WS 2002/03
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Mathematisches Institut
Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis
Prof. Dr. Peter Koepke
Ausarbeitung des Seminarvortrags vom 14.1.2003

SUMMEN, POLYNOME, INTEGRALE

ERNST MARESCH

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit dem Transfer einiger grundlegender Begriffe der Analysis in den Nichtstandard-Fall. Dabei geht es zunächst um endliche Summen, später Integrale, unendliche konvergente Reihen, Polynome und schließlich δ-Funktionen, die im Nichtstandard-Fall tatsächlich als stetige Funktionen konstruiert werden können. Der Vortrag bezieht sich im Wesentlichen auf die Kapitel 16-18 des Lehrbuchs *Nichtstandard Analysis* von Dieter Landers und Lothar Rogge.

Vorbemerkung: H steht immer für eine *-endliche Menge, d.h. eine Menge mit h Elementen, wobei h eine hypernatürliche Zahl ist.

Wir wollen zunächst *-endliche Summen betrachten. Wir werden später sehen, wie hilfreich diese zur Berechnung von Integralen sind. Zunächst übertragen wir endliche Summen in den Nichtstandard-Fall:

1. Satz. Sei $\nu \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Sei $X \in \hat{S}$. Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= \{a : E \longrightarrow X : \emptyset \neq E \subseteq S_\nu \text{ endlich}\}, \\ \sum(a) &:= \sum_{i \in E} a(i) \in X \text{ für } a \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Dann sind $\mathfrak{A}, \sum \in \hat{S}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} {}^*\mathfrak{A} &= \{b : H \longrightarrow {}^*X \text{ intern} : \emptyset \neq H \subseteq {}^*S_\nu \text{ *-endlich}\}, \\ {}^*\sum(b) &= \sum_{i \in H} b(i) \in {}^*X \text{ für } b \in {}^*\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Beweis: Drei Aussagen sind zu zeigen: (i) $\mathfrak{A} \in \hat{S}$; (ii) $\sum \in \hat{S}$; (iii) ${}^*\mathfrak{A} = \{b : H \longrightarrow {}^*X \text{ intern} : \emptyset \neq H \subseteq {}^*S_\nu \text{ *-endlich}\}$.
Die ersten beiden Behauptungen sorgen dafür, dass die *-endliche Summe ein Element der Nichtstandard-Welt ist, während die dritte Behauptung sich auf den Transfer einer Menge von Funktionen samt deren Definitionsbereichen bezieht.
zu (i): Nach Voraussetzung sind $E \in \hat{S}, X \in \hat{S}$ Mengen. Fasse $a : E \longrightarrow X$ als Teilmenge von $a' : S_\nu \longrightarrow X$ auf. Dies ist ein Element von $\hat{S}$ wegen Proposition 6 aus dem Vortrag "Das Transferprinzip und Nichtstandardeinbettungen". Nach derselben Proposition gilt auch $a \in \hat{S}$. Proposition 3 aus dem genannten Vortrag besagt, dass damit auch die Potenzmenge von $S_\nu \times X$ in $\hat{S}$ liegt. Wegen der Transitivität von $\hat{S}$ gilt mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$ auch $\mathfrak{A} \in \hat{S}$.
zu (ii): Der Beweis verläuft nach dem gleichen Muster wie der der ersten Behauptung. Proposition 6 aus dem Vortrag "Das Transferprinzip und Nichtstandardeinbettungen" liefert darüber hinaus: ${}^*\sum : {}^*\mathfrak{A} \longrightarrow {}^*X$.
zu (iii): Sei $\mu \geq \nu$ mit $X \subseteq S_\mu$ und $\mathcal{F} := \{a \subseteq S_\mu \times S_\mu : a \text{ Funktion}\}$. Mit $E_\nu := \{E \subseteq S_\nu : E \text{ endlich}\}$ gilt:
$\mathfrak{A} = \{a \in \mathcal{F} : \emptyset \neq D(a) \in E_\nu,\ a(e) \in X \text{ für } e \in D(a)\}$. Transferiere dies. Nach Sätzen aus dem Vortrag "Nichtstandard-Werte spezieller Elemente" gilt:

– ${}^*\mathcal{F}$ enthält nur interne Funktionen (13.4);
– ${}^*E_\nu$ besteht aus allen *-endlichen $H \subseteq {}^*S_\nu$ (14.2);
– $\forall b \in {}^*\mathcal{F}\ {}^*D(b) = D(b)$ (13.2).
Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

