Hyperreelle Zahlen, Folgen und Reihen

Frederik Stefan Herzberg
Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis
Wintersemester 2002/03
Mathematisches Institut der Universität Bonn

20. Januar 2003

Zusammenfassung

In dem Vortrag, welcher das Transferprinzip und den Begriff der Nichtstandardeinbettung eingeführt hat, wurden erste, grundlegende Ergebnisse über die Standard- und die Nichtstandardwelt sowie ihre Bezüge bereitgestellt. Es wird sich zeigen, daß interne Mengen aufgrund ihrer Reichhaltigkeit eine entscheidende Rolle bei fundamentalen Beweisprinzipien der Nichtstandardanalysis spielen. Mit Hilfe der schon bekannten Klassifikation von Elementen des angeordneten Körpers ${}^*\mathbb{R}$, dessen Konstruktion zuvor axiomatisiert worden ist, werden wir in der Lage sein, handliche Kriterien für analytische Eigenschaften von Folgen und Reihen zu formulieren. Bei anschließenden Beweisen bekannter Sätze wird die Eleganz von Nichtstandardmethoden auf diesem Gebiet der Analysis erkennbar werden.

Wir arbeiten im folgenden mit einer fest gewählten Nichtstandardeinbettung * und setzen den grundlegenden Aufbau der Nichtstandardtheorie, wie er etwa in [Landers/Rogge, pp. 64-95] dargestellt wird, voraus. Man vergegenwärtige sich zu Beginn die Begriffe "finit", "infinitesimal", "unendlich", "Standardteil" sowie das Symbol "$\approx$":

Erinnerung 1. *Es seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$. Dann definiert man*

1. $x \approx 0 :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |x| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow: x$ *infinitesimal*
2. $x \approx y :\Leftrightarrow x - y \approx 0$
3. x *positiv unendlich* $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ x \geq n$
4. x *negativ unendlich* $:\Leftrightarrow -x$ *positiv unendlich*
5. $st(x) = z :\Leftrightarrow x \approx z$
6. x *finit* $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ |x| \leq n$
7. $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R}) := \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid x \text{ finit}\}$.

$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation, st ist funktional (wodurch die Schreibweise der Definition von st gerechtfertigt wird), ordnungserhaltend und linear über dem angeordneten Körper ${}^*\mathbb{R}$.

Wir wollen bestimmte Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}$ aufgrund ihres engen Bezugs zu $\mathbb{R}$ auszeichnen:

Definition 1. *Für $r \in \mathbb{R}$ bezeichnet $m(r) := \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx r\}$ die* Monade *von r.*

Der Begriff der "Monade" wird durch folgende Eigenschaften illustriert:

Proposition 1. *Für $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $m(r) = \{r + \varepsilon \mid \varepsilon \text{ infinitesimal}\}$
2. $m(r) = \{y \in \text{fin}(^*\mathbb{R}) \mid st(y) = r\}$
3. $r_1 \neq r_2 \Rightarrow m(r_1) \cap m(r_2) = \emptyset$
4. $\text{fin}(^*\mathbb{R}) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} m(r)$

Beweis. Einfaches Umformen genügt:

1. $\{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx r\} = \{r + y - r \in {}^*\mathbb{R} \mid y - r \approx 0\} \overset{\varepsilon := y - r}{=} \{r + \varepsilon \in {}^*\mathbb{R} \mid \varepsilon \approx 0\} = \{r + \varepsilon \in {}^*\mathbb{R} \mid \varepsilon \text{ infinitesimal}\}$
2. $\{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx r\} =_{r \in \mathbb{R}} \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \in \text{fin}(^*\mathbb{R}), y \approx r\} = \{y \in \text{fin}(^*\mathbb{R}) \mid y \approx r\} = \{y \in \text{fin}(^*\mathbb{R}) \mid st(y) = r\}$
3. Aus $y \in m(r_1) \cap m(r_2)$ folgt $y \approx r_1, y \approx r_2$. Da $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, erhält man $r_1 \approx r_2$. Aber $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, also $0 \approx r_1 - r_2 \in \mathbb{R}$, das heißt $0 = r_1 - r_2$. Widerspruch!

