SEMINAR: NICHTSTANDARD-ANALYSIS
2. EINFACHE KONSEQUENZEN

ALEXANDER GILBERS

Nachdem wir den Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ konstruiert haben, können wir nun jeder Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ zuordnen, die f fortsetzt.

Satz 1 (Die Funktion ${}^*f$ als Fortsetzung der Funktion f)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ setze
$${}^*f(\bar{\alpha}) := \bar{\beta} \text{ mit } \beta(i) := f(\alpha(i)) \text{ für } i \in \mathbb{N}.$$
Es ist ${}^*f(\bar{\alpha})$ nicht von der speziellen Darstellung von $\bar{\alpha}$ abhängig. Daher ist ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ eine Funktion, und es gilt:

(1) ${}^*f(r) = f(r)$ *für alle* $r \in \mathbb{R}$;
(2) ${}^*f(\bar{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}$ *für alle* $\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$.

Beweis:

(2) Sei $\bar{\alpha'} = \bar{\alpha}$. Dann gilt: $\alpha(i) = \alpha'(i)$ fast überall
$\Rightarrow f(\alpha(i)) = f(\alpha'(i))$ fast überall
$\Rightarrow {}^*f(\bar{\alpha}) = {}^*f(\bar{\alpha'})$
(1) ${}^*f(r) = {}^*f(r_{\mathbb{N}}) = \overline{f \circ r_{\mathbb{N}}} = \overline{(f(r))_{\mathbb{N}}} = f(r)$

□

Satz 2 (Eigenschaften von $f \longrightarrow {}^*f$)**.**
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) (**i**) ${}^*(f + g) = {}^*f + {}^*g$, ${}^*(f - g) = {}^*f - {}^*g$, ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$;
(2) ${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f$;
(3) $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow {}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0){}^*g(x)$ *für alle* $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Beweis:

(1) ${}^*(f + g)(\bar{\alpha}) = \overline{(f + g) \circ \alpha} = \overline{f \circ \alpha + g \circ \alpha} = \overline{f \circ \alpha} + \overline{g \circ \alpha} = {}^*f(\bar{\alpha}) + {}^*g(\bar{\alpha})$
(2) ${}^*(g \circ f)(\bar{\alpha}) = \overline{(g \circ f) \circ \alpha} = \overline{g \circ (f \circ \alpha)} = {}^*g(\overline{f \circ \alpha}) = {}^*g({}^*f(\bar{\alpha})) = ({}^*g \circ {}^*f)(\bar{\alpha})$

(3) Mit $x = \bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:
$${}^*f(x) = \overline{f \circ \alpha} = \overline{(f(x_0))_{\mathbb{N}} + (\alpha - (x_0)_{\mathbb{N}})g \circ \alpha}$$
$$= \overline{(f(x_0))_{\mathbb{N}}} + (\bar{\alpha} - \overline{(x_0)_{\mathbb{N}}})\overline{g \circ \alpha}$$
$$= f(x_0) + (\bar{\alpha} - x_0)\overline{g \circ \alpha} = f(x_0) + (x - x_0){}^*g(x)$$

□

Die Funktion $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ wird durch die Funktion $f(x) = x$, $x \in {}^*\mathbb{R}$ fortgesetzt. Nach dem letzten Satz gehen für $n \in \mathbb{N}$ auch die Funktionen $f(x) = n \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ in $f(x) = n \cdot x$, $x \in {}^*\mathbb{R}$ und die Funktionen $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ in $f(x) = x^n$, $x \in {}^*\mathbb{R}$ über. Die Fortsetzung der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$ bildet unendliche Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ auf infinitesimale ab, z.B.:
${}^*f(\overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}}$.
Umgekehrt werden infinitesimale Elemente $x \neq 0$ auf unendliche Elemente abgebildet. Die Bilder der infinitesimal benachbarten infinitesimalen Elemente sind aber im Allgemeinen nicht mehr infinitesimal benachbart:
${}^*f(\overline{(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(n)_{n\in\mathbb{N}}}$, ${}^*f(\overline{(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(2n)_{n\in\mathbb{N}}}$.
Nach dem Nachweis dieser Eigenschaften von ${}^*f$ kann man jetzt daran gehen, unter Verwendung von Elementen aus ${}^*\mathbb{R}$ ein elegantes Stetigkeitskriterium für reelle Funktionen aufzustellen.

Satz 3 (Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) *f ist stetig in x_0.*
(2) *$(x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx x_0) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$.*

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Sei ${}^*\mathbb{R} \ni x \approx x_0$.
Es ist zu zeigen: $|{}^*f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest; dann gibt es nach (1) ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$, so dass
$(r \in \mathbb{R}$ und $|r - x_0| \leq \delta) \Longrightarrow |f(r) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$.
Für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist $x = \bar{\alpha}$. Somit gilt:
$\bar{\alpha} \approx x_0 \Rightarrow \bar{\alpha} \approx \overline{(x_0)_{\mathbb{N}}} \Rightarrow |\alpha(i) - x_0| \leq \delta$ fast überall
$\Rightarrow |f(\alpha(i)) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$ f.ü. $\Rightarrow |\overline{f \circ \alpha} - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$
Da $\overline{f \circ \alpha} = {}^*f(\bar{\alpha}) = {}^*f(x)$ ist, erhalten wir $|{}^*f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$.

„$\Leftarrow$“: Sei nun indirekt f nicht in x_0 stetig. Dann existieren ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $\alpha(i) \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $|\alpha(i) - x_0| \leq \frac{1}{i}$
(ii) $|f(\alpha(i)) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Nach (i) gilt: $x := \bar{\alpha} \approx x_0$ und somit nach (2): ${}^*f(x) \approx f(x_0)$, also $|{}^*f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Nach (ii) gilt aber wegen $\overline{f \circ \alpha} = {}^*f(x)$:
$|{}^*f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Widerspruch!