In *-endlichen Summen kann man umklammern und die Summe in mehrere Einzelsummen aufspalten:

2. **Satz.** Für *-endliche Summen gilt:

(1) ${}^*\sum_{i \in H}(a(i)\ {}^*+ b(i)) = {}^*\sum_{i \in H} a(i) + {}^*\sum_{i \in H} b(i)$;
(2) ${}^*\sum_{i \in H} b(i) = {}^*\sum_{i \in H_1} b(i)\ {}^*+\ {}^*\sum_{i \in H - H_1} b(i)$, falls $H_1 \subset H$ intern und $\emptyset \neq H_1 \neq H$ ist;
(3) ${}^*\sum_{i \in H} b(i) = b(i_1)\ {}^*+ ...\ {}^*+ b(i_n)$, falls $H = \{i_1, ..., i_n\}$ ist.

Der Beweis beruht auf dem Transfer der entsprechenden wahren Aussagen aus dem reellen Fall sowie den Eigenschaften von ${}^*\mathfrak{A}$ (s. Landers/Rogge, S.158).
Außerdem kann man zeigen, dass die Summen- und die Produktbildung in ${}^*\mathbb{R}$ den Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ entsprechen. Sie brauchen also nicht gesondert gekennzeichnet zu werden. Ausdrücke wie $n!$ oder x^n können demnach für hypernatürliches n sowohl als Fortsetzung einer reellen Abbildung als auch als *-endliches Produkt verstanden werden. Beide Interpretationen führen auf das gleiche Ergebnis.
Der folgende Satz bringt uns im Hinblick auf den Transfer von Polynomen schon erheblich weiter, wenn die Aussage auch zunächst auf reelle x beschränkt bleiben muss:

3. **Satz. Berechnung von $\sum_{i=0}^{h} {}^*a_i x^i$ für reelle x:**
Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen. Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\forall x \in D : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dann gilt für $x \in D$:

$$\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : f(x) \approx \sum_{i=0}^{h} {}^*a_i x^i.$$

Beweis:
Sei $x \in D$ fest. Setze $c_n := a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gegen $f(x)$ konvergiert, liegen die Folgenglieder ab einem hypernatürlichen h infintesimal nahe bei 0. Es folgt also $f(x) \approx \sum_{i=0}^{h} {}^*c_i$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Wegen ${}^*(a \cdot b)(n) = {}^*a_n \cdot {}^*b_n,\ n \in {}^*\mathbb{N}$, ist ${}^*c_n = {}^*a_n \cdot x^n$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$.
Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Wir werden später sehen, dass die Aussage dieses Satzes auf endliche x ausgeweitet werden kann, nicht jedoch allgemein auf $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Man kann für *-endliche Summen noch beweisen, dass sie gewisse Monotonie- und Beschränktheits-Eigenschaften besitzen, dass Faktoren herausgezogen werden können und dass eine *-endliche Version der Dreiecksungleichung gilt:

4. **Satz.** Für eine *-endliche Menge H und interne Funktionen $a, b : H \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ sowie $\alpha,\ \beta \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:

(1) $\forall i \in H :\ a(i) \leq b(i) \Longrightarrow \sum_{i \in H} a(i) \leq \sum_{i \in H} b(i)$;
(2) $\forall i \in H :\ \alpha \leq b(i) \leq \beta \Longrightarrow \alpha \cdot |H| \leq \sum_{i \in H} b(i) \leq \beta \cdot |H|$;
(3) $\sum_{i \in H} \alpha \cdot b(i) = \alpha \sum_{i \in H} b(i)$;
(4) $|\sum_{i \in H} b(i)| \leq \sum_{i \in H} |b(i)|$.

(Beweis s. Landers/Rogge, S.161f.).

Wir wollen uns nun einem Integralbegriff auf $^*\mathbb{R}$ nähern. Wir übertragen dabei den Integralbegriff für Inhalte. Dabei werden endliche Zerlegungen $\mathbb{A}$ einer Menge von Mengen Ω betrachtet. Der Wert des Integrals wird als der gemeinsame Wert des Supremums der Untersummen und des Infimums der Obersummen bezogen auf eine Inhaltsfunktion μ verstanden. Obwohl bei der Definition der Inhalt μ eine große Rolle spielt, stellt man fest, dass das Integral nicht von der konkreten Wahl des Inhalts abhängt.
Wir müssen nun einige für das Inhaltsintegral wichtige Begriffe transferieren:

