Das Transferprinzip und Nichtstandardeinbettungen

Frederik Stefan Herzberg
Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis
Wintersemester 2002/03
Mathematisches Institut der Universität Bonn

19. November 2002

Zusammenfassung

Unter dem "Transferprinzip" versteht man zunächst nur einen Teil der Definition von "satztreue Einbettung"; dieses Konzept ist eine Verallgemeinerung der später zu definierenden "Nichtstandardeinbettung". Inhalt des Transferprinzips ist, daß sich Aussagen einer mathematischen Theorie (Standardtheorie), die in eine andere (Nichtstandardtheorie) eingebettet wird, auf die Bilder unter der Nichtstandardeinbettung übertragen lassen. Einige Objekte der Nichtstandardtheorie haben engeren Bezug zur Standardwelt als andere: In diesem Sinne werden wir die Objekte der Nichtstandardtheorie in *externe* und *interne* Elemente klassifizieren.

Zuallererst wollen wir sauber definieren, was unter den "Objekten einer mathematischen Theorie" zu verstehen ist:

Definition 1 *Sei $V \neq \emptyset$ eine Menge, die Menge der "Urelemente". Wir definieren induktiv $V_0 := V$ und $V_{\nu+1} := V_\nu \cup P(V_\nu)$ für $\nu \in \mathbb{N}_0 = \omega$. Außerdem definieren*

$$\widehat{V} := \bigcup_{\nu=0}^{\infty} V_\nu$$

als die Superstruktur *über V.*

Alternative Beschreibungen der Superstruktur $\widehat{V}$ ergeben sich aus

Proposition 1
1. *Für alle $\nu \in \mathbb{N}_0 = \omega$ gilt $V_{\nu+1} = V \cup P(V_\nu)$.*
2. *Für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ ist V_ν transitiv.*
3. *$\widehat{V} = V \cup \bigcup_{\nu=0}^{\infty} P(V_\nu)$*

Die V_ν stehen in folgenden Beziehungen zueinander:

Proposition 2 *Für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt*
1. *$A \in V_\nu - V \Leftrightarrow A \subset V_{\nu-1}$*
2. *$A \in V_\nu - V \Rightarrow P(A) \in V_{\nu+1}$*
3. *$B \subset A \in V_\nu - V \Rightarrow B \in V_\nu$*
4. *$\forall j \in J\ A_j \in V_\nu - V \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in V_\nu$*
5. *$a, b \in V_{\nu-1} \Leftrightarrow \{a, b\} \in V_\nu$*

6. $a, b \in V_{\nu-1} \Leftrightarrow \langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in V_{\nu+1}$
7. $A, B \in V_\nu - V \Rightarrow A \times B \in V_{\nu+2}$

Man beachte für das folgende, daß in [Landers/Rogge] "Menge" im Zusammenhang mit einer Superstruktur $\widehat{V}$ nicht mengentheoretisch – etwa in Abgrenzung zu "Klassenterm" – zu verstehen ist, sondern lediglich Elemente von $\widehat{V} - V$ bezeichnet. Die Definition von n-Tupeln erfolgt induktiv auf der Grundlage des Paarbegriffs nach Kuratowski: $\langle a\rangle := a, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle := \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$. Das Zeichen "$g \restriction a$" bei [Landers/Rogge] entspricht "$g(a)$" in [Koepke/Burghardt] mit dem Unterschied, daß $g \restriction a$ im Falle der Nichteindeutigkeit $\emptyset$ und nicht V denotiert.

Proposition 3 *1. $\widehat{V}$ ist transitiv*

2. $\widehat{V} \notin \widehat{V}$
3. $A \in \widehat{V}$ *Menge* $\Rightarrow P(A) \in \widehat{V}$
4. $A \in \widehat{V}$ *Menge,* $B \subset A \Rightarrow B \in \widehat{V}$
5. $A_1, \ldots, A_n \in \widehat{V}$ *Mengen* $\Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \widehat{V}, A_1 \times \ldots \times A_n \in \widehat{V}$
6. $a_1, \ldots, a_n \in \widehat{V} \Rightarrow \{a_1 \ldots a_n\} \in \widehat{V}, \langle a_1 \ldots a_n\rangle \in \widehat{V}$
7. $A_1, \ldots, A_n \in \widehat{V}$ *Mengen* $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n A_j \in V_\nu$ *für ein* $\nu \in \mathbb{N}$.

