Seminar Nichtstandard-Mathematik
Funktionen und Funktionenfolgen
10. und 17. Dezember 2002

Es sei zuerst kurz an die übliche Definition eines Berührungspunktes einer Teilmenge der reellen Zahlen erinnert:
x_0 heißt Berührungspunkt von $D \subseteq \boldsymbol{R}$, falls in jeder ε-Umgebung von x_0 ein Punkt aus D liegt.

11.1 Nichtstandard-Kriterium für den Grenzwert einer Funktion

Sei $D \subseteq \boldsymbol{R}$ und x_0 ein Berührungspunkt von D. Sei $f: D \to \boldsymbol{R}$ eine Funktion und $c \in \boldsymbol{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{D \ni x \to x_0} f(x) = c$

(ii) $(x \in {}^*D \text{ und } x \approx x_0) \Rightarrow {}^*f(x) \approx c$

Mit Hilfe dieser Äquivalenz und der von Folgen und ε - δ Stetigkeit können wir nun ein Nichtstandard Kriterium für die Stetigkeit einer Funktion angeben:

11.2 (11.4) Nichtstandard-Kriterium für (gleichmäßige) Stetigkeit

Sei $D \subseteq \boldsymbol{R}$ und $x_0 \in D$. Sei $f: D \to \boldsymbol{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0 (i') f ist gleichmäßig stetig

(ii) $(x \in {}^*D \text{ und } x \approx x_0) \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$ (ii')

Als einfaches Beispiel für das intuitive Rechnen und Beweisen in der Nichtstandard-Mathematik soll der Zwischenwersatz und Extremalsatz dienen.

11.3 Zwischenwertsatz und Extremalsatz

Seien $a, b \in \boldsymbol{R}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

(i) f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

(ii) f besitzt ein Maximum und ein Minimum

11.5 Jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ ist gleichmäßig stetig

25.8 Jede stetige Funktion $f: K \to \boldsymbol{R}$ mit $K \subseteq \boldsymbol{R}^n$ kompakt ist glm. stetig

11.6 Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \boldsymbol{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Sei $f: D \to \boldsymbol{R}$ eine Funktion und $c \in \boldsymbol{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = c$

(ii) $\forall x \in {}^*D \backslash \{x_0\}: \quad (x \approx x_0) \Rightarrow \dfrac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c$

wobei x_0 Häufungspunkt von D heißt, wenn x_0 Berührungspunkt von $D \backslash \{x_0\}$ ist

11.7 Nichtstandard-Kriterium für stetige Differenzierbarkeit

Sei $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$;

(ii) $\forall x_0 \in [a, b]\ \exists c \in \boldsymbol{R}\ \forall x, y \in {}^*[a, b] \left((x, y \approx x_0 \wedge x \neq y) \Rightarrow \dfrac{{}^*f(x) - {}^*f(y)}{x - y} \approx c\right)$

Im folgenden Lemma bezeichnet ξ_{in} für $i \leq n \in \boldsymbol{N}$ eine Abbildung
$\xi: (\{(i, n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} |\ i \leq n\} \to \boldsymbol{R})$ mit $\xi(i, n) = \xi_{in}$, wir schreiben dann ${}^*\xi_{in}$ für ${}^*\xi\ (i, n)$

11.8 Lemma

Seien $\xi_{in}, \eta_{in} \in \boldsymbol{R}$ für $i \leq n \in \boldsymbol{N}$. Setze

$$s_{kn} := \sum_{i=1}^{k} \xi_{in} \text{ und } u_{kn} := \sum_{i=1}^{k} \eta_{in} \text{ für } k \leq n \in \boldsymbol{N}$$

Sei $h \in {}^*\boldsymbol{N}$ dann gilt:

$$(h\,{}^*\xi_{ih} \approx h\,{}^*\eta_{ih} \text{ für alle } i \leq h) \Rightarrow ({}^*s_{kh} \approx {}^*u_{kh} \text{ für alle } k \leq h)$$

