Bonn, den 12.12.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 09, Abgabe: 19.12.2002 nach der Vorlesung

Slaman, Theodore A. Slaman promovierte im Jahre 1981 unter Gerald Sacks an der *Harvard University* mit einer Arbeit über "Aspects of E-recursion theory". Slaman arbeitet seither im Grenzgebiet zwischen Rekursionstheorie und Mengenlehre. Er war Professor an der *University of Chicago* bis 1996 und ist seitdem Professor an der *University of California at Berkeley.* Unter anderem entwickelte er mit Woodin zusammen die Slaman-Woodin-Theorie der Automorphismen der Turing-Grade und löste mit Marcia J. Groszek zusammen das Příkrý-Problem. Am 12. und 13. Dezember 2002 ist er zu Gast am Mathematischen Institut der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

Woodin, William Hugh; * Tucson, Arizona 1955. Woodin löste bereits als *Undergraduate* im Jahre 1976 zusammen mit seinem akademischen Lehrer Robert Solovay das sogenannte Kaplansky-Problem der Theorie der Banach-Algebren. Er promovierte im Jahre 1984 an der *University of California at Berkeley* mit einer Arbeit mit dem Titel "Discontinuous Homomorphisms of $C(\Omega)$ and Set Theory" unter Solovay. Als Professor am *California Institute of Technology* (1980-1989) wurde er Mitglied des berühmten *Cabal Seminar* welches sich von 1976 bis zur Mitte der achtziger Jahre im Großraum Los Angeles traf. Seit 1989 ist er Professor an der *University of California at Berkeley.* Woodin ist zusammen mit Saharon Shelah (Hebrew University Jerusalem) der mit Abstand bedeutendste lebende Mengentheoretiker. Für seine Leistungen im Zusammenhang mit der Bestimmung der Konsistenzstärke der Projektiven Determiniertheit erhielt er zusammen mit Tony Martin (UCLA) und John Steel (UC Berkeley) 1989 den *Carol Karp Prize*, einen alle fünf Jahre vergebenen Preis für die herausragendste Leistung in der Mathematischen Logik.

Definitionen und Sätze

Sei T eine $\in$-Theorie.

(a) Eine Formel φ ist eine Π_1^{T}-Formel, wenn es eine Π_1-Formel ψ gibt, so dass $\mathsf{T} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ gilt.

(b) Eine Formel φ ist eine Σ_1^{T}-Formel, wenn es eine Σ_1-Formel ψ gibt, so dass $\mathsf{T} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ gilt.

(c) Eine Formel φ ist eine Δ_1^{T}-Formel, wenn Sie sowohl ein Σ_1^{T}-Formel als auch eine Π_1^{T}-Formel ist.

Sei $A \in \mathbf{V}$. Die Klasse $\mathrm{OD}(A)$ der *über A ordinalzahldefinierbaren Mengen* ist die Klasse aller Mengen x, so dass eine $\in$-Formel φ, Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und eine endliche Sequenz $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ von Elementen aus A existieren mit

$$x = \{v \mid \varphi[v, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \langle a_1, \ldots, a_m \rangle]\}.$$

Die Klasse $\mathrm{HOD}(A) := \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}(A)\}$ ist die Klasse der *erblich über A ordinalzahldefinierbaren Mengen.*

Nachtrag zu Aufgabe 42:
Endlichkeitssatz
Sei Φ eine Menge von Formeln, φ eine Formel. Gilt $\Phi \models \varphi$, so gibt es eine endliche Menge von Formeln $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\Phi' \models \varphi$.

Korollar: Sei Φ eine Formelmenge, Ψ eine endliche Formelmenge. Gilt $\Phi \models \Psi$ und $\Psi \models \Phi$, so existiert eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\Phi' \models \Psi$ und $\Psi \models \Phi'$.

Aufgaben

Aufgabe 53
Zeigen Sie, dass Δ_1^{ZF}-Formeln absolut sind für alle ZF-Modelle.

Aufgabe 54
Verwenden Sie den LÉVYschen Reflexionssatz, um zu zeigen, dass ZFC nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 55
Es gelte ZF. Sei $\ll$ eine Wohlordnung auf dem Klassenterm X, sei Y ein Klassenterm.

(a) Sei $F : X \overset{\text{surj}}{\to} Y$ eine Surjektion von X auf Y. Zeigen Sie, dass F eine Wohlordnung auf Y induziert.

(b) Sei $F : Y \overset{\text{inj}}{\to} X$ eine Injektion von Y in X. Zeigen Sie, dass F eine Wohlordnung auf Y induziert.

(c) Sei $\ll$ eine *starke* Wohlordnung auf X, existiert dann in (a) und (b) auch eine starke Wohlordnung auf Y?

Aufgabe 56

(a) Zeigen Sie: Aus $x \in \mathrm{OD}$ und $x \subseteq \mathrm{HOD}$ folgt $x \in \mathrm{HOD}$.

(b) Sei $a \in \mathrm{HOD}$ eine nichtleere Menge paarweiser disjunkter Mengen. Setze
$$b := \{y \mid \exists x \in a(y \text{ ist } <_{\mathrm{OD}}\text{-kleinstes Element von } x)\}.$$
Zeigen Sie, dass $b \in \mathrm{OD}$ gilt. (Vgl. Beweis von 13.8 aus der Vorlesung.)

(c) Definieren Sie eine Hierarchie $\langle \mathrm{HOD}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ mit $\mathrm{HOD} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathrm{HOD}_\alpha$, auf die Sie den Allgemeinen Reflexionssatz anwenden können.

Aufgabe 57
Zeigen Sie: Ist $F : \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ eine definierbare funktionale Klasse, so gilt $\mathrm{ran}(F) \subseteq \mathrm{OD}$. Also ist OD die größte Klasse für die ein definierbare Bijektion mit der Klasse der Ordinalzahlen existiert.

Aufgabe 58

(a) Zeigen Sie $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{HOD}(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{HOD}(\mathbb{R})$ ein transitives ZF-Modell ist.

Aufgabe 59 ("Who is who")
Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`