□

Aus dem, was wir bereits über interne Mengen wissen, folgt

Satz 1 (Permanenzprinzipien für interne Formeln). *Es sei $\psi[\underline{x}]$ eine interne Formel. Dann gilt:*

1. (Overflow Principle) $\forall n \in \mathbb{N}\ \psi[n] \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n \leq h \Rightarrow \psi[n])$.
2. (Underflow Principle) $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \psi[h] \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n \geq m \Rightarrow \psi[n])$.
3. $\forall \varepsilon \approx 0\ \psi[\varepsilon] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+\ \forall b \in {}^*\mathbb{R}\ (|b| \leq c \Rightarrow \psi[b])$.

Beweis.

1. Definiere $A := \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall k \leq n\ \psi[k]\}$. Nach dem Prinzip der internen Definition ist dann A eine interne Menge. Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{N} \subset A$. Da A intern ist, $\mathbb{N}$ jedoch nicht, folgt $\mathbb{N} \subsetneq A$. Nach Definition ist $A \subset {}^*\mathbb{N}$, also existiert ein $h \in ({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}) \cap A$. Dieses h bezeugt die fragliche Aussage.
2. Dual zu 1.: Definiere $B := \{h \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall k \geq h\ \psi[k]\}$. Nach dem Prinzip der internen Definition ist dann B eine interne Menge. Nach Voraussetzung gilt ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \subset B$. Da B intern ist, ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ jedoch nicht, folgt ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \subsetneq B$. Nach Definition ist $B \subset {}^*\mathbb{N}$, also existiert ein $n \in ({}^*\mathbb{N} - ({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})) \cap B = \mathbb{N} \cap B$. Dieses n bezeugt die fragliche Aussage.
3. Definiere $C := \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall b \in {}^*\mathbb{R}\ (|b| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \psi[b])\}$. Nach dem Prinzip der internen Definition ist dann C eine interne Menge. Nach Voraussetzung gilt ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \subset C$. Da C intern ist, ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ jedoch nicht, folgt ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \subsetneq B$. Nach Definition ist $C \subset {}^*\mathbb{N}$, also existiert ein $n \in ({}^*\mathbb{N} - ({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})) \cap C = \mathbb{N} \cap C$. Setze nun $c := \frac{1}{n}$ und man erhalte einen Zeugen für die fragliche Aussage.

□

Hieraus folgt ein Ergebnis über Approximationen in ${}^*\mathbb{R}$:

Korollar 1. *Für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:*

1. *x unendlich* $\Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |x| \geq h$
2. *x infinitesimal* $\Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |x| \leq \frac{1}{h}$
3. $\exists c \in {}^*\mathbb{Q}\ x \approx c$

Beweis.

1. Wende das Overflow Principle zu gegebenem $x \in {}^*\mathbb{R}$ an auf die Formel $\psi[\underline{x}]$, definiert durch $\psi[n] :\equiv |x| \geq n$.
2. Dual zu 1.: Wende das Overflow Principle zu gegebenem $x \in {}^*\mathbb{R}$ an auf die Formel $\psi[\underline{x}]$, definiert durch $\psi[n] :\equiv |x| \leq \frac{1}{n}$.

3. Setze hier $\psi[n] :\equiv \forall y \in {}^*\mathbb{R}\ \exists c \in {}^*\mathbb{Q}\ |y-c| \leq \frac{1}{n}$. Die Formel
$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{Q}\ |y-c| \leq \frac{1}{n}$$
ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ gültig. ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$!) Transfer liefert, daß $\psi[n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit läßt sich auch hier das Overflow Principle anwenden.

$\square$

Des weiteren liefern die Permanenzprinzipien für interne Formeln

Korollar 2. *Es sei $A \subset {}^*\mathbb{R}$ intern und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N}\ \ \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq h\} \subset A$
2. $m(r) \subset A \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+\ \ \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x-r| \leq c\} \subset A$
3. $fin({}^*\mathbb{R}) \subset A \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x| \leq h\} \subset A$

Beweis.

