

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 10, Abgabe: 09.01.2003 nach der Vorlesung



Augusta Ada Byron wurde am 10. Dezember 1815 als Tochter von Anne Isabelle Milbanke und des Dichters Lord Byron geboren. Nur fünf Wochen später trennte sich Ada's Mutter von Lord Byron und erhielt das alleinige Sorgerecht. Lady Byron war entsetzt von der Vorstellung das Ada als Dichterin enden könnte, wie ihr Vater. So sorgte sie dafür das Ada eine Mathematikerin und Wissenschaftlerin wurde. Trotzdem behielt Ada eine gewisse Vorliebe für die Poesie. Sie selbst hoffte eine Analytikerin und Metaphysikerin zu werden. Ihr Verständnis der Mathematik war durchsetzt mit viel Phantasie und ihre Beschreibungen waren sehr bildhaft. Mit 17 lernte Ada Mary Somerville kennen, die die Arbeiten von La Place in Englische übersetzt hatte und deren Texte in Cambridge benutzt wurden. Über Mrs. Somerville hörte sie von der "Analytical Engine" von Charles Babbage. Sie war eine der wenigen, die von seinen Ideen begeistert war. 1835 heirate Ada William King, der 1838 zum Earl of Lovelace ernannt wurde und hatte mit ihm drei Kinder. Babbage berichtete 1841 bei einem Seminar in Turin über seine Entwicklungen. Der Italiener Menabrea schrieb darüber eine Zusammenfassung und publizierte diese in Französisch. 1843 übersetzte Ada die Arbeiten Menabrea's. Dabei erweiterte sie den Artikel mit eigenen Anmerkungen auf das dreifache. Sie sagte unter anderem voraus, das eine solche Maschine in der Lage wäre komplexe Musik zu komponieren, Grafiken zu erstellen und sowohl in der Wissenschaft als auch in Praxis Anwendung finden würde. Babbage war von Ada's Arbeit begeistert. Sie regte Babbage unter anderem dazu an, einen Plan zu entwickeln wie die Maschine Bernoulli-Zahlen errechnen könnte. Dieser Plan gilt als das erste Computer Programm (1979 wurde eine Programmiersprache des U.S. Verteidigungsministeriums ihr zu Ehren ADA genannt). Lady Augusta Ada Byron starb 1852 an Krebs und wurde neben ihrem Vater beigesetzt, den sie nie kennen gelernt hatte.

Definitionen und Sätze

Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Das *Auswahlaxiom für Mengen der Mächtigkeit κ* besagt, dass jede Menge der Kardinalität κ , deren Elemente nichtleer sind, eine Auswahlfunktion besitzt:

$$AC_\kappa := \forall X \left([\overline{X} = \kappa \wedge \forall x \in X (x \neq \emptyset)] \rightarrow [\exists f (f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall x \in X (f(x) \in x))] \right).$$

Für Permutationsmodelle müssen wir die Auswahlaxiome zur Berücksichtigung der Atome umformulieren:

$$AC_A := \forall X \left([X \not\subseteq A \cup \{L\} \wedge \forall x \in X (x \not\subseteq A \cup \{L\})] \rightarrow [\exists f (f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall x \in X (f(x) \in x))] \right).$$

$$AC_{A,\kappa} := \forall X \left([\overline{X} = \kappa \wedge \forall x \in X (x \not\subseteq A \cup \{L\})] \rightarrow [\exists f (f : X \rightarrow \bigcup X \wedge \forall x \in X (f(x) \in x))] \right).$$

Aufgaben

Aufgabe 60

Sei M ein ZF-Modell. Zeigen Sie, dass dann die Automorphismengruppe von M die triviale Gruppe ist, d.h. der einzige Automorphismus auf M ist die Identität.

Aufgabe 61

Sei \mathbf{V} ein ZFC-Modell, $A \subset \mathbf{V}$ eine *endliche* Menge von Atomen. Zeigen Sie, dass dann HS (die Klasse der erblich symmetrischen Mengen über A) ein $ZF_A + AC_A$ -Modell ist.

Aufgabe 62

Sei \mathbf{V} ein ZFC-Modell. Zeigen Sie, dass ein Modell existiert, in dem die ZF_A -Axiome und $AC_{A,\omega}$ (abzählbare Auswahl) gelten, nicht aber AC_{A,ω_1} (überabzählbare Auswahl).

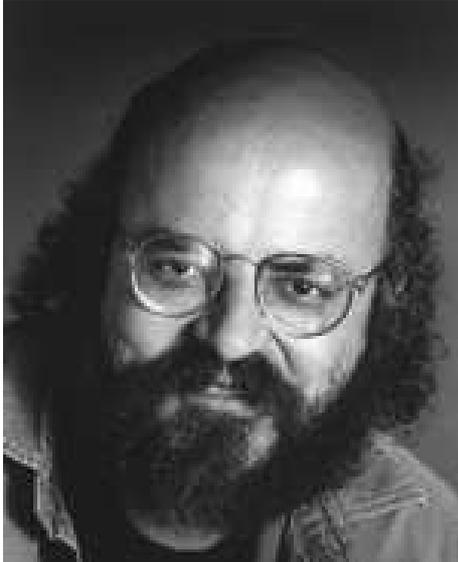
Tipp: Wählen Sie eine adäquate Menge von Atomen und definieren Sie die symmetrischen Mengen mit Hilfe von abzählbaren statt, wie in der Vorlesung, mit endlichen Trägern. Gehen Sie ansonsten analog zur Vorlesung vor.

Bemerkung: Diese Aufgabe vollständig zu bearbeiten kann einige Zeit in Anspruch nehmen.

Aufgabe 63 (“Who is who”)

Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

Tipp: Der Vorname hat etwas mit Weihnachten zu tun.



Viel Erfolg und eine interessante Zeit bis zum Neuen Jahr!

Homepage der Vorlesung:

<http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html>

Newsgroup: uni-bonn.math.logik