Hyperreelle Zahlen, Folgen und Reihen

Frederik Stefan Herzberg
Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis
Wintersemester 2002/03
Mathematisches Institut der Universität Bonn

26. November 2002

Zusammenfassung

Der letzte Vortrag hat bereits erste, grundlegende Ergebnisse über die Standard- und die Nichtstandardwelt sowie ihre Bezüge bereitgestellt. Es wird sich zeigen, daß interne Mengen aufgrund ihrer Reichhaltigkeit eine entscheidende Rolle bei fundamentalen Beweisprinzipien der Nichtstandardanalysis spielen. Mit Hilfe der schon bekannten Klassifikation von Elementen des angeordneten Körpers $^*\mathbb{R}$, dessen Konstruktion zuvor axiomatisiert worden ist, werden wir in der Lage sein, handliche Kriterien für analytische Eigenschaften von Folgen und Reihen zu formulieren. Bei anschließenden Beweisen bekannter Sätze wird die Eleganz von Nichtstandardmethoden auf diesem Gebiet der Analysis erkennbar werden.

Zu Beginn sei an die Begriffe: "finit", "infinitesimal", "unendlich", "Standardteil" sowie das Symbol "$\approx$" erinnert. Wir arbeiten im folgenden mit einer fest gewählten Nichtstandardeinbettung *.

Definition 1 *Für $r \in \mathbb{R}$ bezeichnet $m(r) := \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx r\}$ die* Monade *von r.*

Der Begriff der "Monade" wird durch folgende Eigenschaften illustriert:

Proposition 1 *Für $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $m(r) = \{r + \varepsilon \mid \varepsilon\ infinitesimal\}$
2. $m(r) = \{y \in fin({}^*\mathbb{R}) \mid st(y) = r\}$
3. $r_1 \neq r_2 \Rightarrow m(r_1) \cap m(r_2) = \emptyset$
4. $fin({}^*\mathbb{R}) = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} m(r)$

Aus dem, was wir bereits über interne Mengen wissen, folgt

Satz 1 (Permanenzprinzipien für interne Formeln) *Es sei $\psi[\underline{x}]$ eine interne Formel. Dann gilt:*

1. (Overflow Principle) $\forall n \in \mathbb{N}\ \psi[n] \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n \leq h \Rightarrow \psi[n])$
2. (Underflow Principle) $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \psi[h] \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}\ (n \geq m \Rightarrow \psi[n])$
3. $\forall \varepsilon \approx 0\ \psi[\varepsilon] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+\ \forall b \in {}^*\mathbb{R}\ (|b| \leq c \Rightarrow \psi[b])$

Hieraus folgt ein Ergebnis über Approximationen an $^*\mathbb{R}$:

Korollar 1 *Für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:*

1. $x\ unendlich \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |x| \geq h$

2. $x\ infinitesimal \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ |x| \leq \frac{1}{h}$

3. $\exists c \in {}^*\mathbb{Q}\ x \approx c$

Des weiteren liefern die Permanenzprinzipien für interne Formeln

Korollar 2 *Es sei $A \subset {}^*\mathbb{R}$ intern und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N}\ \ \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq h\} \subset A$
2. $m(r) \subset A \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+\ \ \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x - r| \leq c\} \subset A$
3. $fin({}^*\mathbb{R}) \subset A \Rightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x| \leq h\} \subset A$

Dies liefert zusammen mit den Ergebnissen des letzten Vortrages (Lemma 3.2, Korollar 4):

Korollar 3 *Sei $A \subset \mathbb{R}$ mit $|A| \geq \omega$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind A, ${}^*A - A$, ${}^*\mathbb{R} - A$ sowie $m(r)$ und $fin({}^*\mathbb{R})$ extern.*

Nun wollen wir uns – die gerade bewiesenen Eigenschaften interner Mengen im Hinterkopf behaltend – ersten Aussagen der Analysis mit Nichtstandardmethoden nähern:

Proposition 2 (Nichtstandardkriterien für Grenzwerte und Häufungspunkte) *Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$ ist, so gilt*

1. $a\ Grenzwert\ von\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ {}^*a_h \approx a$
2. $a\ Häufungspunkt\ von\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ {}^*a_h \approx a$

