Seminar Nichtstandard-Mathematik
Nichtstandard-Werte spezieller Elemente
8. Januar 2003

Im folgenden werden wir bestimmte Elemente der Superstruktur $\hat{S}$ betrachten und deren $*$ -Werte berechnen. Es wird sich hierbei meist um Abbildungen handeln, damit diese auch in $\hat{S}$ liegen, muß der Definitionsbereich jeweils eingeschränkt werden, hier auf S_ν. Somit sind diese Abbildungen implizit noch abhängig von ν.

13.1 $*$ -Wert der Potenzmengenabbildung $\mathcal{P}$

Sei $\nu \in \mathbf{N}$ beliebig. Man betrachte die folgende Abbildung:

$$S_\nu^- \ni \Omega \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{P}(\Omega) \in S_{\nu+1}$$

Dann ist ${}^*\mathcal{P}$ eine Abbildung von ${}^*S_\nu^-$ in ${}^*S_{\nu+1}^-$ und es gilt:

$${}^*\mathcal{P}(\Omega) = \{B \subset \Omega \mid B \ intern\} \text{ für } \Omega \in {}^*S_\nu^-$$

wobei $S_\nu^- := S_\nu \backslash S_*$, es gilt dann mit 7.7 (ii), das ${}^*S_\nu^-$ aus allen Elementen von ${}^*S_\nu$ besteht, die Mengen sind, d.h. nicht in ${}^*S$ liegen.

13.2 $*$ -Werte der Definitions- und der Wertebereichsabbildung $\mathcal{D}$ und $\mathcal{W}$

Sei $\nu \in \mathbf{N}$ beliebig. Man betrachte die folgenden Abbildungen:

(i) $\quad \mathcal{P}(S_\nu \times S_\nu) \ni R \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{D}(R) \in \mathcal{P}(S_\nu)$

(ii) $\quad \mathcal{P}(S_\nu \times S_\nu) \ni R \xrightarrow{\mathcal{W}} \mathcal{W}(R) \in \mathcal{P}(S_\nu)$

Dann sind ${}^*\mathcal{D}$ und ${}^*\mathcal{W}$ Abbildungen, die auf allen internen Teilmengen von ${}^*S_\nu \times {}^*S_\nu$ definiert sind, und es gilt:

(iii) $\quad {}^*\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(R)$ für interne Mengen $R \subset {}^*S_\nu \times {}^*S_\nu$

(iv) $\quad {}^*\mathcal{W}(R) = \mathcal{W}(R)$ für interne Mengen $R \subset {}^*S_\nu \times {}^*S_\nu$

13.3 $*$ -Werte der Operationen $\cap$, $\cup$, $\backslash$

Sei $\nu \in \mathbf{N}$ beliebig. Es seien $\cap$, $\cup$, $\backslash$ Operationen in S_ν^-, dann sind ${}^*\cap$, ${}^*\cup$ und ${}^*\backslash$ Operationen in ${}^*S_\nu^-$ und es gilt:

$$A \,{}^*\!\cap B = A \cap B \ , \quad A \,{}^*\!\cup B = A \cup B \ , \quad A \,{}^*\!\backslash B = A \backslash B$$

für alle $A, B \in {}^*S_\nu^-$

13.4 $*$-Werte der Funktionensysteme $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{\text{inj}}$

Sei $\nu \in \boldsymbol{N}$ beliebig. Setze

$$\mathcal{F} := \{f \subset S_\nu \times S_\nu \mid f\ Funktion\}\ ;$$

$$\mathcal{F}_{inj} := \{f \subset S_\nu \times S_\nu \mid f\ injektive\ Funktion\}\ ;$$

Es sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{\text{inj}}$ Elemente von $\hat{S}$, und es gilt:

$${}^*\mathcal{F} := \{f \subset S_\nu \times S_\nu \mid f\ interne\ Funktion\}\ ;$$

$${}^*\mathcal{F}_{inj} := \{f \subset S_\nu \times S_\nu \mid f\ interne\ injektive\ Funktion\}\ .$$

Nichtstandard-Endliche Mengen

14.1 $*$-Endliche Mengen

Sei $\nu \in \boldsymbol{N}_0$ und setze

$$E_\nu := \{E \subset S_\nu \mid E\ endlich\}$$

Eine Menge H heißt <u>$*$-endlich</u> oder auch <u>hyperendlich</u>, falls gilt:

$$H \in {}^*E_\nu \text{ für ein } \nu \in \boldsymbol{N}_0$$

14.2 $*$-Wert des Systems der endlichen Teilmengen von A

Für Mengen $A \in \hat{S}$ gilt:

$${}^*\{E \subset A \mid E\ endlich\} = \{H \subset {}^*A \mid H\ *\text{-}endlich\}$$

insbesondere gilt für $\nu \in \boldsymbol{N}_0$:

$${}^*E_\nu = \left\{H \subset {}^*S_\nu \middle| H\ *\text{-}endlich\right\}$$

14.3 $*$-Wert der Abbildung $n \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$

Es sei $\{\ \}$ die Abbildung, die jedem $n \in \boldsymbol{N}$ die Menge $\{k \in \boldsymbol{N} \mid (k \le n)\} \in E_0$ zuordnet. Dann ist ${}^*\{\ \}$ eine Abbildung von ${}^*\boldsymbol{N}$ in ${}^*E_0$, und es gilt:

$${}^*\{\ \}(n) = \{k \in {}^*\boldsymbol{N} \mid k \le n\} \text{ für alle } n \in {}^*\boldsymbol{N}$$

