MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 17.10.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben, Folge 01, Abgabe: 24.10.2002 nach der Vorlesung

Allgemeine Informationen zum Übungsbetrieb:

Dozent: Prof. Dr. Peter Koepke (`koepke@math.uni-bonn.de`), Be4Zi44, Tel. 73-2206
Sprechstunde: Mittwoch 12-13
Zuständige Mitarbeiter für den Übungsbetrieb:
Dr. Benedikt Löwe (`loewe@math.uni-bonn.de`), Be4Zi24, Tel. 73-2928
Sprechstunde: Mittwoch 11-12
Stefan Bold (`bold@math.uni-bonn.de`), Be4Zi25, Tel. 73-3352
Sprechstunde: Mittwoch 11-12
Übungen: Die Übungsblätter werden in der Donnerstagsvorlesung ausgeteilt und eingesammelt.
Scheinkriterium: Die notwendige Voraussetzung für den Erhalt einer Leistungsbescheinigung für diese Lehrveranstaltung ist die regelmäßige Beteiligung an der Übungsgruppe und die regelmäßige Bearbeitung einer hinreichenden Zahl von Aufgaben.
Übungsgruppenleiter: Torsten Langer (`t-langer@gmx.net`)
Übungsgruppe: Di 16-18 Seminarraum **G**
Übungsgruppenleiter: Oliver Lorscheid (`oliver@math.uni-bonn.de`)
Übungsgruppe: Mi 16-18 Seminarraum **A**
Webpage: `http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: (über den Newsserver `news.uni-bonn.de` zu abonnieren) `uni-bonn.math.logik`.

Literaturliste

Manfred **Burghardt** und Peter **Koepke**, *Mengenlehre, Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*,
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Data/Lectures/skript/skript_1.pdf`,
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Data/Lectures/skript/skript_2.pdf`, 1996.

Thomas **Jech**, *Set Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1997.

Frank R. **Drake**, *Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

Akihiro **Kanamori**, *The Higher Infinite*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1994.

Kenneth **Kunen**, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland, Amsterdam, 1989.

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, unter Angabe der verwendeten Axiome der Mengenlehre, dass für je zwei Mengen x und y das Hausdorff-Paar $(x,y)_{\mathrm{H}} := \{\{x,0\},\{y,1\}\}$ existiert.

(b) Geben Sie einen strukturierten Beweis dafür an, dass das Hausdorff-Paar $(x,y)_{\mathrm{H}}$ die Grundeigenschaft geordneter Paare erfüllt, d.h. dass gilt

$$\forall x_0, x_1, y_0, y_1 \; ((x_0,y_0)_{\mathrm{H}} = (x_1,y_1)_{\mathrm{H}} \leftrightarrow (x_0 = x_1 \wedge y_0 = y_1)).$$

(c) Untersuchen Sie, ob durch

$$\langle x,y,z\rangle_0 := \{\{x,0\},\{y,1\},\{z,2\}\} \text{ bzw. } \langle x,y,z\rangle_1 := \{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

adäquat Tripel formalisiert werden.

Aufgabe 2

Beachten Sie, dass Modelle nicht leer sein dürfen.

(a) Beweisen Sie, dass jedes Modell von EML unendlich ist.

(b) Geben Sie ein Modell für das System $(\mathsf{Ext}, \mathsf{Paar}, \bigcup\text{-}\mathsf{Ax})$ an, in denen $\neg\mathsf{Ex}$ gilt.

(c) Geben Sie alle Modelle des Systems $(\mathsf{Ex}, \mathsf{Ext})$ mit 1, 2, 3, 4, bzw. 5 Elementen an.

Definitionen:

Sei R ein Klassenterm. R ist eine *Relation*, falls sämtliche Elemente von R geordnete Paare sind. Formal: $\mathrm{Rel}(R) := R \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$. Statt $(x, y) \in R$ wird oft Rxy oder xRy geschrieben. Ist A ein Klassenterm und $R \subseteq A \times A$, so ist R eine *Relation über* A.

Seien R, S und A Klassenterme.

(a) $\mathrm{dom}(R) := \{x \mid \exists y\, xRy\}$ heißt *Definitionsbereich* oder *Domain* von R.

(b) $\mathrm{ran}(R) := \{y \mid \exists x\, xRy\}$ heißt *Wertebereich* oder *Range* von R.