1. Wende zu gegebenem $A \subset {}^*\mathbb{R}$ das Overflow Principle an auf die Formel $\psi[\underline{x}]$, definiert durch $\psi[n] :\equiv n \in A$.
2. Nach Proposition 1.1 ist $m(r) = \{r+\varepsilon \mid \varepsilon \approx 0\}$. Mit der Voraussetzung $m(r) \subset A$ folgt $\forall \varepsilon \approx 0\ r+\varepsilon \in A$. Satz 1.3 liefert dann die Existenz eines $c \in \mathbb{R}_+$ so daß $\forall b \in {}^*\mathbb{R}\ (|b| \leq c \Rightarrow r+b \in A)$. Nun folgt (mit $x := b+r, {}^*\mathbb{R} = r + {}^*\mathbb{R}$): $\forall x \in {}^*\mathbb{R}\ (|x-r| \leq c \Rightarrow x \in A)$, daher $\{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x-r| \leq c\} \subset A$.
3. Wende das Overflow Principle auf die interne Formel $\psi[n] :\equiv \forall x \in \mathbb{R}\ (|x| \leq n \Rightarrow x \in A)$ an, die nach Voraussetzung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$\square$

Zusammen mit den Ergebnissen des letzten Vortrages (Lemma 3.2, Korollar 4) implizieren die Permanenzprinzipien aus Satz 1:

Korollar 3. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ mit $|A| \geq \omega$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind A, ${}^*A - A$, ${}^*\mathbb{R} - A$ sowie $m(r)$ und $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ extern.*

Beweis. Nach den Ergebnissen des vorangegangenen Vortrags bleibt noch zu zeigen, daß $m(r)$ und $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ extern sind.

1. Wäre $m(r)$ intern, ließe sich auf die Formel $\psi[\underline{x}]$, definiert durch $\psi[x] :\equiv (r+x) \in m(r)$, der Satz 1.3 anwenden. Dies liefert die Existenz eines $c \in \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $\forall x \in {}^*\mathbb{R}\ (|x| \leq c \Rightarrow r+x \in m(r))$, also mit Proposition 1.1: $m(r) \subsetneq \{r+x \mid x \in {}^*\mathbb{R}, |x| \leq c\} \subset m(r)$. Widerspruch!
2. Wäre $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ intern, ließe sich auf die Formel $\psi[\underline{x}]$, definiert durch $\psi[n] :\equiv n \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, das Overflow Principle anwenden. Dies liefert die Existenz eines $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n \leq h \Rightarrow n \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, insbesondere also $h \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$. Da h als hypernatürliche Zahl unendlich groß ist, erhält man einen Widerspruch!

$\square$

Nun wollen wir uns – die gerade bewiesenen Eigenschaften interner Mengen im Hinterkopf behaltend – ersten Aussagen der Analysis mit Nichtstandardmethoden nähern:

Proposition 2 (Nichtstandardkriterien für Grenzwerte und Häufungspunkte). *Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$ ist, so gilt*

1. *a Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx a$*
2. *a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx a$*

Hierin haben wir ${}^*a_n$ für ${}^*\mathbf{a}(n)$ notiert ($n \in {}^*\mathbb{N}$), wobei $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ stellt dies, da wir es mit einer reellen Folge zu tun haben und ${}^*\mathbf{a}(n) = {}^*\mathbf{a}({}^*n)$ gilt, keine Mehrdeutigkeit dar. Für $n \notin \mathbb{N}$ ist der Ausdruck ${}^*a_n$ ohnehin noch nicht belegt. Indem wir eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Abbildung $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen, dürfen wir nach allem, was wir über Nichtstandardeinbettungen wissen, schreiben: ${}^*(\mathbf{a}\ominus\mathbf{b})(n) = {}^*\mathbf{a}(n) {}^*\ominus {}^*\mathbf{b}(n)$. Mit diesen Notationen verkürzen wir die folgenden Beweise.