5. **Definition.** Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\Omega \in \hat{S}-S$. $\mathbb{A} : \{1, ..., h\} \longrightarrow {}^*\mathcal{A}$ ist eine *$^*-$endliche $^*\mathcal{A}$-Zerlegung* von $^*\Omega$, wenn $\mathbb{A}$ intern ist und wenn gilt:

$$\emptyset \neq A_i := \mathbb{A}(i) \in {}^*\mathcal{A}, i = 1, ..., h, \text{ disjunkt und } \bigcup_{i=1}^{h} A_i = {}^*\Omega.$$

6. **Satz.** Das System aller *-endlichen $^*\mathcal{A}$-Zerlegungen von $^*\Omega$ ist der *-Wert $^*\mathcal{Z}$ des Systems $\mathcal{Z}$ aller endlichen $\mathcal{A}$-Zerlegungen von Ω.

Beweis: Wir suchen eine Formel ϕ zur Beschreibung von $\mathcal{Z}$, die wir anschließend transferieren können. Sei dazu $\Omega \in S_\nu - S$, und sei $\mathcal{F}$ das System aller Funktionen $\mathbb{A} \subseteq S_\nu \times S_\nu$.
Für die Beschreibung des Definitionsbereichs von $\mathbb{A}$ erinnern wir uns an eine im Vortrag "Nichtstandard-Werte spezieller Elemente" definierte Abbildung: $\{\}(n) = \{1, ..., n\}$. Dann ergibt sich für ϕ die folgende Formel:

$$\begin{aligned}
\phi[\mathbb{A}] \quad \equiv \quad & (\exists n \in \mathbb{N}) D(\mathbb{A}) = \{\}(n) \quad \text{“\textit{Bestimmung des Definitionsbereichs von} } \mathbb{A}\text{“} \\
\wedge \quad & (\forall i \in D(\mathbb{A}))(\mathbb{A}(i) \neq \emptyset \wedge \mathbb{A}(i) \in \mathcal{A}) \quad \text{“\textit{Bestimmung der} } \mathbb{A}(i)\text{“} \\
\wedge \quad & (\forall i, j \in D(\mathbb{A}))(i \neq j \Longrightarrow \mathbb{A}(i) \cap \mathbb{A}(j) = \emptyset) \quad \text{“\textit{Disjunktheit}“} \\
\wedge \quad & (\forall x \in \Omega)(\exists i \in D(\mathbb{A})) x \in \mathbb{A}(i). \quad \text{“}\mathbb{A} \text{ \textit{ist Zerlegung von} } \Omega\text{“}
\end{aligned}$$

Damit kann $\mathcal{Z}$ in folgender Weise beschrieben werden:
$\mathcal{Z} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{F} : \phi[\mathbb{A}] \text{ ist gültig}\}$, und entsprechend nach Transfer
$^*\mathcal{Z} = \{\mathbb{A} \in {}^*\mathcal{F} : {}^*\phi[\mathbb{A}] \text{ ist gültig}\}$. q.e.d.

7. **Definition.** Sei $\mathbb{A} \in {}^*\mathcal{Z}$. Eine interne Abbildung $\omega : \{1, ..., h\} \longrightarrow {}^*\Omega$ heißt eine *interne Auswahl zu* $\mathbb{A}$, wenn $\omega_i \in A_i, i = 1, ..., h$ gilt.

Eine solche interne Auswahl gibt es zu jedem $\mathbb{A} \in {}^*\mathcal{Z}$.
Für jede beschränkte Funktion $f \in \mathbb{R}^\Omega$ kann man nun auf folgende Weise ein positives lineares Funktional beschreiben:

$$l(f) := st(\sum_{i=1}^{h} {}^*f(\omega_i)\ {}^*\mu(A_i)).$$

(Beweis s. Landers/Rogge, S.166f.)

