theta, i, \alpha) :\equiv \left(v_0 \in V_\theta \wedge \forall v_1 \in V_\theta \left(v_1 = v_0 \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \varphi_i[v_1, \alpha]\right)\right).$$

Sei $x \in \mathrm{OD}$. Dann existieren $\theta \in \mathrm{On}$, $i < \omega$ und $\alpha < \theta$ mit

$$\forall v_0 \left(v_0 = x \longleftrightarrow \varphi(v_0, \theta, i, \alpha)\right).$$

Wir sagen in diesem Fall: (θ, i, α) **definiert** *x.*

[195] siehe 24.4

(b) Sei x definierbar aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{On}$ mit $\in$-Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$. Dann gilt $x \in \mathrm{OD}$.

Beweis. zu (a). Nach Definition von OD existieren $\theta \in \mathrm{On}$, $i < \omega$ und $\alpha < \theta$ mit $\varphi(x, \theta, i, \alpha)$. Dann gilt insbesondere $x \in V_\theta$ und indem man $v_1 :\equiv x$ setzt

(1) $(V_\theta, \in) \models \varphi_i[x, \alpha]$.

Ist dann v_0 beliebig mit $\varphi(v_0, \theta, i, \alpha)$, so folgt, indem man $v_1 :\equiv x$ setzt:

$$x = v_0 \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \varphi[x, \alpha].$$

Da nach (1) die rechte Seite dieser Äquivalenz gilt, folgt $v_0 = x$. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Wir konstruieren zunächst eine $\in$-Formel χ, die x aus einem Parameter definiert und betrachten dann $\ulcorner\chi\urcorner$.
Auf ${}^{<\omega}\mathrm{On} :\equiv \{s \mid \exists n < \omega\ s\colon n \to \mathrm{On}\}$ definiere eine Wohlordnung $\prec$ durch

$$s_0 \prec s_1 :\equiv \big(s_0 \subset s_1 \wedge s_0 \neq s_1\big) \vee \big(\mathrm{dom}(s_0) = \mathrm{dom}(s_1) \wedge \exists i < \mathrm{dom}(s_0)\ (s_0 \restriction i = s_1 \restriction i \wedge s_0(i) < s_1(i))\big).$$

Sei h der Mostowski-Isomorphismus von $\prec$; dann ist $h\big[{}^{<\omega}\mathrm{On}\big] = \mathrm{On}$. Sei

$$\chi(v_0, \alpha) :\equiv \exists v_1, \ldots, v_n \big(v_1 = h(\alpha)(0) \wedge \ldots \wedge v_n = h(\alpha)(n-1) \wedge \varphi(v_0, \ldots, v_n)\big).$$

Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ mit $h(\alpha) = (\alpha_{i+1} | i < n)$. Dann wird x aus α mit $\in$-Formel χ definiert. Wähle nach dem Lévyschen Reflexionssatz 23.7 ein $\theta \in \mathrm{On}$, so daß $x \in V_\theta$, $\alpha \in V_\theta$ gilt und $\forall y\,(y = x \longleftrightarrow \chi(v_0, v_{n+1}))$ V_θ-absolut ist. Da $\forall y (y = x \longleftrightarrow \chi(v_0, \alpha))$ gilt, folgt dann

$$\forall y \in V_\theta\ \big(y = x \longleftrightarrow \chi^{V_\theta}(x, \alpha)\big).$$

Dies ist nach 22.4 gleichwertig mit

$$\forall y \in V_\theta\ \big(y = x \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \ulcorner\chi\urcorner[x, \alpha]\big).$$

Also gilt $x \in \mathrm{OD}$.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

24.4 Bemerkung Eine definierbare Bijektion $h\colon \omega \xrightarrow{bij.} \mathrm{Fml}_2(\dot\in)$ erhält man z.B. so: Sei $<$ die im Beweis des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes 21.10 definierte Wohlordnung von V_ω. Schränke $<$ auf $\mathrm{Fml}_2(\dot\in) \subset V_\omega$ ein und wähle für h den Mostowski-Isomorphismus dieser Wohlordnung.

OD ist abgeschlossen gegen Definierbarkeit aus Parametern aus OD:

24.5 Satz *x werde aus $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{OD}$ mit $\in$-Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ definiert. Dann ist $x \in \mathrm{OD}$.*

Beweis. $\varphi_i(v_i, \vec\alpha)$ definiere x_i aus $\vec\alpha \in \mathrm{On}$, also $\varphi_i(v_i, \vec\alpha) \longleftrightarrow v_i = x_i$. Dann definiert

$$\exists v_1, \ldots, v_n \big(\varphi_1(v_1, \vec\alpha) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(v_n, \vec\alpha) \wedge \varphi(v_0, \ldots, v_n)\big)$$

x aus $\vec\alpha$. QED

Wir gehen nun über von OD zur Klasse aller derjenigen Mengen, die erblich ordinalzahldefinierbar sind, d.h., Mengen x, die nicht nur selbst in OD liegen, sondern deren sämtliche Elemente und deren Elemente und deren Elemente ... ebenfalls ordinalzahldefinierbar sind.

24.6 Definition $\mathrm{HOD} :\equiv \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}\}$ heißt Klasse der **erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen** (**hereditarily ordinal-definable sets**).

