

KRITISCHE STUDIE
STRUCTUUR EN ONTOLOGIE
ENKELE TENDENSEN IN DE HEDENDAAGSE FILOSOFIE
VAN DE WISKUNDE¹

door L. DECOCK (Leuven)

1. INLEIDING

Begin deze eeuw kende de filosofie van de wiskunde een buitengewone ophloei. De discussie ging over de fundering van de wiskunde. Na de succesvolle aanzet tot volledige formalisering van de wiskunde door de Italiaanse wiskundige Peano, en de vertreggende reductie van wiskunde tot logica in de *Principia Mathematica* van Whitehead en Russell, was men gaan geloven dat wiskunde kon worden gefundeerd op een klein aantal axioma's. Een hevige discussie over de grondslagen werd gevoerd tussen drie scholen, namelijk het logicisme met als centrale figuur Russell, het formalisme rond Hilbert, en het intuitionisme rond Brouwer. Dit funderingsdenken had repercussies voor de hele filosofie. Zo ging Carnap in *Der logische Aufbau der Welt* de volledige wetenschap reconstrueren op basis van de logica en een enkele relatie² tussen totale zinnelijke ervaringen.

Lieven DECOCK (Brugge, 1970) is assistent aan het Centrum voor Logica, filosofie van de Wetenschappen en Filosofie, Hoger Instituut voor Wetenschappen, KU Leuven.

¹ Michael RESNIK, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford, Clarendon, 1997, 22,5 x 14,5, XIII-285 p., BF 1.907-x; Penelope MADDY, *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon, 1997, 22,5 x 14,5, VIII-254 p., BF 1.771-y; Stewart SHAPIRO, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, New York/Oxford, Oxford University Press, 1997, 24 x 16, X-279 p., BF 2.180-z.

² De extra-logische relatie die Carnap gebruikte was " Rx^y " (*recollection of similarity*), waarbij hij de volgende definitie gaf van " $x R y$ ": " x and y are elementary experiences which are recognized as part similar through the comparison of a memory image of x with y ", zie Rudolf CARNAP, *The Logical Foundations of Probability*, Berkeley, University of California Press, 1967, p. 127.

Halfweg deze eeuw veranderde het uitzicht van de filosofie van de wiskunde vrij drastisch. Vooreerst werd het funderingsdenken belemaal uitgehold, en daarnaast werd ontologie van de wiskunde een centraal thema. In de artikelen 'Truth by Convention' en 'Two Dogmas of Empiricism' verdedigde Willard Van Orman Quine een wetenschappelijk holisme³ – dat is het idee dat wetenschappelijke uitspraken niet kunnen geïsoleerd worden uit een totale wetenschappelijke theorie, en geen betekenis hebben los van deze theorie – en ondermijnde hij het onderscheid analytisch-synthetisch. Logica en wiskunde werden volledig ingebed in de totale wetenschap. Op deze wijze ondergroef Quine het funderingsdenken: een gegeven aantal axioma's maakt integraal deel uit van onze totale wetenschappelijke theorie; door dat wetenschappelijke theorieën evolueren, verandert ook de functie en de betekenis van de gegeven axioma's; en dus zijn deze niet langer een vaste basis om theorieën op te funderen. Daarnaast maakte Quines ontologisch criterium 'to be is to be the value of a variable'⁴ het mogelijk om op een geloofwaardige wijze realisme, of platonisme, in tegenover gevallen: dat zijn aanvaardbare waarden van variabelen.

Een bijkomende nieuwe impuls kwam er door het werk van Paul Benacerraf die in zeer schaarse maar uiterst invloedrijke artikelen⁵ problemen omtrent realisme in de wiskunde blootlegde. In 'What Numbers Could Not Be' troonde hij aan dat gevallen niet eenduidig kunnen gereduceerd worden tot verzamelingen; verzamelingentheorie is geen eenduidige fundering voor getaltheorie. Zo kan het getal twee gelijgtijdig worden met $\{\{0\}\}$ (Zermelo), of met $\{\{0, \{0\}\}$ (von Neumann), waarbij "0" staat voor de lege verzameling. Bovendien is de uitspraak "2 \in 4" volgens Zermelo's definitie van 'Trud', dat verschiet in de hoogdagen van causale referenttheorieën⁶, weet hij op de onmogelijkheid causaal contact te hebben met abstracte getallen.