Beweis. 1. "$\Rightarrow$". Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (k \geq n \Rightarrow |a - \underbrace{a_k}_{=\mathbf{a}(k)}| < \varepsilon).$$

Fixiere dieses n. Das Transferprinzip liefert dann

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}(k \geq n \Rightarrow |a - \underbrace{{}^*a_k}_{{}^*\mathbf{a}(k)}| < \varepsilon)$$

(wie üblich werden die Operationen und die Betragsfunktion in ${}^*\mathbb{R}$ aufgrund ihrer Kompatibilität mit ihren Urbildern unter * auch mit $+, -, \cdot, \div, |.|$ bezeichnet). Da die hypernatürlichen Zahlen größer als alle natürlichen Zahlen sind, ist das Antezedens des Konditionals für sie stets wahr und wir dürfen folgern: $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |a - {}^*a_k| < \varepsilon$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig war, folgt

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ |a - {}^*a_k| < \varepsilon,$$

also $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |a - {}^*a_k| \approx 0$, das heißt $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ a \approx {}^*a_k$.
"$\Leftarrow$". $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ a \approx {}^*a_k$ bedeutet $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |a - {}^*\mathbf{a}(k)| \approx 0$. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |a - {}^*\mathbf{a}(k)| < \varepsilon$. Die Formel, über welche hier quantifiziert wird, ist intern, daher folgt nach dem Underflow Principle:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in {}^*\mathbb{N}\ (k \geq n \Rightarrow |a - {}^*\mathbf{a}(k)| < \varepsilon).$$

Mit dem Transferprinzip und $a_k = \mathbf{a}(k)$ erhält man

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (k \geq n \Rightarrow |a - a_k| < \varepsilon).$$

Generalisieren über ε liefert wie gewünscht

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (k \geq n \Rightarrow |a - a_k| < \varepsilon).$$

2. "$\Rightarrow$". Es gelte

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}\ (k \geq n \wedge |a - \mathbf{a}(k)| < \varepsilon).$$

Transfer dieser Aussage liefert

$$\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+ \forall n \in {}^*\mathbb{N} \exists k \in {}^*\mathbb{N}\ (k \geq n \wedge |a - {}^*\mathbf{a}(k)| < \varepsilon).$$

Wähle nun $\varepsilon \approx 0, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Dann sichert uns dies letzte Aussage die Existenz eines $k \in {}^*\mathbb{N}$ mit $k \geq n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ und $|a - {}^*a_k| < \varepsilon$. Da n als hypernatürliche Zahl unendlich groß ist, muß dies auch für $k \geq n$ gelten, also $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Da ε infinitesimal gewählt war, folgt $a \approx {}^*a_k$.
"$\Leftarrow$". Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx a.$$

Da Elemente von ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ unendlich groß sind, folgt zusammen mit der Definition von $\approx$:

$$\exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ (h \geq k \wedge |{}^*\mathbf{a}(k) - a| < \varepsilon).$$

Nach Transfer dieser Aussage hat man

$$\exists h \in \mathbb{N} - \mathbb{N}\ (h \geq k \wedge |\mathbf{a}(k) - a| < \varepsilon).$$

Generalisieren über k und ε liefert die Behauptung.

□

Proposition 3. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann gilt:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
3. $b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis. Nach dem gerade bewiesenen Nichtstandardkriterium für Grenzwerte gilt $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx a$ und $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*b_h \approx b$. Aufgrund der Eigenschaften von $\approx$ (die sich aus der Linearität von st ergeben) folgt dann $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \ominus {}^*b_h \approx a \ominus b$ für $\ominus \in \{+, -, \cdot\}$. Anwendung des obigen Nichtstandardkriteriums für Grenzwerte liefert dann die Behauptungen 1. und 2.
Zu 3. beachte man, daß aus $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*b_h \approx b$ und $b \neq 0$ folgt: $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ st({}^*b_h) = b \neq 0$ und somit $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*b_h \neq 0$, da st ordnungserhaltend auf dem angeordneten Körper ${}^*\mathbb{R}$ ist. Wie zuvor liefern die Eigenschaften von $\approx$: $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \frac{{}^*a_h}{{}^*b_h} \approx \frac{a}{b}$ und die Behauptung folgt mit dem Nichtstandardkriterium für Grenzwerte in entgegengesetzter Richtung. □