Leider entspricht der Wert dieses Funktionals nicht immer dem Wert des Integrals. Dies kann an der Wahl der Zerlegung scheitern (betrachte z.B. die Zerlegung $\mathbb{A} : \{1\} \longrightarrow {}^*\mathcal{A}, \mathbb{A}(1) = {}^*\Omega$). Der folgende Satz beweist jedoch die Existenz einer festen *-endlichen $^*\mathcal{A}$-Zerlegung $\mathbb{A}$, so dass die geforderte Identität für jeden Inhalt μ, jede interne Auswahl ω zu $\mathbb{A}$ und jede μ-integrierbare Funktion f gilt:

8. **Satz. Darstellung von Integralen durch *-endliche Summen:**
Sei $^* : \hat{S} \longrightarrow {}^*\hat{S}$ eine starke Nichtstandard-Einbettung. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\Omega \in \hat{S} - S$. Dann gibt es eine *-endliche $^*\mathcal{A}$-Zerlegung $\mathbb{A} : \{1, ..., h\} \longrightarrow {}^*\mathcal{A}$ von $^*\Omega$, so dass für jeden Inhalt $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty[$, für jede beschränkte μ-integrierbare Funktion f und jede interne Auswahl $\omega_i \in A_i, i = 1, ..., h$, gilt:

$$\int f d\mu \approx \sum_{i=1}^{h} {}^*f(\omega_i)\ {}^*\mu(A_i).$$

Beweis:
Vorbemerkung: Eine *starke Nichtstandard-Einbettung* ist eine satztreue Einbettung $\,^* : \hat{S} \longrightarrow {}^*\hat{S}$ mit $\mathbb{R} \subseteq S$, für die gilt: Ist $\mathcal{C} \subseteq \hat{S} - S$ ein System von Mengen mit nicht-leeren endlichen Durchschnitten, so folgt $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} {}^*C \neq \emptyset$.

Sei $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty[$ ein Inhalt, f eine beschränkte, μ-integrierbare Funktion und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Setze

$$\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon} := \{\mathbb{A} \in \mathcal{Z} :\ \forall \omega_i \in A_i : |\int f d\mu - \sum_{i\in D(\mathbb{A})} f(\omega_i)\mu(A_i)| \leq \varepsilon\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass die Menge aller $\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon}$ nicht-leere endliche Durchschnitte besitzt:
Seien $\mu_j, f_j, \varepsilon_j$ für $j = 1, ..., k$ gegeben. Es ist zu zeigen:

$$\text{(i)} \qquad \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{Z}_{\mu_j,f_j,\varepsilon_j} \neq \emptyset.$$

Wir suchen also ein $\mathbb{A} \in \mathcal{Z}$ mit $|\int f_j d\mu_j - \sum_{i\in D(\mathbb{A})} f_j(\omega_i)\mu_j(A_i)| \leq \varepsilon_j$ für jede Auswahl $\omega_i \in A_i$. Nach einem Satz über μ-integrierbare Funktionen (s. Landers/Rogge, S.163) existieren Zerlegungen $\mathbb{A}^{(j)} \in \mathcal{Z}$ mit $O(f_j, \mathbb{A}^{(j)}, \mu_j) - U(f_j, \mathbb{A}^{(j)}, \mu_j) \leq \varepsilon_j$. Sei $\mathbb{A}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathbb{A}^{(1)}, ..., \mathbb{A}^{(k)}$. Dann gilt:

$$O(f_j, \mathbb{A}, \mu_j) - U(f_j, \mathbb{A}, \mu_j) \leq \varepsilon_j, j = 1, ..., k.$$

Ferner gilt für $j = 1, ..., k$ und für jede Auswahl ω_i:

$$\sum_{i\in D(\mathbb{A})} f_j(\omega_i)\mu_j(A_i) \in [U(f_j, \mathbb{A}, \mu_j), O(f_j, \mathbb{A}, \mu_j)], \ \int f_j d\mu_j \in [U(f_j, \mathbb{A}, \mu_j), O(f_j, \mathbb{A}, \mu_j)].$$

Daraus folgt die Behauptung (i). Da * eine starke Nichtstandard-Einbettung ist, können wir daraus die Existenz eines $\mathbb{A} \in {}^*\mathcal{Z}$ folgern, das in sämtlichen ${}^*\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon}$ liegt. $\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon}$ beschreiben wir nun durch eine Formel ϕ wie folgt:
$\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon} := \{\mathbb{A} \in \mathcal{Z} : \phi[\mathbb{A}]\text{ist gültig}\}$.
Setze

$$\phi[\mathbb{A}] \equiv (\forall \omega \in \mathcal{F})((D(\mathbb{A}) = D(\omega) \wedge (\forall i \in D(\mathbb{A}))\ \omega(i) \in \mathbb{A}(i)) \Longrightarrow |c - \sum(G(< \mathbb{A}, \omega >))| \leq \varepsilon).$$