   Sind $R, R_1, R_2 \in \widehat{V}$ *Relationen, so gilt*
8. $\langle a, b\rangle \in R \Rightarrow a, b \in \widehat{V}$
9. $D(R), W(R) \in \widehat{V}$
10. $R[A] \in \widehat{V}$ *für alle Mengen* A
11. $R^{-1} \in \widehat{V}$
12. $R_2 \circ R_1 \in \widehat{V}$
13. *Sind* $A, B \in \widehat{V}$ *Mengen und* $f : A \to B$, *so ist* $f \in \widehat{V}$.
14. $g \restriction a \in \widehat{V}$ *für alle* $g, a \in \widehat{V}$
15. *Ist* $\emptyset \neq A \in \widehat{V}$ *eine Menge,* R *eine Relation über* A *und* $\ominus$ *eine Operation über* A, *so sind* $\ominus, R \in \widehat{V}$ *und* $\ominus \restriction \langle a, b\rangle \in \widehat{V}$ *für alle* $a, b \in A$.

Nun wollen wir in der mathematischen Theorie mit Objekten aus $\widehat{V}$ auch Aussagen betrachten:

Definition 2 *Sei $\widehat{V}$ eine Superstruktur. Elemente von $\widehat{V}$ und Variable wollen wir als* Terme *in $\widehat{V}$ bezeichnen. Ferner soll gelten: Sind τ, ρ Terme, so auch $\langle \tau, \rho\rangle$ und $\tau \restriction \rho$.*

Definition 3 *Sind τ, ρ Terme in $\widehat{V}$, so sind $\tau = \rho$ und $\tau \in \rho$* Formeln *in $\widehat{V}$, die wir auch* Elementarformeln *nennen. Sind ψ, χ Formeln in $\widehat{V}$, $\underline{x}$ eine Variable und τ ein Term in $\widehat{V}$, so sind $\neg\psi$, $(\psi \wedge \chi)$ und $\forall \underline{x} \in \tau\ \psi$ Formeln in $\widehat{V}$.*

Definition 4 *Sei φ eine Formel in $\widehat{V}$, an deren j-ter Stelle die Variable $\underline{x}$ steht. Dann hat $\underline{x}$ an der j-ten Stelle ein* gebundenes Auftreten, *falls sich die j-te Stelle von φ in einem Teilstück von φ der Gestalt $\forall \underline{x} \in \tau\ \psi$ mit einem Term τ und einer Formel ψ befindet. Andernfalls hat $\underline{x}$ an dieser Stelle ein* freies Auftreten. *Eine Variable, die an mindestens einer Stelle von φ frei vorkommt, heißt* freie Variable. *Eine* Aussage *ist eine Formel in $\widehat{V}$ ohne freie Variable.*

Zu einer Formel φ in $\widehat{V}$ definiert man $lo(\varphi)$ als die Anzahl des Auftretens von "$\neg$", "$\wedge$" und "$\forall$" in φ. Um in gewohnter Weise den Begriff der Gültigkeit einer Aussage zu definieren, braucht man

Satz 1 1. *Sei φ eine Aussage in $\widehat{V}$ mit $lo(\varphi) = 0$. Dann besitzt φ genau eine der Formen $\tau = \rho$ und $\tau \in \rho$ mit Termen τ, ρ in $\widehat{V}$, in denen keine Variable auftreten und die daher Elemente von $\widehat{V}$ sind.*

2. *Sei φ eine Aussage in $\widehat{V}$ mit $lo(\varphi) \geq 1$. Dann besitzt φ genau eine der Formen*
   - *$\neg\psi$ mit einer Aussage ψ*
   - *$(\psi \wedge \chi)$ mit Aussagen ψ, χ*
   - *$\forall \underline{x} \in \tau\ \psi$ mit einer Variablen $\underline{x}$, einem Term τ ohne Variable und einer Formel ψ, in der höchstens $\underline{x}$ frei vorkommt.*

Nun kann man wie gewohnt definieren: $\tau = \rho$ ist gültig genau dann, wenn τ und ρ dasselbe Element bezeichnen, etc. etc.