Dieser überaus einfache Beweis zeigt die Fruchtbarkeit der Nichtstandardmethoden. Ein weiteres Nichtstandardkriterium für eine analytische Eigenschaft liefern uns Transferprinzip und Underflow Principle:

Proposition 4 (Nichtstandardkriterium für Beschränktheit). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt* $\Leftrightarrow$ $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h$ *finit*

Beweis. "$\Rightarrow$". Nach Voraussetzung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $\forall k \in \mathbb{N}\ |a_k| \leq m$, also

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |\mathbf{a}(k)| \leq m.$$

Nach dem Transferprinzip gilt dann

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ |{}^*\mathbf{a}(k)| \leq m,$$

woraus die Behauptung tautologisch folgt.
"$\Leftarrow$". Nach Voraussetzung gilt die interne Formel

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ |{}^*a_k| \leq h$$

für jedes $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Nach dem Underflow Principle folgt die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\forall h \in {}^*\mathbb{N}\ (h \geq n \Rightarrow \forall\ k \in {}^*\mathbb{N} |{}^*a_k| \leq h).$$

Speziell für $h = n$ haben wir also

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ |{}^*a_k| \leq n.$$

Wegen ${}^*a_k = {}^*\mathbf{a}(k) = \mathbf{a}(k) = a_k$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt sofort

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |a_k| \leq n$$

und damit die Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Mit den bisher bewiesenen Kriterien folgt umstandslos

Korollar 4 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, $h \in {}^*\mathbb{N}$. Nach dem vorherigen Korollar ist dann ${}^*a_h$ finit. Gemäß dem Nichtstandardkriterium für Häufungspunkte ist unter diesen Voraussetzungen $st({}^*a_h)$ eine reell und ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist Vollständigkeit. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist mit dem (obendrein leicht zu beweisenden) Nichtstandardkriterium für Cauchyfolgen fast trivial (aufwendige, wenn auch elegante, Diagonalargumente wie in der Standardtheorie sind nicht vonnöten):

Proposition 5.

1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow \forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx {}^*a_k$*
2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent*

Beweis. 1. "$\Rightarrow$". Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\forall h, k \in \mathbb{N}\ (h, k \geq N \Rightarrow |a_h - a_k| < \varepsilon).$$

Wenn wir das Bekannte über das Bild von $|a_h - a_k|$ unter * berücksichtigen, liefert das Transferprinzip

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N}\ (h, k \geq N \Rightarrow |{}^*a_h - {}^*a_k| < \varepsilon).$$

Da die Elemente von ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ unendlich groß sind, folgt

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |{}^*a_h - {}^*a_k| < \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, dürfen wir generalisieren:

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ |{}^*a_h - {}^*a_k| < \varepsilon.$$

Daher gilt

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ {}^*a_h \approx {}^*a_k.$$

"$\Leftarrow$". Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, es gelte $\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ {}^*a_h \approx {}^*a_k$. Dann ist

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |{}^*a_h - {}^*a_k| \approx 0.$$

Sei nun $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ wählt, so gilt insbesondere

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N}\ (h, k \geq n \Rightarrow |{}^*a_h - {}^*a_k| < \varepsilon).$$

Man beachte hierbei erneut, daß es sich hierbei um eine interne Formel handelt, die für jedes $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ gilt. Nach dem Underflow Principle existiert also ein $n \in \mathbb{N}$, so daß die voranstehende Formel für alle $l \in {}^*\mathbb{N}$ mit $l \geq n$ zutrifft, insbesondere also für n selbst. Damit haben wir

$$\forall h, k \in {}^*\mathbb{N}\ (h, k \geq n \Rightarrow |{}^*a_h - {}^*a_k| < \varepsilon).$$

Transfer dieser Aussage unter Beachtung der bekannten Eigenschaften von * liefert

$$\forall h, k \in \mathbb{N} - \mathbb{N}\ (h, k \geq n \Rightarrow |a_h - a_k| < \varepsilon).$$

Genau dies aber war zu zeigen.