Dabei ist $c := \int f d\mu$ und G die Abbildung, die jedem Paar $< \mathbb{A}, \omega >$ mit $\mathbb{A} \in \mathcal{Z}$, $\omega \in \mathcal{F}$, $D(\mathbb{A}) = D(\omega)$ sowie $\omega(i) \in \mathbb{A}(i), i \in D(\mathbb{A})$ die Abbildung

$$D(\mathbb{A}) \ni i \longrightarrow f(\omega(i))\mu(\mathbb{A}(i))\text{zuordnet.}$$

Die obige Beschreibung von $\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon}$ lässt sich nun transferieren. Nachdem die eingeführten Platzhalter c für das Integral und G für die Abbildung, die das Argument der Summe erzeugt, eliminiert sind, ergibt sich:

$${}^*\mathcal{Z}_{\mu,f,\varepsilon} = \{\mathbb{A} \in {}^*\mathcal{Z} :\ \forall \omega_i \in A_i : |\int f d\mu - \sum_{i\in D(\mathbb{A})} {}^*f(\omega_i)\ {}^*\mu(A_i)| \leq \varepsilon\}.$$

Nach unseren obigen Überlegungen und da ${}^*\mathcal{Z}$ aus allen *-endlichen ${}^*\mathcal{A}$-Zerlegungen von ${}^*\Omega$ besteht, ist diese Menge nicht leer. Daher folgt die Behauptung. q.e.d.

Mit diesem Satz ist es uns gelungen, im Nichtstandard-Fall Integrale bis auf einen infinitesimalen Fehler durch *-endliche Summen zu bestimmen. Wir wenden uns nun den mit den *-endlichen Summen verwandten *-endlichen Polynomen zu. Der folgende Satz führt den Begriff der *-endlichen Polynome ein:

9. Satz. Charakterisierung von *-endlichen Polynomen:
Sei Poly($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ das System aller Polynome. Dann ist *(Poly($\mathbb{R}$) das System aller $q :\ ^*\mathbb{R} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}$, für die eine interne Funktion $b : \{0, ..., h\} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}, h \in\ ^*\mathbb{N}$, existiert, so dass mit $b_i := b(i)$ gilt:

$$\forall x \in\ ^*\mathbb{R}\ q(x) = \sum_{i=0}^{h} b_i x^i.$$

q heißt **-endliches Polynom.*

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ das System aller Funktionen $a : \{0, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Definiere ferner eine Abbildung $P : \mathfrak{A} \times \mathbb{R} \longrightarrow (D(a) \longrightarrow \mathbb{R})$, die jedem Paar $< a, x >$ die Funktion $i \longrightarrow a(i)x^i$ zuordnet.
Wir suchen nun eine Formel ϕ zur Beschreibung von Poly($\mathbb{R}$:

$$\phi[p] \equiv (\exists a \in \mathfrak{A})(\forall x \in \mathbb{R})\ p(x) = \sum(P(< a, x >)).$$

Poly($\mathbb{R} = \{p \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} :\ \phi[p]$ ist gültig$\}$ lässt sich nun transferieren zu:

$$^*(\text{Poly}(\mathbb{R}) = \{q \in\ ^*(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) :\ ^*\phi[q] \text{ ist gültig}\}.$$

$^*(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ besteht aus allen internen Funktionen $q :\ ^*\mathbb{R} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}$, sowie $^*\mathfrak{A}$ aus allen internen Funktionen $b : \{0, ..., h\} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}, h \in\ ^*\mathbb{N}$. *(Poly($\mathbb{R}$) ist demnach das System aller internen Funktionen $q :\ ^*\mathbb{R} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}$, für die es eine interne Funktion $b : \{0, ..., h\} \longrightarrow\ ^*\mathbb{R}, h \in\ ^*\mathbb{N}$ gibt, so dass gilt: $\forall x \in\ ^*\mathbb{R}\ q(x) =\ ^*\sum(\ ^*P(< b, x >))$. Wenn P eingesetzt wird, ergibt sich:

$$\forall x \in\ ^*\mathbb{R} :\ q(x) =\ ^*\sum_{i=0}^{h} b_i x^i.$$

Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Mit dem soeben bewiesenen Satz wissen wir, dass für ein Polynom p automatisch $^*p$ ein *-endliches Polynom ist. Wie das Beispiel $q(x) = h, h \in\ ^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ zeigt, gilt die Umkehrung jedoch nicht.
Nach dem folgenden Satz stehen konvergente Potenzreihen und *-endliche Polynome in enger Beziehung, da beide als Polynome unendlichen Grades aufgefasst werden können. Die Konvergenz der Reihe entspricht dabei der Vorstellung, dass für ein hypernatürliches h die Folgenwerte oberhalb von h infinitesimal klein sein müssen.