$\square$

Der Nachweis einfacher Tatsachen ist bei Verwendung des Nichtstandard-Kriteriums möglich und nicht schwieriger als die Standardbeweise. Als Beispiel die Beweise der folgenden beiden Korollare:

Korollar 1.
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ stetig in x_0.

Beweis:
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$. Dann gilt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$, ${}^*g(x) \approx g(x_0)$. Es gilt: ${}^*(f+g)(x) = {}^*f(x) + {}^*g(x) \approx f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$. Also folgt aus dem letzten Satz die Stetigkeit von (f+g). Der Beweis für (f-g) verläuft genauso.
Da $f(x_0), g(x_0)$ endlich sind, folgt ausserdem:
${}^*(f \cdot g)(x) = {}^*f(x) \cdot {}^*g(x) \approx f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$. Also ist fg in x_0 stetig.

$\square$

Korollar 2.
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis:
Sei ${}^*\mathbb{R} \ni x \approx x_0$, dann ist ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Da g in $f(x_0)$ stetig ist, folgt: ${}^*(g \circ f)(x) = {}^*g({}^*f(x)) \approx g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. Also ist $(g \circ f)$ in x_0 stetig.

$\square$

Satz 4 (Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) *f ist gleichmäßig stetig.*
(2) $(x, y \in {}^*\mathbb{R}$ *und* $x \approx y) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.

Beweis:
„$\Rightarrow$ “: Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx y$.
Es ist zu zeigen: $|{}^*f(x) - {}^*f(y)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest; dann gibt es nach (1) ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$, so dass $(r, s \in \mathbb{R}$ und $|r - s| \leq \delta) \Longrightarrow |f(r) - f(s)| \leq \frac{1}{n}$.

Für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist $x = \bar{\alpha}, y = \bar{\beta}$. Wegen $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta}$ gilt:
$|\alpha(i) - \beta(i)| \leq \delta$ fast überall
$\Rightarrow |f(\alpha(i)) - f(\beta(i))| \leq \frac{1}{n}$ f.ü. $\Rightarrow |\overline{f \circ \alpha} - \overline{f \circ \beta}| \leq \frac{1}{n}$, und es gilt somit:
$|{}^*f(x) - {}^*f(y)| = |{}^*f(\bar{\alpha}) - {}^*f(\bar{\beta})| = |\overline{f \circ \alpha} - \overline{f \circ \beta}| \leq \frac{1}{n}$.

„$\Leftarrow$“: Sei nun indirekt f nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ Zahlen $\alpha(i), \beta(i) \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $|\alpha(i) - \beta(i)| \leq \frac{1}{i}$
(ii) $|f(\alpha(i)) - f(\beta(i))| \geq \varepsilon$

Nach (i) gilt: $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta}$ und somit nach (2): ${}^*f(\bar{\alpha}) \approx {}^*f(\bar{\beta})$.
Nach (ii) gilt aber:
$|{}^*f(\bar{\alpha}) - {}^*f(\bar{\beta})| \geq \varepsilon$. Widerspruch!

□

Satz 5 (Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$; dann sind äquivalent:

(1) *f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = c$;*
(2) *$\frac{{}^*f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} \approx c$ für alle $0 \neq dx \approx 0$.*

Beweis:
Setze $g(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x_0$ und $g(x_0) := c$. Dann gilt:
(1) $\Longleftrightarrow$g ist stetig in $x_0 \Longleftrightarrow {}^*g(x) \approx c$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$;
(2) $\Longleftrightarrow \frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$ und $x \neq x_0$.
Daher ist (1) äquivalent zu (2), falls folgendes gilt:
(i) ${}^*g(x) = \frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \neq x_0$. Nach Definition von g ist $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, und aus Satz 2 folgt nun:
${}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0){}^*g(x)$, $x \in {}^*\mathbb{R}$. Daraus folgt (i).

□

Einen Ausblick auf das Transfer-Prinzip erlaubt diese Formulierung eines „eingeschränkten Transfer-Prinzips“.

Satz 6 (Eingeschränktes Transfer-Prinzip)**.**
Es sei φ eine Aussage, in der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$, die Menge $\mathbb{R}$, reelle Zahlen sowie $+, -, \cdot, \leq, |\ |$ und die Zeichen $=, \in, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$, $\forall \underline{x}$, $\exists \underline{y}$, vorkommen; dabei sind $\underline{x}, \underline{y}$ Variable.
Dann ist die Aussage φ genau dann gültig, wenn die Aussage ${}^*\varphi$ gültig ist; dabei entsteht ${}^*\varphi$ aus φ dadurch, dass $f_1 \ldots, f_m$ durch ${}^*f_1 \ldots, {}^* f_m$ und $\mathbb{R}$ durch ${}^*\mathbb{R}$ ersetzt werden.

Mit Hilfe des Transfer-Prinzips kann man Aussagen, die in $\mathbb{R}$ gelten auf ${}^*\mathbb{R}$ übertragen. Dabei muss man allerdings darauf achten, dass in der Aussage keine anderen Zeichen verwendet werden, als die oben aufgeführten.
Zum Beispiel bleibt die Kommutativität der Addition für Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ erhalten. Denn die Gültigkeit der Aussage

$$\varphi \equiv (\forall \underline{x} \in \mathbb{R})(\forall \underline{y} \in \mathbb{R})\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$$

überträgt sich auf die Gültigkeit der Aussage

$${}^*\varphi \equiv (\forall \underline{x} \in {}^*\mathbb{R})(\forall \underline{y} \in {}^*\mathbb{R})\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}.$$