2. "$\Rightarrow$". Nach 1. gilt $\forall h, k \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\; {}^*a_h \approx {}^*a_k$, also $\forall h, k \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\; st({}^*a_h) = st({}^*a_k)$. Definiere nun für ein $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$: $a := st({}^*a_h)$. ($\approx$ ist nur auf $fin({}^*\mathbb{R} \times fin({}^*\mathbb{R}$ definiert, daher existiert $st({}^*a_h)$!) Dann folgt nach dem vorherigen $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; a = st({}^*a_k)$, also $\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; a \approx {}^*a_k$. Nach dem Nichtstandardkriterium für Grenzwerte folgt die Konvergenz der Folge gegen a.
"$\Leftarrow$". Nach dem Nichtstandardkriterium für Konvergenz gilt $\forall h \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\; {}^*a_h \approx a$, also $\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; ({}^*a_h \approx a \wedge {}^*a_k \approx a)$ Da $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt $\forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; {}^*a_h \approx {}^*a_k$ und nach 1. die Behauptung.

□

Auch bestimmte Divergenz (d.h. Konvergenz gegen unendliche "Werte") läßt sich mit Nichtstandardmethoden analysieren:

Proposition 6. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann haben die folgenden Kriterien Gültigkeit:*

1. *$+\infty$ uneigentlicher Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ${}^*a_h$ positiv unendlich*
2. *$-\infty$ uneigentlicher Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ${}^*a_h$ negativ unendlich*
3. *$+\infty$ uneigentlicher Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ${}^*a_h$ positiv unendlich*
4. *$-\infty$ uneigentlicher Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ${}^*a_h$ negativ unendlich*

Beweis. 1. "$\Rightarrow$". Sei $R \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\forall k \in \mathbb{N}\; (k \geq n \Rightarrow a_k \geq R),$$

nach Transfer:

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\; (k \geq n \Rightarrow {}^*a_k \geq R).$$

Da die Elemente von ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ unendlich groß sind, gilt wieder

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; {}^*a_k \geq R.$$

Nun war aber $R \in \mathbb{R}_+$ beliebig und daher gilt

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; \forall R \in \mathbb{R}_+\; {}^*a_k \geq R,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
"$\Leftarrow$". Gegeben sei ein $R \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung gilt

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\; {}^*a_k \geq R.$$

Die Formel, über welche quantifiziert wird, ist wieder intern, die Anwendung des Underflow Principle daher zulässig. So erhalten wir ein $n \in \mathbb{N}$, mit welchem gilt:

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\; (k \geq n \Rightarrow {}^*a_k \geq R).$$

Transfer liefert

$$\forall k \in \mathbb{N}\; (k \geq n \Rightarrow a_k \geq R),$$

was zu zeigen war.

2. Wir müssen nur das Resultat aus 1. auf die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden.

3. "$\Rightarrow$". Es gilt nach Voraussetzung

$$\forall R \in \mathbb{R}_+ \forall k \in \mathbb{N} \exists h \in \mathbb{N}\ (h \geq k \wedge a_h \geq R),$$

was sich nach den bereits häufig verwandten Regeln transferiert zu

$$\forall R \in {}^*\mathbb{R}_+ \forall k \in {}^*\mathbb{N} \exists h \in {}^*\mathbb{N}\ (h \geq k \wedge {}^*a_h \geq R).$$

Wenn man nun $k, R \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ wählt, folgt die Behauptung.
"$\Leftarrow$". Seien $R \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Abschwächen der Voraussetzung liefert

$$\exists h \in {}^*\mathbb{N}\ (h \geq n \wedge {}^*a_h \geq R),$$

was sich zu

$$\exists h \in \mathbb{N}\ (h \geq n \wedge a_h \geq R)$$

transferiert. Genau dies aber war zu zeigen.