11.9 Keislers Infinite Sum Theorem

Sei $f: [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ Riemann-integrierbar. Es sei
$A: \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 |\ 0 \leq u < v \leq 1\} \to \boldsymbol{R}$ mit:

(i) $A(0, v) = A(0, u) + A(u, v)$ für $0 < u < v \leq 1$;

(ii) $\dfrac{{}^*A(x, x + dx)}{dx} \approx {}^*f(x)$ für $0 < dx \approx 0$ und $x, x + dx \in {}^*[0, 1]$

Dann ist $$A(0, 1) = \int_0^1 f(t)dt$$

11.10 Satz

Es besitze $F : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ eine stetige Ableitung f. Dann gilt

$$\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0)$$

Dieser Satz ist im wesentlichen der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung und folgt direkt aus 11.9 mit $A(u, v) = F(v) - F(u)$.
Die nun folgenden Lemmata werden im Beweis des Existenzsatzes von Peano benötigt.

11.11 Lemma

Sei $g : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ Riemann-integrierbar und $h \in {}^*\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{N}$. Setze

$$s_{kn} := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} g\left(\frac{i-1}{n}\right) \qquad k \le n \in \boldsymbol{N}$$

Dann gilt für jedes $x \in (0, 1]$ $\int_0^x g(t)dt \approx {}^*s_{k(x)h}$

wobei $k(x)$ das eindeutig bestimmte Element aus ${}^*\boldsymbol{N}$ mit $\frac{k(x)}{h} < x \le \frac{k(x)+1}{h}$ ist.

11.12 Lemma

Sei $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to \boldsymbol{R}$ stetig. Dann gilt

$$(x \in {}^*[0, 1], y_1, y_2 \in {}^*[-1, 1] \; und \; y_1 \approx y_2) \Rightarrow {}^*f(x, y_1) \approx {}^*f(x, y_2)$$

Es folgt nun der Existenzsatz von Peano

11.13 Existenzsatz von Peano

Sei $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to [-1, 1]$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine differenzierbare Funktion $\varphi : [0, 1] \to [-1, 1]$ mit:

$$\varphi(0) = 0 \text{ und } \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \text{ für alle } x \in [0, 1]$$

Zu Bemerken ist, dass im Beweis dieses Satzes weder wie sonst üblich der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit noch der Satz von Arzelà-Ascoli benötigt wird.

Nichtstandard-Analysis reeller Funktionenfolgen

12.1 Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßigen Grenzwert und Häufungspunkt von Funktionenfolgen

Sei $f_n : D \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$ eine Folge von Funktionen. Dann gilt für eine Funktion $f : D \to \boldsymbol{R}$

(i) f ist gleichmäßiger Grenzwert der Folge f_n

$\Leftrightarrow {}^*f_h(x) \approx {}^*f(x)$ für alle $h \in {}^*\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{N}$ und alle $x \in {}^*D$

(ii) f ist gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge der Folge f_n

$\Leftrightarrow {}^*f_h(x) \approx {}^*f(x)$ für ein $h \in {}^*\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{N}$ und alle $x \in {}^*D$

12.2 Satz von Dini

Sei $f_n : [a, b] \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen 0 konvergiert.

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

12.3 Nichtstandard-Kriterium für gleichgradige Stetigkeit

Es seien $f_n : D \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$ eine Folge von Funktionen und $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent

(i) f_n ist gleichgradig stetig in x_0

(ii) $(x \in {}^*D \text{ und } x \approx x_0) \Rightarrow {}^*f_n(x) = {}^*f_n(x_0)$ für alle $n \in {}^*\boldsymbol{N}$

Wobei eine Folge gleichgradig stetig heißt genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ \exists \delta \in \boldsymbol{R}_+ \forall n \in \boldsymbol{N}((x \in D \wedge |x - x_0| \le \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \le \varepsilon)$$

12.4 Satz von Arzelà-Ascoli

Sei $f_n : [a, b] \to \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$ eine Folge von Funktionen, die in jedem Punkt von $[a, b]$ gleichgradig stetig und beschränkt ist.

Dann besitzt f_n, $n \in \boldsymbol{N}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.