10. Satz. Potenzreihen und *-endliche Polynome:
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen. Dann sind äquivalent:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;
(2) $\forall h \in\ ^*\mathbb{N} - \mathbb{N}, x \in fin(^*\mathbb{R})\ ^*f(x) \approx \sum_{i=0}^{h}\ ^*a_i x^i$.

Beweis: Bilde für obiges f die Folge der Partialsummen $f_n := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. Dies ist äquivalent dazu, dass f_n auf allen beschränkten Intervallen gleichmäßig gegen f konvergiert. Man kann beweisen (s. Landers/Rogge, S.175), dass dies äquivalent ist zu:

$$\forall h \in\ ^*\mathbb{N} - \mathbb{N},\ x \in fin(\ ^*\mathbb{R}) :\ ^*f(x) \approx\ ^*f_h(x).$$

Die Behauptung folgt nun, indem die obige Beschreibung der Folge der Partialsummen transferiert wird. q.e.d.

Der folgende Satz besagt, dass nur der *-Wert eines Polynoms infinitesimal benachbart zu einem *-endlichen Polynom sein kann:

11. Satz. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und q ein *-endliches Polynom mit

$$\forall x \in\ ^*\mathbb{R}\ ^*f(x) \approx q(x).$$

Dann ist f ein Polynom.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung:
$(\exists q \in {}^*(\mathrm{Poly}(\mathbb{R}))(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|{}^*f(x) - q(x)| \leq \frac{1}{n})$.
Finde nun nach dem Transferprinzip für jedes n ein Polynom p_n, für das gilt: $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Da man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches Polynom p_n finden kann, gilt insbesondere: $\forall n \in \mathbb{N}\ sup_{x\in\mathbb{R}}|p_n(x) - p_1(x)| \leq 2$.
$p_n - p_1$ ist also ein beschränktes Polynom und damit konstant. Setze also $c_n := p_n - p_1$ und $c := lim_{n\to\infty}c_n$. Dann gilt:

$$f(x) - p_1(x) = lim_{n\to\infty}(p_n(x) - p_1(x)) = c.$$

Also lässt sich f als $p_1 + c$ darstellen und ist somit ein Polynom. q.e.d.

Im Folgenden werden zwei verschiedene Stetigkeitsbegriffe im Nichtstandard-Fall eingeführt. Der *-Stetigkeitsbegriff entspricht der δ/ε-Stetigkeit im Reellen, der $\approx$-Stetigkeitsbegriff hingegen der intuitiven Vorstellung, dass eine Funktion stetig ist, wenn für infinitesimal benachbarte x_0 und x_1 auch die jeweiligen Funktionswerte infinitesimal benachbart sind. Für $x \in \mathbb{R}$ sind die beiden Stetigkeitsbegriffe äquivalent, nicht jedoch für $x \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$, wie das auf die Definition folgende Beispiel zeigt.

12. **Definition.** Definiere:

(1) g heißt **-stetig in* $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$, falls gilt: $\forall\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^+\ \exists\delta \in {}^*\mathbb{R}^+ : x \in {}^*\mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$;
(2) g heißt *$\approx$-stetig in* x_0, falls gilt: $x \in {}^*\mathbb{R}, x \approx x_0 \Longrightarrow g(x) \approx g(x_0)$.

Beispiel:
Setze mit $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}, x \in {}^*\mathbb{R}$, $f(x) := hx$. Dann ist f ein *-endliches Polynom und somit überall *-stetig (s. Landers/Rogge, S.179). Andererseits ist f in keinem $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$ $\approx$-stetig, denn es gilt: $x_1 := x_0 + \frac{1}{h} \approx x_0$, aber $f(x_1) = hx_0 + 1 \not\approx f(x_0)$.
Als Beispiel für eine $\approx$-stetige Funktion, die nirgends *-stetig ist, betrachte $g(x) := \frac{1}{h}1_{^*\mathbb{Q}}(x)$. Dabei sei $1_{^*\mathbb{Q}}(x)$ die charakteristische Abbildung von ${}^*\mathbb{Q}$, die einem $x \in {}^*\mathbb{Q}$ den Wert 1, einem $x \in {}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{Q}$ den Wert 0 zuordnet. Dann ist $g(x) \approx 0$ für $x \in {}^*\mathbb{R}$ und damit überall $\approx$-stetig. Andererseits liegen in $\{x \in {}^*\mathbb{R} : |x - x_0| \leq \delta\}$ für jedes $\delta \in {}^*\mathbb{R}^+$ sowohl Punkte aus ${}^*\mathbb{Q}$ als auch aus ${}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{Q}$. Daher gibt es für jedes $\delta \in {}^*\mathbb{R}^+$ ein $x_1 \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_0| \leq \delta$ und $|g(x_1) - g(x_0)| = \frac{1}{h}$; die Bedingung für *-Stetigkeit kann also für $\varepsilon = \frac{1}{2h}$ nicht erfüllt werden.