14.4 Spezielle $*$-endliche Mengen

(i) $\{k \in {}^*\mathbf{N} | \, (k \leq n)\}$ ist $*$-endlich für alle $n \in {}^*\mathbf{N}$

(ii) Jede interne Teilmenge einer $*$-endlichen Menge ist $*$-endlich

(iii) Sei $E \in \hat{S} \setminus S$ dann gilt: $E \textit{ endlich} \Leftrightarrow {}^*E \; *\text{-}endlich$

14.5 Abgeschlossenheitseigenschaften von $*$-endlichen Mengen

(i) $H, K \; *\text{-} \, endlich \Rightarrow H \cap K \, , H \setminus K \, , H \cup K \, , H \times K \;\; *\text{-} \, endlich$

(ii) $H \; *\text{-} \, endlich \Rightarrow \mathcal{P}(H) \; *\text{-} \, endlich$

(iii) $H \; *\text{-} \, endlich, f \; interne \; Funktion \; über \; H \Rightarrow f[H] \; * \; \text{-} \; endlich$

14.6 $*$-Elementeanzahl einer $*$-endlichen Menge

Sei H $*$-endlich. Dann ist $H \in {}^*E_\nu$ für ein $\nu \in \mathbf{N}_0$. Betrachte die Abbildung

$\# : E_\nu \to \mathbf{N}_0$, die jedem $E \in E_\nu$ die Anzahl der Elemente von E zuordnet. Es ist

${}^*\# : {}^*E_\nu \to {}^*\mathbf{N}_0$, und es heißt

$$|H| := {}^*\#(H) \text{ die } *\text{-Elementeanzahl von H}$$

Wir sagen auch, H hat $|H|$ viele Elemente.

14.7 Rechenregeln für die $*$-Elementeanzahl

(i) $H, K \; *\text{-} \, endlich \; und \; disjunkt \Rightarrow |H \cup K| \; = \; |H| + |K|$

(ii) $H, K \; *\text{-} \, endlich \Rightarrow |H \times K| \; = \; |H| \cdot |K|$

(iii) $H \; *\text{-} \, endlich \Rightarrow \left|{}^*\mathcal{P}(H)\right| \; = \; 2^{|H|}$

(iv) $H \; *\text{-} \, endlich, f \; interne \; Funktion \; über \; H \Rightarrow |f[H]| \leq |H|$

14.8 Charakterisierung von $*$-Endlichkeit und $*$-Elementeanzahl

Sei H eine nicht-leere Menge. Dann sind äquivalent:

(i) H ist $*$-endlich

(ii) Es gibt ein $h \in {}^*\mathbf{N}$ und eine interne bijektive Abbildung f

$$f : \{k \in {}^*\mathbf{N} | \; k \leq h\} \to H$$

Das Element $h \in {}^*\mathbf{N}$ aus (ii) ist eindeutig bestimmt, und zwar ist h die $*$-Elementeanzahl $|H|$ von H.

14.9 Endliche und unendliche $*$-endliche Mengen

(i) $(H := \{k \in {}^*\mathbf{N} \mid k \le h\},\ h \in {}^*\mathbf{N}) \Rightarrow H\ *\text{-}endlich\ und\ |H| = h$

(ii) $H\ *\text{-}endlich\ und\ unendlich\ \Rightarrow |H| \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$

(iii) H *endliche und interne Menge mit n Elementen*

$\Rightarrow H\ *\text{-}endlich\ mit\ |H| = n$

14.10 Inhalte und W-Inhalte auf Algebren

(i) Es sei Ω eine nicht-leere Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine<u>Algebra</u> über Ω, falls $\Omega \in \mathcal{A}$ ist und mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ auch $\Omega \setminus A_1$ und $A_1 \cup A_2$ zu $\mathcal{A}$ gehören.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so heißt $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein <u>Inhalt</u> auf $\mathcal{A}$, falls μ additiv ist, d.h. falls gilt:

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A}\ disjunkt \Rightarrow \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

(iii) Ein Inhalt μ auf einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein <u>stetiger Inhalt</u>, falls $\mu(A) = 0$ für alle endlichen Mengen $A \in \mathcal{A}$ ist.

(iv) Ein Inhalt P auf einer Algebra $\mathcal{A}$ mit $P(A) = 1$ heißt <u>W-Inhalt</u>

14.11 Konstruktion stetiger W-Inhalte auf $\mathcal{P}(\Omega)$

Sei $\Omega \in \hat{S}$ eine Menge und $H \subset {}^*\Omega$ eine nicht-leere $*$-endliche Menge. Setze

$$P(A) := st\left(\frac{|{}^*A \cap H|}{|H|}\right) \text{ für } A \subset \Omega$$

Dann ist P ein W-Inhalt auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Ist H eine unendliche Menge, so ist P ein stetiger W-Inhalt.

14.12 Konstruktion verschiebungsinvarianter W-Inhalte auf $\mathcal{P}(\mathbf{N})$

Sei $H := \{k \in {}^*\mathbf{N} \mid k \le h\}$ mit $h \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$. Setze

$$P(A) := st\left(\frac{|{}^*A \cap H|}{|H|}\right) \text{ für } A \subset \mathbf{N}.$$

Dann ist P ein stetiger W-Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, der verschiebungsinvariant ist, d.h. für den gilt

$$P(A+1) = P(A) \text{ für alle } A \subset \mathbf{N}$$

wobei $A + 1 := \{a + 1 \mid a \in A\}$ ist.