4. Es genügt die Anwendung des Resultats aus 3. auf die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Wir wollen allgemein, falls $r \in {}^*\mathbb{R}$ positiv (negativ) unendlich ist, $st(r) := +\infty$ ($st(r) := -\infty$) setzen. Mit dieser Notation erhalten wir eine äußerst prägnante Beschreibung von Häufungspunkten aus unseren bisherigen Ergebnissen:

Proposition 7. *Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist*

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a \textit{ Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \{st({}^*a_h) \mid h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt tautologisch aus den Propositionen 2.2, 6.3 und 6.4, wenn man zwischen eigentlichen und uneigentlichen Häufungspunkten differenziert.

□

Was sich für Folgen formulieren läßt, gilt natürlich auch für Reihen, indem man, ganz analog zu den Betrachtungen über Folgen, eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ als Abbildung $\mathrm{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i$ auffaßt, das Bild ${}^*\mathrm{s}$ unter * betrachtet, und schließlich vereinbarungsgemäß $\sum_{i=1}^{k} {}^*a_i$ statt $\mathrm{s}(k)$ auch für $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ schreibt:

Proposition 8. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \approx a$*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \approx \sum_{i=1}^{k} {}^*a_i$*

Man kann die Limesbildung auf konvergenten Folgen, welche nach dem bisher Gezeigten eine geschlossene Darstellung mit Nichtstandardobjekten erlaubt, als eine lineare Abbildung vom reellen Vektorraum der konvergenten Folgen nach $\mathbb{R}$ auffassen. Diese Abbildung kann man auf den Raum der beschränkten Folgen fortsetzen, wie Proposition 9.2 zeigen wird. Deren Formulierung erleichtern wir uns durch

Definition 2. *Eine Abbildung $\ell : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a}$ beschränkt$\} \to \mathbb{R}$ heißt* Banachlimes, *falls gilt:*

1. *ℓ ist positiv*
2. *ℓ ist linear*
3. *ℓ ordnet jeder konvergenten reellen Folge ihren Grenzwert zu.*

Bestimmte Banachlimites lassen sich, wie angekündigt, explizit angeben:

Proposition 9. *Für $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ setze man*

$$\ell_0 : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a} \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto st\left(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i\right)$$

$$\ell_1 : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a} \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto st({}^*a_h).$$

Dann gilt:

1. *ℓ_0 ist ein verschiebungsinvarianter Banachlimes.*
2. *ℓ_1 ordnet jeder beschränkten Folge einen ihrer Häufungspunkte zu.*

Beweis. 1. Wir weisen nach:

- ℓ_0 ist positiv! Es gelte hierzu $\forall i \in \mathbb{N}\ a_i \geq 0$. Wir wissen dann

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0,$$

was sich mit der zuvor auch für $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ eingeführten Notation "$\sum_{i=1}^{k} {}^*a_i$" transferiert zu

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}^*a_i \geq 0,$$

also insbesondere $\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \geq 0$ und damit

$$st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i) \geq 0.$$

- ℓ_0 ist linear! Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\alpha a_i + \beta b_i)}_{\alpha\mathbf{a}(i)+\beta\mathbf{b}(i)} = \alpha\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{a_i}_{\mathbf{a}(i)} + \beta\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{a_i}_{\mathbf{a}(i)}.$$

Mit den mittlerweile vertrauten Schreibweisen erhält man durch Transfer

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\alpha^*a_i + \beta^*b_i)}_{\alpha^*\mathbf{a}(i)+\beta^*\mathbf{b}(i)} = \alpha\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{{}^*a_i}_{{}^*\mathbf{a}(i)} + \beta\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{{}^*b_i}_{{}^*\mathbf{b}(i)},$$

also

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ st(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\alpha^*a_i + \beta^*b_i)}_{\alpha^*\mathbf{a}(i)+\beta^*\mathbf{b}(i)}) = \alpha st(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}^*a_i) + \beta st(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}^*b_i)$$

aufgrund der Linearität von st. Mit $k = h$ erhält man so:

$$\ell_0(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\ell_0(\mathbf{a}) + \beta\ell_0(\mathbf{b}).$$