Der folgende Satz zeigt, dass die beiden Stetigkeitsbegriffe immerhin für finite x übereinstimmen:

13. **Satz.** Für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(1) ${}^*f$ ist *-stetig in allen $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$;
(2) ${}^*f$ ist *-stetig in allen $x_0 \in fin({}^*\mathbb{R})$;
(3) ${}^*f$ ist $\approx$-stetig in allen $x_0 \in fin({}^*\mathbb{R})$;
(4) f ist stetig.

Beweis:
(1) $\Longrightarrow$ (2): ist klar.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sei $x \approx x_0 \in fin({}^*\mathbb{R})$. Dann gilt: $x \approx st(x_0) \approx x_0$. Da ${}^*f$ nach Voraussetzung *-stetig in $st(x_0) \in \mathbb{R}$ und damit $\approx$-stetig in $st(x_0)$ ist, erhalten wir: ${}^*f(x) \approx f(st(x_0)) \approx {}^*f(x_0)$. Also ist ${}^*f$ $\approx$-stetig in x_0.
(3) $\Longrightarrow$ (4): gilt nach dem Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit (11.2 aus dem Vortrag "Funktionen und Funktionenfolgen").
(4) $\Longrightarrow$ (1): Wir bezeichnen mit $C(\mathbb{R})$ das System aller (reellen) stetigen Funktionen und beschreiben dieses mit Hilfe der Formel

$$\phi[f] \equiv (\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon).$$

Die Behauptung folgt aus dem Transfer dieser Formel mit ${}^*C(\mathbb{R}) = \{g \in {}^*(\mathbb{R}^\mathbb{R}) : {}^*\phi[g] \text{ ist gültig}\}$, da ${}^*(\mathbb{R}^\mathbb{R})$ das System aller internen Funktionen von ${}^*\mathbb{R}$ nach ${}^*\mathbb{R}$ ist. q.e.d.

Im Folgenden wollen wir uns noch einer seltsamen Art Funktion zuwenden, den sogenannten δ-Funktionen: Für eine δ-Funktion soll gelten, dass sie stetig ist und für jedes reelle $x \neq 0$ den Wert 0 annimmt. Dennoch soll ihr Integral den Wert 1 haben. Im Reellen kann es offensichtlich eine solche Funktion nicht geben, da eine Funktion, die nur an der Stelle 0 nicht den Wert 0 annimmt, nicht stetig sein kann. Beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitstheorie könnte man jedoch an einer solchen Funktion interessiert sein, wenn bei einer Verteilung ein bestimmtes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 zutrifft. Da die Funktion nicht stetig ist, könnte das Integral nicht gebildet werden. In ${}^*\mathbb{R}$ haben wir hingegen infinitesimale Elemente zur Verfügung, die es uns erlauben, mit leicht abgewandelten Bedingungen (diese Abwandlungen haben keine Relevanz für die reellen Zahlen und ihre Funktionswerte) δ-Funktionen zu erzeugen.

14. **Definition.** Eine *δ-Funktion* ist eine nicht-negative, *-stetige Funktion von ${}^*\mathbb{R}$ nach ${}^*\mathbb{R}$ mit:

(1) ${}^*\int \delta(x)dx = 1$;
(2) ${}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx \approx 1, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \geq 0$.

15. **Satz.** Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ und $\int f(x)dx = 1$. Dann gilt für jedes $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$:

$$\delta(x) := h\ {}^*f(hx), x \in {}^*\mathbb{R}, \text{ist eine } \delta\text{-Funktion},$$

und es ist $\delta \in {}^*C^{(k)}$, falls $f \in C^{(k)}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist.