Hierin haben wir ${}^*a_n$ für ${}^*\mathbf{a}(n)$ notiert ($n \in {}^*\mathbb{N}$) . Für $n \in \mathbb{N}$ stellt dies, da wir es mit einer reellen Folge zu tun haben und ${}^*\mathbf{a}(n) =^* \mathbf{a}({}^*n)$ gilt, keine Mehrdeutigkeit dar. Für $n \notin \mathbb{N}$ ist ${}^*a_n$ ohnehin noch nicht belegt. Indem wir eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Abbildung $\mathbf{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen, dürfen wir nach allem, was wir über Nichtstandardeinbettungen wissen, schreiben: ${}^*(\mathbf{a} \ominus \mathbf{b})(n) = {}^*\mathbf{a}(n)\ {}^*\ominus\ {}^*\mathbf{a}(n)$. Mit diesen Notationen verkürzen wir den Beweis von

Proposition 3 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
3. $b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Der überaus einfache Beweis zeigt die Fruchtbarkeit der Nichtstandardmethoden. Ein weiteres Nichtstandardkriterium für eine analytische Eigenschaft liefern uns Transferprinzip und Underflow Principle:

Proposition 4 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ beschränkt \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ {}^*a_h\ finit$

Mit den bisher bewiesenen Kriterien folgt umstandslos

Korollar 4 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt.*

Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist Vollständigkeit. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist mit dem (obendrein leicht zu beweisenden) Nichtstandardkriterium für Cauchyfolgen fast trivial (aufwendige, wenn auch elegante, Diagonalargumente wie in der Standardtheorie sind nicht vonnöten):

Proposition 5

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ Cauchyfolge \Leftrightarrow \forall h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ {}^*a_h \approx {}^*a_k$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ Cauchyfolge \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ konvergent$

Auch bestimmte Divergenz läßt sich mit Nichtstandardmethoden analysieren:

Proposition 6 *1.* $+\infty$ *uneigentlicher Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ {}^*a_h$ *positiv unendlich*

2. $-\infty$ *uneigentlicher Grenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\ \ {}^*a_h$ *negativ unendlich*
3. $+\infty$ *uneigentlicher Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\ \ {}^*a_h$ *positiv unendlich*
4. $-\infty$ *uneigentlicher Häufungspunkt von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists h \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\ \ {}^*a_h$ *negativ unendlich*

Wir wollen allgemein, falls $r \in {}^*\mathbb{R}$ positiv (negativ) unendlich ist, $st(r) := +\infty$ ($st(r) := -\infty$) setzen. Mit dieser Notation erhalten wir eine äußerst prägnante Beschreibung von Haüfungspunkten aus unseren bisherigen Ergebnissen:

Proposition 7 *Für* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ist*

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \{st({}^*a_h) \mid h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\}.$$

Was sich für Folgen formulieren läßt, gilt natürlich auch für Reihen:

Proposition 8 *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *und* $a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert gegen* $a \Leftrightarrow \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ \sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \approx a$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent* $\Leftrightarrow \forall h,k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\ \ \sum_{i=1}^{h} {}^*a_i \approx \sum_{i=1}^{k} {}^*a_i$

Man kann die Limesbildung als eine lineare Abbildung vom reellen Vektorraum der konvergenten Folgen nach $\mathbb{R}$ auffassen. Diese Abbildung kann man auf den Raum der beschränkten Folgen fortsetzen.

Definition 2 *Eine Abbildung* $\ell : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a} \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}$ *heißt Banachlimes, falls gilt:*

1. *ℓ ist positiv*
2. *ℓ ist linear*
3. *ℓ ordnet jeder konvergenten reellen Folge ihren Grenzwert zu.*

Bestimmte Banachlimites lassen sich explizit angeben:

Proposition 9 *Für* $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *setze man*

$$\ell_0 : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a} \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto st\left(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} {}^*a_i\right)$$

$$\ell_1 : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \mathbf{a} \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto st({}^*a_h).$$

Dann gilt:

1. *ℓ_0 ist ein verschiebungsinvarianter Banachlimes.*
2. *ℓ_1 ordnet jeder beschränkten Folge einen ihrer Häufungspunkte zu.*

Es gibt keinen Banachlimes mit beiden Eigenschaften, wie die zwischen 0 und 1 alternierende Folge lehrt.

Literatur

[Koepke/Burghardt] Koepke, Peter/Burghardt, Manfred: Mengenlehre. Ein Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie; Bonn: Mathematisches Institut, 1996.

[Landers/Rogge] Landers, Dieter/Rogge, Lothar: Nichtstandard Analysis; Berlin [u.a.]: Springer, 1994.