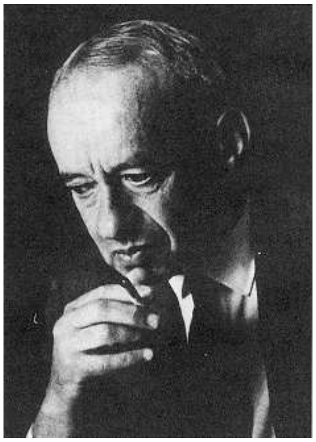
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 14.11.2002

# Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 05, Abgabe: 21.11.2002 nach der Vorlesung



**Tarski**, Alfred, amerikanischer Mathematiker polnischer Herkunft, * Warschau 14.1.1901, †Berkeley (Calif.) 26.10.1983; bis 1938 Dozent in Warschau, emigrierte dann in die USA, wo er 1946 Professor für Mathematik an der University of California in Berkeley wurde. Grundlegend sind v.a. seine Arbeiten zur algebraischen Fassung des Begriffs der logischen Folgerung, zum Wahrheitsbegriff in formalisierten Sprachen, zur Kardinalzahlarithmetik, zur Entscheidbarkeit der Theorie der reell abgeschlossenen Körper und zum Begriff der Wohlordnung in der Prädikatenlogik.

**Gödel**, Kurt, österreichischer Mathematiker und Logiker, * Brünn 28.4.1906, †Princeton (N. J.) 14.1.1978; Studium der Mathematik und Physik in Wien, 1933–38 dort Privatdozent, seit 1938 am Institute for Advanced Study in Princeton (1953 Ernennung zum Professor). Gödel gilt als der bedeutendste Logiker des 20. Jahrhunderts. Bereits in seiner Dissertation (1930) bewies er die Vollständigkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe. Im selben Jahr (veröffentlicht 1931) bewies Gödel seinen berühmten Unvollständigkeitssatz: Eine mathematische Theorie, die die Arithmetik umfasst und die widerspruchsfrei ist, kann nicht alle in ihr wahren Aussagen beweisen. Hieraus folgt, dass die meisten formalisierten Theorien der Mathematik nicht in der Lage sind, ihre eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Damit war das Hilbert-Programm (Formalismus) in seiner ursprünglichen Form gescheitert. 1938 zeigte Gödel, dass die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom nicht durch die restlichen Axiome der (als widerspruchsfrei vorausgesetzten) Mengenlehre widerlegt werden können (Cohen, Paul Joseph). Gödel äußerte sich auch zu philosophischen Grundlagenfragen der Mathematik, in denen er einen dezidiert platonistischen Standpunkt vertrat. Ein weiteres Arbeitsgebiet Gödels waren die Grundlagen der Relativitätstheorie. *Quelle: Brockhaus - Die Enzyklopädie: in 24 Bänden.*

## Definitionen

*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle unendlichen Kardinalzahlen Limesordinalzahlen sind.

Die Kardinalität $\mathrm{Card}(x)$ einer Menge $x$ wird auch mit $\overline{\overline{x}}$ bezeichnet.

Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{Cd}$ Kardinalzahlen.

(a) Durch $\kappa + \lambda := \overline{\overline{(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})}}$ definieren wir die *Kardinalzahladdition.*

(b) Durch $\kappa \cdot \lambda := \overline{\overline{\kappa \times \lambda}}$ definieren wir die *Kardinalzahlmultiplikation.*

(c) Durch $\kappa^\lambda := \overline{\overline{{}^\lambda\kappa}}$ definieren wir die *Kardinalzahlexponentiation.*

## Aufgaben

**Aufgabe 28**

(a) Zeigen Sie, dass auf $\omega$ die Kardinalzahloperationen und die entsprechenden Ordinalzahloperationen übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass auf Cd die Kardinalzahloperationen und die entsprechenden Ordinalzahloperationen *nicht* übereinstimmen.

(c) Zeigen Sie, dass $2 \cdot \kappa = \kappa$ für alle Kardinalzahlen $\kappa \geq \omega$ gilt.

*Hinweis:* Definieren Sie eine Funktion $f : \mathrm{On} \to \mathrm{On} \times 2$ mit $f \upharpoonright \lambda : \lambda \overset{\text{bij}}{\to} \lambda \times 2$ für alle $\mathrm{Lim}(\lambda)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ für alle Kardinalzahlen $\kappa, \lambda$ mit $\kappa \geq \omega$ gilt.

**Aufgabe 29**

(a) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und dem offenen Einheitsintervall an, d.h. zeigen Sie $\mathbb{R} \sim ]0,1[$.

(b) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $[0,1[$ an.

(c) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $[0,1]$ an.

**Aufgabe 30**

(a) Formalisieren Sie das Einheitsintervall $[0,1[$ der reellen Zahlen als Menge $I$.
(*Vorschlag:* Wählen Sie als $I$ eine geeignete Teilmenge der Menge der Folgen $r : \omega \to \{0,1\}$.)
Achten Sie dabei auf die Eindeutigkeit der Formalisierung.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $I$ die Kardinalität $2^\omega$ hat.

(c) Geben Sie eine Bijektion $I \sim I \times I$ an.

**Aufgabe 31**

Berechnen Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen:

(a) ${}^{<\omega}a$,

(b) $\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge f \text{ stetig}\}$,

(c) $\{f \mid f : \omega \to \omega \wedge f \text{ bijektiv}\}$.

**Aufgabe 32**

(a) Es sei $K$ ein Körper, $X$ ein $K$-Vektorraum und $B$ eine $K$-Basis von $X$. Berechnen Sie $\overline{\overline{X}}$ in Abhängigkeit von $\overline{\overline{K}}$ und $\overline{\overline{B}}$.

(b) Es sei $K$ ein Körper, und für $i = 0,1$ sei $X_i$ ein $K$-Vektorraum und $B_i$ eine $K$-Basis von $X_i$. Zeigen Sie, dass $X_0$ und $X_1$ isomorph sind, falls $\overline{\overline{B_0}} = \overline{\overline{B_1}} = \mu$. Ist $X_0$ isomorph zum Vektorraum $\mathsf{X}_{\alpha<\mu}K$?

(c) Berechnen Sie die Kardinalität einer Hamelbasis (d.h. einer Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$).

**Aufgabe 33**

Überprüfen Sie den Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein aus der Vorlesung auf die verwendeten mengentheoretischen Axiome. Wird das Unendlichkeitsaxiom $\mathsf{Inf}$ für die Argumente des Beweises benötigt?

**Aufgabe 34 ("Erkenne den Logiker")**

Wer ist auf diesem Bild abgebildet?


Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`