Beweis:
Durch Transfer erhalten wir $\delta \in {}^*C(\mathbb{R})$ und wegen $f \in C^{(k)}$ auch $\delta \in {}^*C^{(k)}$. Die Positivität von δ folgt aus der Positivität von f. Zu zeigen bleiben also die beiden nummerierten Eigenschaften der obigen Definition:
zu (1): Nach der Substitutionsregel gilt $\forall n \in \mathbb{N} \int nf(nx)dx = \int f(x)dx = 1$, und nach Transfer folgt

$$\forall h \in {}^*\mathbb{N} : {}^*\int h\ {}^*f(hx)dx = 1.$$

zu (2): Wähle $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Die transferierte Substitutionsregel liefert

$${}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = {}^*\int_{-\frac{1}{\sqrt{h}}}^{\frac{1}{\sqrt{h}}} h\ {}^*f(hx)dx = {}^*\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} {}^*f(z)dz.$$

Wegen $\int f(x)dx = 1$ gilt $a_n := \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f(x)dx \to 1,\ n \to \infty$. Somit folgt:

$${}^*\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} {}^*f(z)dz = {}^*a_h \approx 1.$$

Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Wir sind nun in der Lage, im Nichtstandard-Fall δ-Funktionen aus stetigen Funktionen zu konstruieren. Drei Aussagen des folgenden Satzes ergeben sich aus dem soeben bewiesenen Satz; die verbleibende Aussage ist die für die Anwendung von δ-Funktionen beispielsweise in der Physik wichtigste: Sie besagt, dass man durch Integration des Produkts einer auf kompakten Intervallen stetig differenzierbaren Funktion ϕ mit einer δ-Funktion den Funktionswert von ϕ an der Stelle 0 erhält.

16. **Satz.** Es gibt δ-Funktionen, die den folgenden vier Bedingungen genügen:

(1) ${}^*\int \delta(x)dx = 1$;
(2) $\delta(x) = 0$ für $x \not\approx 0$;
(3) ${}^*\int \delta(x)\ {}^*\phi(x)dx \approx \phi(0)$ für $\phi \in C_0^{(\infty)}$;
(4) $\delta \in {}^*C^{(\infty)}$.

Beweis: Es ist nur noch die Eigenschaft (3) zu beweisen:
Man kann zeigen, dass das Produkt einer *-stetigen und einer *-Riemann-integrierbaren Funktion *-Riemann-integrierbar ist (s. Landers/Rogge, S.185). Da δ eine δ-Funktion ist, gilt für ein infinitesimales ε: $^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx \approx 1$. Ebenso ist nach Voraussetzung $^*\int \delta(x)dx = 1$; außerdem ist δ nicht-negativ. Aus diesen beiden Gründen gilt für die Integrale über δ außerhalb des ε-Intervalls um 0: $^*\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(x)dx \approx 0$ und $^*\int_{\varepsilon}^{\infty} \delta(x)dx \approx 0$. Wegen der Beschränktheit von ϕ gilt auch für die entsprechenden Produkt-Integrale $^*\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(x)\, {}^*\phi(x)dx \approx 0$ und $^*\int_{\varepsilon}^{\infty} \delta(x)\, {}^*\phi(x)dx \approx 0$.
Zur Berechnung des Produkt-Integrals in der ε-Umgebung von 0 zeigen wir:

$$^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)({}^*\phi(x) - \phi(0))dx \approx 0.$$

Dies ist möglich, da wegen der Eigenschaften der δ-Funktion gilt:
$\phi(0) \approx \phi(0)\, {}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = {}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi(0)\delta(x)dx$.
Weil $\varepsilon \approx 0$ und ϕ in 0 stetig ist, gilt $\forall \rho \in \mathbb{R}^+ : \ |x| \leq \varepsilon \Longrightarrow |{}^*\phi(x) - \phi(0)| \leq \rho$. Somit folgt:

$$|{}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)({}^*\phi(x) - \phi(0))dx| \leq_{(i)} \rho\, {}^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\delta(x)|dx \leq_{(ii)} \rho\, {}^*\int \delta(x)dx = \rho.$$

Dabei gilt (i) wegen der Dreiecksungleichung für Integrale, (ii) wegen der Nicht-Negativität von δ und weil der Laufbereich des Integrals vergrößert wird. Da $\rho \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, folgt die Zwischenbehauptung. Die drei Integrale über das Produkt von δ und ϕ müssen nun noch addiert werden. So ergibt sich die Aussage des Satzes. q.e.d.

Literatur:

Landers, Dieter und Rogge, Lothar, *Nichtstandard Analysis*, Berlin: Springer, 1994.