MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 21.11.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 06, Abgabe: 28.11.2002 nach der Vorlesung

Turing, Alan Mathison, britischer Mathematiker, * London 23.6.1912, †(Selbstmord) Wilmslow (County Cheshire) 7.6.1954; arbeitete während des Zweiten Weltkriegs als Entschlüsselungsspezialist im britischen Außenministerium (Enigma), danach am National Laboratory of Physics am Einsatz der Großrechneranlage ACE (Automatic Computing Engine) und leitete ab 1948 die mit dem Bau der MADAM-(Manchester Automatic Digital Machine)-Anlage der Universität Manchester zusammenhängenden mathematischen Arbeiten. Turing arbeitete v.a. über die Theorie der Berechenbarkeit sowie zur Lernfähigkeit u.a. Fragen des intelligenten Verhaltens von Maschinen und entwickelte eine später nach ihm benannte abstrakte Rechenmaschine, die Turing-Maschine. Neben Arbeiten über philosophische Fragen der Kybernetik leistete Turing auch einen grundlegenden Beitrag zur theoretischen Biologie, indem er einen chemischen Mechanismus für die Musterentstehung während der Embryonalentwicklung postulierte (1952); danach können unterschiedliche Diffusionsgeschwindigkeiten chemischer Reaktionsteilnehmer stabile räumliche Konzentrationsmuster erzeugen (z.B. Pigmentflecken).

Quelle: Brockhaus - Die Enzyklopädie: in 24 Bänden.

Definitionen und Sätze

Satz von Hessenberg
Für alle Kardinalzahlen $\kappa \geq \omega$ gilt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Es sei A ein Alphabet. ϱ heißt *Regel* über A, falls es ein $n = n_\varrho \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varrho \subseteq (A^*)^n \times A^*$. Statt $\varrho((w_1, \ldots, w_n), w)$ schreiben wir auch ϱ: $\dfrac{w_1, \ldots, w_n}{w}$ und sagen: Bei Input $w_1, \ldots, w_n$ produziert ϱ das Wort w. Im Fall $n_\varrho = 0$ gilt $\varrho \subseteq A^*$ und wir nennen ϱ eine Anfangsregel. Eine Menge $\mathcal{K}$ heißt *Kalkül* über A, falls jedes Element von $\mathcal{K}$ eine Regel über A ist. Das *Erzeugnis* $\mathrm{Erz}(\mathcal{K})$ von $\mathcal{K}$ ist die $\subseteq$-kleinste Menge mit

$$\forall \varrho \in \mathcal{K}\ \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in A^* \big((w_1 \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \wedge \ldots \wedge w_n \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \wedge \varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w)) \rightarrow w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})\big).$$

Wir sagen, der Kalkül $\mathcal{K}$ hat *eindeutige Zerlegung*, falls sich jedes $w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})$ auf genau eine Weise produzieren läßt, genauer, falls gilt:

$$\forall w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})\ \forall \varrho_0, \varrho_1 \in \mathcal{K}\ \forall w_1^0, \ldots, w_{n_{\varrho_0}}^0, w_1^1, \ldots, w_{n_{\varrho_1}}^1 \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})$$
$$\Big((\varrho_0((w_1^0, \ldots, w_{n_{\varrho_0}}^0), w) \wedge \varrho_1((w_1^1, \ldots, w_{n_{\varrho_1}}^1), w)) \rightarrow (\varrho_0 = \varrho_1 \wedge w_1^0 = w_1^1 \wedge \ldots \wedge w_{n_{\varrho_0}}^0 = w_{n_{\varrho_1}}^1)\Big).$$

Es seien $w_1, \ldots, w_N, w \in A^*$. Die Sequenz $(w_1, \ldots, w_N)$ heißt *Ableitung* für w, falls gilt:
(a) $w_N = w$;
(b) $\forall k \leq N\ \exists \varrho \in \mathcal{K}\ \exists i_1, \ldots, i_{n_\varrho} < k\ \varrho((w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n_\varrho}}), w_k)$.

Aufgaben

Aufgabe 35
Es sei $L = (I, J, K, t)$ eine formale Spache, $j \in J$ mit $t(j) = 1$ und $k \in K$. Zeigen Sie:
(a) $\dot{f}_j \dot{(} \dot{v}_0 \dot{)} \notin \mathrm{Tm}(L)$.
(b) $\dot{\forall} \dot{c}_k\ \dot{v}_0 \dot{=} \dot{f}_j \dot{c}_k \notin \mathrm{Fml}(L)$.

