SEMINAR: NICHTSTANDARD-ANALYSIS
2. EINFACHE KONSEQUENZEN

ALEXANDER GILBERS

Nachdem wir den Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ konstruiert haben, können wir nun jeder Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ zuordnen, die f fortsetzt.

Satz 1 (Die Funktion ${}^*f$ als Fortsetzung der Funktion f)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ setze
$${}^*f(\bar{\alpha}) := \bar{\beta} \textit{ mit } \beta(i) := f(\alpha(i)) \textit{ für } i \in \mathbb{N}.$$
Es ist ${}^*f(\bar{\alpha})$ nicht von der speziellen Darstellung von $\bar{\alpha}$ abhängig. Daher ist ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ eine Funktion, und es gilt:
(i) *${}^*f(r) = f(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$;*
(ii) *${}^*f(\bar{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}$ für alle $\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$.*

Satz 2 (Eigenschaften von $f \longrightarrow {}^*f$)**.**
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(i) *${}^*(f + g) = {}^*f + {}^*g$, ${}^*(f - g) = {}^*f - {}^*g$, ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$;*
(ii) *${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f$;*
(iii) *$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$*
$\Longrightarrow {}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0){}^*g(x)$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Nach dem Nachweis dieser Eigenschaften von ${}^*f$ kann man jetzt daran gehen, unter Verwendung von Elementen aus ${}^*\mathbb{R}$ ein elegantes Stetigkeitskriterium für reelle Funktionen aufzustellen.

Satz 3 (Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:
(i) *f ist stetig in x_0.*
(ii) *$(x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx x_0) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$.*

Der Nachweis einfacher Tatsachen ist bei Verwendung des Nichtstandard-Kriteriums möglich und nicht schwieriger als die Standardbeweise. Als Beispiel die Beweise der folgenden beiden Korollare:

Korollar 1.
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ stetig in x_0.

Korollar 2.
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* x_0 *stetig und* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $f(x_0)$ *stetig. Dann ist* $g \circ f$ *in* x_0 *stetig.*

Satz 4 (Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann sind äquivalent:*
(**i**) f *ist gleichmäßig stetig.*
(**ii**) $(x, y \in {}^*\mathbb{R}$ *und* $x \approx y) \Longrightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.

Satz 5 (Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Sei* $c \in \mathbb{R}$*; dann sind äquivalent:*
(**i**) f *ist in* x_0 *differenzierbar mit Ableitung* $f'(x_0) = c$*;*
(**ii**) $\frac{{}^*f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} \approx c$ *für alle* $0 \neq dx \approx 0$.

Einen Ausblick auf das Transfer-Prinzip erlaubt diese Formulierung eines „eingeschränkten Transfer-Prinzips“.

Satz 6 (Eingeschränktes Transfer-Prinzip)**.**
Es sei φ *eine Aussage, in der Funktionen* $f_1, \dots, f_m$*, die Menge* $\mathbb{R}$*, reelle Zahlen sowie* $+, -, \cdot, \leq$*,* $|\ |$ *und die Zeichen* $=$*,* $\in$*,* $\wedge$*,* $\vee$*,* $\neg$*,* $\Rightarrow$*,* $\forall \underline{x}$*,* $\exists \underline{y}$*, vorkommen; dabei sind* $\underline{x}, \underline{y}$ *Variable.*
Dann ist die Aussage φ *genau dann gültig, wenn die Aussage* ${}^*\varphi$ *gültig ist; dabei entsteht* ${}^*\varphi$ *aus* φ *dadurch, dass* $f_1 \dots, f_m$ *durch* ${}^*f_1 \dots, {}^* f_m$ *und* $\mathbb{R}$ *durch* ${}^*\mathbb{R}$ *ersetzt werden.*

Mit Hilfe des Transfer-Prinzips kann man Aussagen, die in $\mathbb{R}$ gelten auf ${}^*\mathbb{R}$ übertragen. Dabei muss man allerdings darauf achten, dass in der Aussage keine anderen Zeichen verwendet werden, als die oben aufgeführten.