Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis
Summen, Polynome, Integrale

Referent: Ernst Maresch

14.1.2003

1. Satz:
Sei $\nu \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Sei $X \in \hat{S}$. Setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &:= \{a : E \longrightarrow X : \emptyset \neq E \subseteq S_\nu \text{ endlich}\},\\ \sum(a) &:= \sum_{i\in E} a(i) \in X \text{ für } a \in \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Dann sind $\mathfrak{A}, \sum \in \hat{S}$, und es gilt:

$$\begin{aligned}{}^*\mathfrak{A} &= \{b : H \longrightarrow {}^*X \text{ intern} : \emptyset \neq H \subseteq {}^*S_\nu \text{ *-endlich}\},\\ {}^*\sum(b) &= \sum_{i\in H} b(i) \in {}^*X \text{ für } b \in {}^*\mathfrak{A}.\end{aligned}$$

2. Satz: Berechnung von $\sum_{i=0}^{h} {}^*a_i x^i$ für reelle x:
Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen. Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\forall x \in D : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dann gilt für $x \in D$:

$$\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : f(x) \approx \sum_{i=0}^{h} {}^*a_i x^i.$$

3.Definition und Satz:
Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\Omega \in \hat{S} - S$. $\mathbf{A} : \{1, ..., h\} \longrightarrow {}^*\mathcal{A}$ ist eine *$^* -$ endliche $^*\mathcal{A}$-Zerlegung von $^*\Omega$*, wenn $\mathbf{A}$ intern ist und wenn gilt:

$$\emptyset \neq A_i := \mathbf{A}(i) \in {}^*\mathcal{A}, i = 1, ..., h, \text{ disjunkt und } \bigcup_{i=1}^{h} A_i = {}^*\Omega.$$

Das System aller *-endlichen $^*\mathcal{A}$-Zerlegungen von $^*\Omega$ ist der *-Wert $^*\mathcal{Z}$ des Systems $\mathcal{Z}$ aller endlichen $\mathcal{A}$-Zerlegungen von Ω.

4. Satz: Darstellung von Integralen durch *-endliche Summen:
Sei $^* : \hat{S} \longrightarrow {}^*\hat{S}$ eine starke Nichtstandard-Einbettung. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\Omega \in \hat{S} - S$. Dann gibt es eine *-endliche $^*\mathcal{A}$-Zerlegung $\mathbf{A} : \{1, ..., h\} \longrightarrow {}^*\mathcal{A}$ von $^*\Omega$, so dass für jeden Inhalt $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty[$, für jede beschränkte μ-integrierbare Funktion f und jede interne Auswahl $\omega_i \in A_i, i = 1, ..., h$, gilt:

$$\int f d\mu \approx \sum_{i=1}^{h} {}^*f(\omega_i)\ {}^*\mu(A_i).$$

5. Satz: Charakterisierung von *-endlichen Polynomen:
Sei $Pol\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ das System aller Polynome. Dann ist $^*(Pol\mathbb{R})$ das System aller $q : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, für die eine interne Funktion $b : \{0, ..., h\} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}, h \in {}^*\mathbb{N}$, existiert, so dass mit $b_i := b(i)$ gilt:

$$q(x) = \sum_{i=0}^{h} b_i x^i \ \forall x \in {}^*\mathbb{R}.$$

6. Satz (Potenzreihen und *-endliche Polynome):
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen. Dann sind äquivalent:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;
2. $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}, x \in fin({}^*\mathbb{R})\ {}^*f(x) \approx \sum_{i=0}^{h}\ {}^*a_i x^i$.

7. Satz:
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und q ein *-endliches Polynom mit

$$^*f(x) \approx q(x)\ \forall x \in {}^*\mathbb{R}.$$

Dann ist f ein Polynom.

Definition:
(i) g heißt **-stetig in* $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^+\ \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+ : x \in {}^*\mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon;$$

(ii) g heißt $\approx$*-stetig in* x_0, falls gilt: $x \in {}^*\mathbb{R}, x \approx x_0 \Longrightarrow g(x) \approx g(x_0)$.

8. Satz:
Für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. $^*f$ ist *-stetig in allen $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$;
2. $^*f$ ist *-stetig in allen $x_0 \in fin({}^*\mathbb{R})$;
3. $^*f$ ist $\approx$-stetig in allen $x_0 \in fin({}^*\mathbb{R})$;
4. f ist stetig.

Definition:
Eine δ-*Funktion* ist eine nicht-negative, *-stetige Funktion von $^*\mathbb{R}$ nach $^*\mathbb{R}$ mit:

1. $^*\int \delta(x)dx = 1$;
2. $^*\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx \approx 1, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \geq 0$.

9. Satz:
Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ und $\int f(x)dx = 1$. Dann gilt für jedes $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$:

$$\delta(x) := h\ {}^*f(hx), x \in {}^*\mathbb{R}, \text{ist eine } \delta\text{-Funktion},$$

und es ist $\delta \in {}^*C^{(k)}$, falls $f \in C^{(k)}$ ist.

10. Satz:
Es gibt δ-Funktionen, die den folgenden vier Bedingungen genügen:

1. $^*\int \delta(x)dx = 1$;
2. $\delta(x) = 0$ für $x \not\approx 0$;
3. $^*\int \delta(x)\ {}^*\phi(x)dx \approx \phi(0)$ für $\phi \in C_0^{(\infty)}$;
4. $\delta \in {}^*C^{(\infty)}$.