(c) $\mathrm{field}(R) := \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$ heißt *Feld* von R.

(d) $R \restriction A := \{(x, y) \mid x \in A \wedge xRy\}$ heißt *Einschränkung* von R auf A.

(e) $R[A] := R\text{''}A := \{y \mid \exists x\, x \in A \wedge xRy\}$ heißt *Bild* von A unter R.

(f) $R^{-1}[A] := \{x \mid \exists y\, y \in A \wedge xRy\}$ heißt *Urbild* von A unter R.

(g) $S \circ R := \{(x, z) \mid \exists y\, xRy \wedge ySz\}$ heißt *Komposition* von S und R.

(h) $R^{-1} := \{(y, x) \mid xRy\}$ heißt *Inverse* oder *Umkehrrelation* von R.

Sei F ein Klassenterm. $\mathrm{Fun}(F) := \mathrm{Rel}(F) \wedge \forall x, y_1, y_2((xFy_1 \wedge xFy_2) \rightarrow y_1 = y_2)$ bedeutet, F ist eine *Funktion* oder *funktional*.

Seien F, A und B Klassenterme.

(a) $F : A \rightarrow B := \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{ran}(F) \subseteq B$ bedeutet, F *bildet* A *in* B *ab*.

(b) $F : A \overset{\mathrm{surj}}{\rightarrow} B := F : A \rightarrow B \wedge \mathrm{ran}(F) = B$ bedeutet, F ist eine *Surjektion* oder *surjektive Funktion* von A auf B.

(c) $F : A \overset{\mathrm{inj}}{\rightarrow} B := F : A \rightarrow B \wedge \forall x_1, x_2 \in A \forall y\, ((x_1Fy \wedge x_2Fy) \rightarrow x_1 = x_2)$ bedeutet, F ist eine *Injektion* oder *injektive Funktion* von A in B.

(d) $F : A \leftrightarrow B := F : A \overset{\mathrm{bij}}{\rightarrow} B := F : A \overset{\mathrm{surj}}{\rightarrow} B \wedge F : A \overset{\mathrm{inj}}{\rightarrow} B$ bedeutet, F ist eine *Bijektion* oder *bijektive Funktion* von A auf B.

Sei F ein Klassenterm und x eine Variable. Der Klassenterm $F(x)$ ist definiert durch

$$F(x) := \{z \mid \forall y_0(((x, y_0) \in F \wedge \forall y_1((x, y_1) \in F \rightarrow y_0 = y_1)) \rightarrow z \in y_0)\}.$$

$F(x)$ heißt *Funktionswert von* F *an der Stelle* x.

Aufgabe 3

Seien F, G, A, B und C Klassenterme. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $F : A \rightarrow B \quad \rightarrow \quad F : A \overset{\mathrm{surj}}{\rightarrow} \mathrm{ran}(F)$.

(b) $F : A \overset{\mathrm{inj}}{\rightarrow} B \quad \rightarrow \quad F^{-1} : \mathrm{ran}(F) \overset{\mathrm{bij}}{\rightarrow} A$.

(c) $F : A \rightarrow B \wedge G : B \rightarrow C \quad \rightarrow \quad G \circ F : A \rightarrow C$.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, wenn F eine Funktion ist, so gilt $F(x) = y$ genau dann, wenn $(x, y) \in F$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ gilt.

(c) Welchen Wert hat $F(x)$, wenn F an der Stelle x nicht eindeutig ist?

Aufgabe 5

Formalisieren Sie die folgenden Klassenterme.
(Geben Sie eine analog zu z.B. $\mathrm{Fun}(F)$ eine entsprechende $\in$-Formel an.)

(a) U ist die Funktion, die einer Menge x die Menge $\bigcup x$ zuweist.

(b) $\mathrm{Proj}(F) := F$ ist eine Projektion (d.h. eine Funktion, für die $(P \circ P)(x) = P(x)$ gilt).

(c) $\mathrm{Id}(F) := F$ ist auf seinem Definitionsbereich die identische Funktion.

(d) $\mathrm{Konst}(F) := F$ ist eine konstante Funktion.

Aufgabe 6 ("Erkenne den Logiker")

Wer ist auf diesem Bild abgebildet?