- ℓ_0 ordnet jeder konvergenten reellen Folge ihren Grenzwert zu! Es gelte $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Wie man aus der eindimensionalen Analysis weiß, folgt daraus auch $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_i}\sum_{i=1} a_i = a$, nach unserem Nichtstandardkriterium aus Proposition 2 und mit unserer üblichen Notation für den Wert einer hyperreellen Reihe also $\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \approx a$, das heißt

$$st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i) = a.$$

- ℓ_0 ist verschiebungsinvariant! Sei hierzu $\mathbf{a}'$ definiert durch $\forall i \in \mathbb{N}\ \mathbf{a}'(i) = \mathbf{a}(i+n)$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt unter Ausnutzung der üblichen Rechenregeln für endliche Summen (die sich durch geeigneten Transfer auch auf Ausdrücke der Form $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}^*b_i$ mit $k \in {}^*\mathbb{N}$, $\mathbf{b}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ übertragen) und der Eigenschaften von st:

$$\ell_0(\mathbf{a}') = st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} a_{i+n}) = st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} a_i - \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} a_i)$$

$$= st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i) - st(\underbrace{\underbrace{\frac{1}{h}}_{\approx 0\ (h \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}!)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})}}_{\approx 0})$$

$$= st(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i) - 0 = \ell_0(\mathbf{a}).$$

2. Der Nachweis der einzelnen Eigenschaften erfolgt hier noch müheloser:

- ℓ_1 ist positiv! Es gelte hierzu

$$\forall k \in \mathbb{N}\ a_k \geq 0,$$

nach Transfer

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ {}^*a_k \geq 0,$$

insbesondere also ${}^*a_h \geq 0$. Da st die Ordnungsrelation erhält:

$$\ell_1(\mathbf{a}) = st({}^*a_h) \geq 0.$$

- ℓ_1 ist linear! Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})(k) = \underbrace{\alpha\mathbf{a}(k) + \beta\mathbf{b}(k)}_{\alpha a_k + \beta b_k},$$

nach Transfer also

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}\ {}^*(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})(k) = \underbrace{\alpha{}^*\mathbf{a}(k) + \beta{}^*\mathbf{b}(k)}_{\alpha{}^*a_k + \beta{}^*b_k},$$

insbesondere gilt mit $k = h$:

$${}^*(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})(h) = \underbrace{\alpha{}^*\mathbf{a}(h) + \beta{}^*\mathbf{b}(h)}_{\alpha{}^*a_h + \beta{}^*b_h}.$$

Mit der Linearität von st folgt wie behauptet

$$\ell_1(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\ell_1(\mathbf{a}) + \beta\ell_1(\mathbf{b}).$$

- ℓ_1 ordnet jeder konvergenten reellen Folge ihren Grenzwert zu! Es gelte hierzu $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Dann folgt nach dem Nichtstandardkriterium für Grenzwerte aus Proposition 2:

$$a = st({}^*a_h) = \ell_1(\mathbf{a}).$$

- ℓ_1 ordnet jeder beschränkten Folge einen ihrer Häufungspunkte zu! Dies ist eine Konsequenz von Proposition 7.

□

Es gibt keinen verschiebungsinvarianten Banachlimes, welcher jeder beschränkten Folge einen ihrer Häufungspunkte zuordnet, wie die zwischen 0 und 1 alternierende Folge $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \frac{1+(-1)^n}{2}$ lehrt. Wäre nämlich ℓ ein solcher Banachlimes, könnte man mit den Hilfsfolgen $\mathbf{a}' : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_{n+1}$ und $\mathbf{b} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto 1$ schließen:

$$1 = \ell(\mathbf{b}) = \ell(\mathbf{a} + \mathbf{a}') = \ell(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{a}') = 2\ell(\mathbf{a}),$$

also $\ell(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}$. Aber $\frac{1}{2}$ ist sicher kein Häufungspunkt von $\mathbf{a}$!

Literatur

[Koepke/Burghardt] Koepke, Peter/Burghardt, Manfred: Mengenlehre. Ein Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie; Bonn: Mathematisches Institut, 1996.

[Landers/Rogge] Landers, Dieter/Rogge, Lothar: Nichtstandard Analysis; Berlin [u.a.]: Springer, 1994.