Wir sind jetzt in der Lage, folgende Definition präzise zu treffen:

Definition 5 $^*: \widehat{S} \to \widehat{W}$ *heißt eine* satztreue Einbettung, *falls*

1. $^*S = W$
2. $^*s = s$ *für alle* $s \in S$
3. (Transferprinzip) *Jede Aussage φ in $\widehat{S}$ ist genau dann gültig, wenn die Aussage $^*\varphi$ gültig ist, die aus φ hervorgeht, indem man alle in φ vorkommenden Elemente aus $\widehat{S}$ durch ihre Bilder unter * ersetzt.*

Man schreibt auch $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$, *da* $^*S = W$.

Zunächst kann man mit Hilfe des Transferprinzips zeigen, daß sich elementare Eigenschaften mathematischer Objekte unter satztreuen Einbettungen erhalten. Ein wichtiges *Zwischenziel* wird sein, daß für $S = \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ auch $^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist.

Proposition 4 *Sei* $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung,* $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \widehat{S}$ *und* $A, B \in \widehat{S} - S$. *Es gilt:*

1. $a = b \Leftrightarrow {}^*a = {}^*b$
2. $a \in b \Leftrightarrow {}^*a \in {}^*b$
3. a *Menge* $\Leftrightarrow {}^*a$ *Menge*
4. $A \subset B \Leftrightarrow {}^*A \subset {}^*B$
5. A *transitiv* $\Leftrightarrow {}^*A$ *transitiv*
6. $^*\emptyset = \emptyset$
7. $^*\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle {}^*a_1, \ldots, {}^*a_n\rangle$
8. $^*(a \restriction b) = {}^*a \restriction {}^*b$
9. $^*a = a$ *für alle* $a \in S^n$ *und* $n \in \mathbb{N}$
10. $\{ {}^*a \mid a \in A\} \subset {}^*A$
11. A *endliche Menge* $\Rightarrow {}^*A$ *endliche Menge,* $^*A = \{ {}^*a \mid a \in A\}$
12. $A \subset S^n \Rightarrow A \subset {}^*A,\ {}^*A \cap S^n = A$

Von deutlich größerer Allgemeinheit ist aber folgender

Satz 2 (*-Werte durch Formeln definierter Mengen) *Wenn* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung ist,* $A \in \widehat{S}$ *eine Menge und* φ *eine Aussage in* $\widehat{S}$ *ist, so gilt:*

$$^*\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in {}^*A \mid \varphi[a_1, \ldots, a_n]\ gültig\} = \{\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in A \mid {}^*\varphi[b_1, \ldots, b_n]\ gültig\}.$$

Mit Hilfe von

Lemma 1 *Wenn* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung und* $\nu \in \mathbb{N}_0$ *ist, so gilt*

$$A, B \subset S_\nu \Rightarrow A \times B \subset S_{\nu+2},\ {}^*A \times {}^*B \subset {}^*S_{\nu+2}$$

liefert der vorherige Satz weitere Möglichkeiten des "Transfers":

Proposition 5 *Seien* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung,* $A, B, A_0 \in \widehat{S}$ *Mengen und* $R, R_1, R_2 \in \widehat{S}$ *Relationen. Es sind dann auch* ${}^*R,\ {}^*R_1,\ {}^*R_2$ *Relationen und weiterhin gilt:*

1. ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B,\ {}^*(A - B) = {}^*A - {}^*B,\ {}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B,\ {}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$
2. ${}^*(D(R)) = D({}^*R),\ {}^*(W(R)) = W(R^*),\ {}^*(R[A_0]) = {}^*R[{}^*A_0]$
3. ${}^*(R^{-1}) = ({}^*R)^{-1}$
4. ${}^*(R_2 \circ R_1) = {}^*R_2 \circ {}^*R_1$

Diese allgemeinen Resultate über Relationen lassen sich natürlich verwenden, um Aussagen über die Bilder von Funktionen unter * zu erhalten. Es gilt aber noch mehr:

Proposition 6 *Seien* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung,* $A, B, \in \widehat{S}$ *Mengen und* $f : A \to B$ *eine Funktion. Dann ist* $f \in \widehat{S}$ *und weiter gilt:*

1. ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$ *ist eine Funktion.*
2. f *injektiv* $\Rightarrow$ ${}^*f$ *injektiv*
3. f *surjektiv* $\Rightarrow$ ${}^*f$ *surjektiv*
4. ${}^*(f(a)) = {}^*f({}^*a)$ *für alle* $a \in A$
5. $A \subset S^n, B \subset S^n \Rightarrow \forall a \in A\ \ {}^*f(a) = f(a)$

Schließlich lassen sich Operationen und Relationen über einer bestimmten Menge völlig umstandslos unter einer satztreuen Einbettung übertragen.