24.7 Bemerkung Wegen $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$ ist $\mathrm{HOD} \subset \mathrm{OD}$.

24.8 Satz HOD *ist ein inneres Modell von* **ZF**.

Beweis. Nach 23.6 ist zu zeigen, daß HOD transitiv, fast-universell und Σ_0-abgeschlossen ist.

zur Transitivität. Sei $x \in y \in \mathrm{HOD}$. Dann ist $y \in \mathrm{TC}(\{y\})$, also $y \subset \mathrm{TC}(\{y\})$ wegen der Transitivität von $\mathrm{TC}(y)$. Aus $x \in y$ folgt dann $\{x\} \subset \mathrm{TC}(\{y\})$, also $\mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{TC}(\{y\})$. Da $\mathrm{TC}(\{y\}) \subset \mathrm{OD}$ wegen $y \in \mathrm{HOD}$ gilt, folgt $\mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}$, also $x \in \mathrm{HOD}$. Dies war zu zeigen.

zur Fast-Universalität. Da wegen $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ zu jedem $x \subset \mathrm{HOD}$ ein $\alpha \in \mathrm{On}$ existiert mit $x \subset V_\alpha \cap \mathrm{HOD}$, genügt es zu zeigen, daß $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}) \subset \mathrm{OD}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt. Da

$$\mathrm{TC}(\{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}) = \underbrace{(V_\alpha \cap \mathrm{HOD})}_{\subset \mathrm{HOD} \subset \mathrm{OD}} \cup \{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}$$

ist, genügt es zu zeigen, daß $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$ gilt. Hierzu bemerken wir, daß diese Menge aus α mit der $\in$-Formel

$$\varphi(v_0, v_1) :\equiv \forall u\big(u \in v_0 \longleftrightarrow (u \in V_{v_1} \,\wedge\, \mathrm{TC}(\{u\}) \subset \mathrm{OD})\big)$$

definiert wird. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

zur Σ_0-Abgeschlossenheit. Sei $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ eine Σ_0-Formel. Seien $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{HOD}$. Dann wird $z :\equiv \big\{u \in x \,|\, \varphi(u, x_1, \ldots, x_n)\big\}$ definiert aus $x, x_1, \ldots, x_n$ mit $\in$-Formel

$$\chi(v_0, v, v_1, \ldots, v_n) :\equiv \forall u \,\big(u \in v_0 \longleftrightarrow (u \in v \,\wedge\, \varphi(u, v_1, \ldots, v_n))\big).$$

Da OD nach 24.5 gegen Definierbarkeit aus Parametern aus OD abgeschlossen ist, folgt $z \in \mathrm{OD}$. Da nach Voraussetzung $x \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}$ gilt, ergibt sich

$$\mathrm{TC}(\{z\}) = \{z\} \cup \mathrm{TC}(z) \subset \{z\} \cup \mathrm{TC}(x) \subset \{z\} \cup \mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}\,.$$

Also ist $z \in \mathrm{HOD}$ und HOD Σ_0-abgeschlossen.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Abschließend zeigen wir, daß in HOD das Auswahlaxiom gilt.

24.9 Satz *Es gilt* $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$.

Beweis. Wir definieren zunächst eine Wohlordnung auf OD. Hierzu setzen wir

$$T :\equiv \{(\theta, i, \alpha) \,|\, \theta \in \mathrm{On} \wedge i < \omega \,\wedge \alpha < \theta\}.$$

Wir definieren auf T eine starke Wohlordnung durch die lexikographische Ordnung:

$$(\theta, i, \alpha) <_T (\theta', i', \alpha') :\equiv \theta < \theta' \,\vee\, (\theta = \theta' \,\wedge\, i < i') \,\vee\, (\theta = \theta' \,\wedge\, i = i' \,\wedge\, \alpha < \alpha').$$

Für $x, x' \in \mathrm{OD}$ setzen wir

$$x <_{\mathrm{OD}} x' :\equiv \exists t \in T \,\big(t \text{ definiert } x \,\wedge\, \forall t' \in T \,(t' \text{ definiert } x' \to t <_T t')\big).$$

Man sieht leicht, daß $<_{\mathrm{OD}}$ eine starke Wohlordnung auf OD definiert. Ist nun $a \in \mathrm{HOD}$ eine Menge nicht-leerer, paarweise disjunkter Mengen, so setze

$$b :\equiv \big\{y \,\big|\, \exists x \in a \,(y \text{ ist } <_{\mathrm{OD}} \text{-minimales Element von } x)\big\}.$$

b wählt also das Minimum eines jeden Elementes von a aus. Um $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$ zu beweisen, ist nach 22.8 $b \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{b\}) \subset \mathrm{OD}$ zu zeigen. Da sich b aus $a \in \mathrm{OD}$ definieren läßt, ist $b \in \mathrm{OD}$ nach 24.5. Wegen

$$\mathrm{TC}(b) \subset \mathrm{TC}(\bigcup a) \subset \mathrm{TC}(\{\bigcup a\})$$

folgt $\mathrm{TC}(b) \subset \mathrm{OD}$, denn aus $a \in \mathrm{HOD}$ sowie $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{\mathrm{HOD}}$ ergibt sich $\bigcup a \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{\bigcup a\}) \subset \mathrm{OD}$. Insgesamt folgt

$$\mathrm{TC}(\{b\}) = \{b\} \cup \mathrm{TC}(b) \subset \mathrm{OD}\,.$$

Dies war zu zeigen. Also gilt $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$ und der Satz ist bewiesen. QED

Mit Hilfe der Methode der inneren Modelle (siehe 23.3) ist damit gezeigt:

24.10 Corollar (Gödel) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \Rightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC})$.

24.11 Bemerkung Das letzte Resultat geht auf Gödel zurück, der es mit Hilfe des inneren Modelles der konstruktiblen Mengen bewiesen hat.