Aufgabe 36

(a) Zeigen Sie folgendes Induktionsschema:
Es sei $\phi(x)$ eine $\in$-Formel und es gelte

$$\forall \varrho \in \mathcal{K}\, \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})\big((\phi(w_1) \wedge \ldots \wedge \phi(w_{n_\varrho}) \wedge \varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w)) \to \phi(w)\big).$$

Dann gilt: $\forall w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})\ \phi(w)$.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{Erz}(\mathcal{K}) = \{w \in A^* \mid w \text{ hat eine Ableitung}\}$.

Aufgabe 37

Es sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül, der eindeutige Zerlegung hat. Beweisen Sie folgenden Rekursionssatz:
Für jedes $\varrho \in \mathcal{K}$ sei $G_\varrho\colon V^{n_\varrho+1} \to V$. Dann existiert genau eine Funktion $H\colon \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \to V$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varrho \in \mathcal{K}\, \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})$$
$$\big(\varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w) \to H(w) = G_\varrho(H(w_1), \ldots, H(w_{n_\varrho}), w)\big)\,.$$

Tipp: Setzen Sie $E_N := \{w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \mid w \text{ hat eine Ableitung von höchstens Länge } N\}$. Definieren Sie dann $H_N\colon E_N \to V$ mit $H_N \restriction E_{N-1} = H_{N-1}$ geeignet, indem Sie ausnutzen, dass jedes $w \in E_N \setminus E_{N-1}$ auf eindeutige Weise durch eine Regel ϱ mit Input aus E_{N-1} produziert wird. Setzen Sie dann $H := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} H_N$.

Aufgabe 38

(a) Geben Sie über dem Alphabet A_L einen Kalkül $\mathcal{K}_L$ an, der eindeutige Zerlegung hat und für den $\mathrm{Erz}(\mathcal{K}_L) = \mathrm{Fml}(L)$ gilt.

(b) Geben Sie über dem Alphabet $A_{\mathrm{Arith}} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{(}, \dot{)}\}$ einen Kalkül $\mathcal{K}_{\mathrm{Arith}}$ an, der eindeutige Zerlegung hat und die Terme der Arithmetik in der Infix-Form erzeugt (d.h. die "normalen" Terme wie z.B. $\dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_1$).

Aufgabe 39

(a) Geben Sie eine Injektion $f : {}^\omega\omega \overset{\text{inj}}{\to} {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ an.

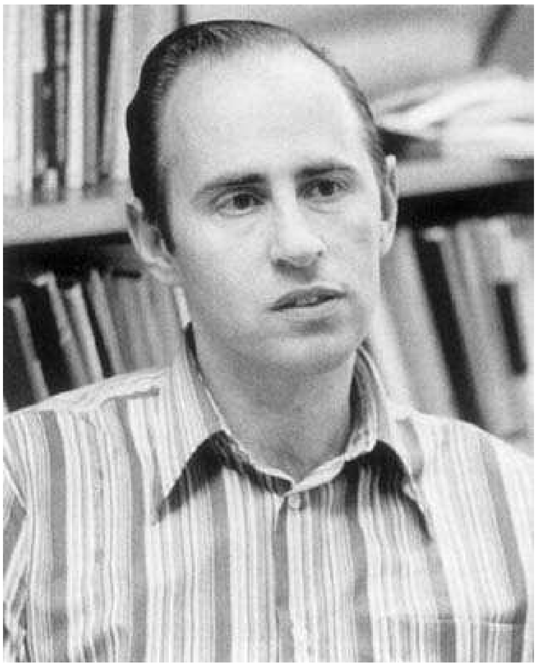
(b) Geben Sie eine Surjektion $f : {}^\omega\omega \overset{\text{surj}}{\to} {}^\omega({}^\omega\omega)$ an.

(c) Zeigen Sie $2^\omega = \omega^\omega$.

(d) Zeigen Sie $\overline{\overline{{}^\omega\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Aufgabe 40 ("Who is who")

Wer ist auf diesem Bild abgebildet?



Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`