Proposition 7 *Seien* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung,* $\emptyset \neq A \in \widehat{S}$ *eine Menge,* $\ominus$ *eine Operation in* A, R *eine Relation über* A *und* $a, b \in A$. *Dann gilt*

1. ${}^*\ominus$ *ist eine Operation über* ${}^*A$ *und* ${}^*(a \ominus b) = {}^*a \ominus {}^*b$.
2. ${}^*R$ *ist eine Relation über* ${}^*A$ *und* ${}^*(a\ R\ b) \Leftrightarrow {}^*a\ \ {}^*R\ \ {}^*b$.
3. *Ist* $A \subset S^n$, *so ist* $A \subset {}^*A$ *und* ${}^*\ominus,\ {}^*R$ *sind Fortsetzungen von* $\ominus$, R. *In Zeichen:* $a\ {}^*\ominus\ b = a \ominus b$ *und* $a\ R\ b \Leftrightarrow a\ \ {}^*R\ b$.

Diese Proposition liefert als Korollare die folgenden Sätze:

Korollar 1 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung und* $\emptyset \neq X \in \widehat{^*S}$ *eine Menge. Dann gilt:*

1. $\langle X, \leq \rangle$ *partiell geordnet* $\Rightarrow \langle {}^*X, {}^*\leq \rangle$ *partiell geordnet.*
2. $\langle X, \leq \rangle$ *total geordnet* $\Rightarrow \langle {}^*X, {}^*\leq \rangle$ *total geordnet.*
3. $\langle X, +, 0 \rangle$ *kommutative Gruppe* $\Rightarrow \langle {}^*X, {}^*+, {}^*0 \rangle$ *kommutative Gruppe*
4. $\langle X, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ *Körper* $\Rightarrow \langle {}^*X, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1 \rangle$ *Körper*
5. $\langle X, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ *angeordneter Körper* $\Rightarrow \langle {}^*X, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1, {}^*\leq \rangle$ *angeordneter Körper.*

Korollar 2 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine satztreue Einbettung mit* $\mathbb{R} \subset S$. *Dann ist* $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ *und es gilt:* $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1, {}^*\leq \rangle$ *ist ein angeordneter Körper, wobei* ${}^*-$ *die Subtraktion,* ${}^*\div$ *die Division und* ${}^*|.|$ *die Betragsfunktion in dem angeordneten Körper* ${}^*\mathbb{R}$ *ist.*

Wir wollen nun spezielle satztreue Einbettungen für die Zwecke der Nichtstandardanalysis betrachten:

Definition 6 *Eine* Nichtstandardeinbettung *ist eine satztreue Einbettung* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *mit* $\mathbb{R} \subset S$ *und* $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$.

Proposition 8 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt*

1. $\mathbb{N} \subsetneqq {}^*\mathbb{N}$
2. $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ k > n, k-1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$
3. ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *besitzt kein kleinstes Element.*

Die Elemente von ${}^*\mathbb{N}$ heißen *hypernatürliche Zahlen.*

Definition 7 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann heißt*

$$\Im := \bigcup_{A \in \widehat{S} - S} {}^*A$$

die Nichtstandardwelt. *Elemente von* $\Im$ *heißen* intern, *Elemente von* $\widehat{^*S} - \Im$ *heißen* extern. *Handelt es sich dabei um Mengen, so spricht man von* internen Mengen *bzw. von* externen Mengen.

Eine alternative Charakterisierung von $\Im$ liefert uns das

Lemma 2 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt*

1. $\Im = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} {}^*S_\nu$
2. $b_1, \ldots, b_k \in \Im \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}\ b_1, \ldots, b_k \in {}^*S_\nu$
3. $B_1, \ldots, B_k \in \Im$ *Mengen* $\Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}\ B_1, \ldots, B_k \subset {}^*S_\nu$

Proposition 9 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt*

1. $\Im$ *ist transitiv*
2. $\emptyset \in \Im$, $\Im \notin \Im$
3. $\forall a \in \widehat{S}\ \ {}^*a \in \Im$
4. $\forall a, b \in \Im\ \ \langle a, b\rangle, a \restriction b, \{a, b\} \in \Im$
5. ${}^*(P(A)) = \{B \in \Im \mid B \subset {}^*A\}$
6. $\Im$ *ist die kleinste transitive Menge* H *mit* $\forall a \in \widehat{S}\ \ {}^*a \in H$.

Der letzte Punkt deutet bereits an, daß sich weitere Aussagen über interne Mengen als nützlich erweisen werden. Letztlich werden wir mit Hilfe der Reichhaltigkeit interner Mengen wichtige Beweisprinzipien der Nichtstandardanalysis erhalten (Verweis zum darauffolgenden Seminarvortrag)

Proposition 10 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt*

1. *Jede nichtleere interne Teilmenge von* ${}^*\mathbb{N}$ *hat ein kleinstes Element.*
2. ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \in \widehat{S} - \Im$

Definition 8 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung,* φ *eine Formel in* $\widehat{^*S}$. *Wenn alle in* φ *vorkommenden Elemente von* $\widehat{^*S}$ *intern sind, heißt* φ *eine* interne Formel. *Ist* φ *obendrein eine Aussage, so nennt man* φ *eine* interne Aussage.

Satz 3 (Prinzip der internen Definition) *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung,* $\psi[\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}]$ *eine interne Formel,* B *eine interne Menge. Dann ist auch*

$$\{\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in B \mid \psi[b_1, \ldots, b_n]\ gültig\}$$

intern.

Korollar 3 *Seien* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung,* A*,* B *interne Mengen. Dann sind auch* $A \cap B$*,* $A \cup B$*,* $A - B$ *und* $A \times B$ *intern.*

Gleichsam als "Subkorollar" aber mit erheblicher technischer Bedeutung für anschließende Beweise folgt

Proposition 11 *Seien* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung,* R*,* R_1*,* R_2 *interne Relationen und* B_0 *eine interne Menge. Dann sind* $D(R), W(R), R[B_0], R^{-1}, R_2 \circ R_1$ *sowie die identische Abbildung auf* B_0 *intern.*

Lemma 3 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt:*

1. $E \subset D$*,* $|E| < \omega$*,* D *intern* $\Rightarrow E$ *intern*
2. $E \subset D$*,* E *extern,* D *intern* $\Rightarrow D - E$ *extern*
3. $\mathbb{N}$ *ist extern.*

Korollar 4 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung.*

1. $A \in \widehat{S}, |A| \geq \omega \;\Rightarrow\; \{{}^*a \mid a \in A\},\; {}^*A - \{{}^*a \mid a \in A\}, P({}^*A)$ *sind extern.*
2. $A \subset S^n, |A| \geq \omega \;\Rightarrow\; A,\; {}^*A - A$ *sind extern,* $A \subsetneqq {}^*A$.
3. $\mathbb{N},\; {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N},\; \mathbb{R},\; {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R},\; S,\; {}^*S - S$ *sind extern.*

Definition 9 *Ist* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung, so bezeichnet man alle* ${}^*a$ *mit* $a \in \widehat{S}$ *als* Standardelemente *und alle* ${}^*a$ *mit* $a \in \widehat{S} - S$ *als* Standardmengen.

Wir wollen nun interne Mengen angeben, die keine Standardmengen sind:

Proposition 12 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung. Dann gilt*

1. $A \subset S^n,\; |A| \geq \omega,\; \emptyset \neq E \subset^* A - A,\; E \in \Im \;\Rightarrow\;$ E *ist keine Standardmenge.*
2. $a, b \in {}^*\mathbb{R},\; a < b,\; (a \notin \mathbb{R} \vee b \notin \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *ist intern, aber keine Standardmenge.*

Der Begriff der internen Menge gewinnt, insbesondere für Zwecke der Analysis, besondere Bedeutung durch den folgenden, abschließenden

Satz 4 *Sei* $^*: \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung,* $\emptyset \neq A, B \in \widehat{S}$*. Dann ist*

$$^*(B^A) = \{f \in \Im \mid f:\; {}^*A \to {}^*B\}.$$

("B^A" in [Landers/Rogge] entspricht hierbei natürlich "${}^AB$" in [Koepke/Burghardt].)

Literatur

[Koepke/Burghardt] Koepke, Peter/Burghardt, Manfred: Mengenlehre. Ein Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie; Bonn: Mathematisches Institut, 1996.

[Landers/Rogge] Landers, Dieter/Rogge, Lothar: Nichtstandard Analysis; Berlin [u.a.]: Springer, 1994.