Men kan grofweg stellen dat de hedendaagse filosofie van de wiskunde zich ontwikkelt binnen het veld dat door Quine en Benacerraf is uitgeroemd. De discussie wordt gevoerd door een handvol leidende figuren, die vaak een wiskundige achtergrond hebben. Het is een opmerkelijke gebeurtenis dat drie centrale figuren, Michael

³ Willard VAN ORMAN QUINE, 'Truth by Convention', in: W.V.O. QUINE, *The Ways of Paradox and Other Essays*, Harvard University Press, 1976, p. 77-106; W.V.O. QUINE, 'Two Dogmas of Empiricism', in: W.V.O. QUINE, *From a Logical Point of View* (Cambridge Mass., Harvard University Press, 1957), p. 20-46.

⁴ W.V.O. QUINE, 'Designation and Existence', *Journal of Philosophy* 36 (1939), p. 708.

⁵ De twee meest invloedrijke artikelen zijn opgenomen in Paul BENACERRAF & Hilary PUTNAM, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge. Het zijn: 'What Numbers Could Not Be', *op. cit.*, p. 272-294, en 'Mathematical Truth', *op. cit.*, p. 403-420.

⁶ Causale referenttheorieën verklaren referentie via een causale keten van gebeurtenissen die bestaan uit uitspraken van uitspraak en de situatie waarin de referent indexical bepaald werd. Deze theorieën gaan terug op het werk van Kripke en Putnam, namelijk Saul KRIPKE, *Naming and Necessity*, Blackwell, Oxford, 1980, en Hilary PUTNAM, 'The Meaning of Meaning', in: Hilary PUTNAM, *Mind, Language and Reality* (Cambridge, University Press, 1975), p. 215-271.

Resnik, Penelope Maddy, en Stewart Shapiro, haast gelijktijdig elk een nieuw boek geschreven hebben. Alle drie werden ze tot het realistische kamp gerekend. Resnik en Shapiro vormen samen met Geoffrey Hellman, die echter geen realist⁷ is, de kern van het structuralisme. Ik wens aan de hand van deze drie werken een aantal van de recentste ontwikkelingen in de filosofie van de wiskunde te schetsen en te evalueren. Ik streef er gezinszins naar een volledig beeld te geven. Bepaalde thema's uit de filosofie van de wiskunde zoals nominalisme⁸, of modaliteit⁹, zullen onderbelicht blijven.

2. NATURALISME

Een eerste opvallende tendens is het naturalisme in de filosofie van de wiskunde. Naturalisme is een uiterst invloedrijke filosofische stroming geworden in de Amerikaanse filosofie, en gaat grotendeels terug op het werk van Quine. Naturalisme in de strikte zin kan als volgt worden gekarakteriseerd:

[Naturalism: abandonment of the goal of a first philosophy. It sees natural science as an inquiry into reality, fallible and corrigible but not answerable to any supra-scientific tribunal, and not in need of any justification beyond observation and the hypothetico-deductive method.]¹⁰

Het is de combinatie van immanentisme enerzijds, en van het idee dat de wetenschap de laatste schiedsrechter is anderzijds. Immanentisme is het idee dat we ons binnenin een theorie bevinden waarheenover we geen externe positie kunnen innemen. Quine geeft ter verheldering vaak het beeld van 'Neutath's schip'. Het schip kan in volle zee voortdurend worden verbouwd, maar het is onmogelijk het schip van het begin af te herbouwen in volle zee. Het immanentisme gaat in tegen elke vorm van 'eerste filosofie'.

Vaak begrijpt men naturalisme in een bredere zin. De term heeft andere connotaties, en dan worden andere aspecten van Quines filosofie daaronder gear. Naturalisme wordt vaak geassocieerd met behaviorisme of evolutionair denken. De term 'genaturaliseerde epistemologie' heeft een meer specifieke betekenis. Genaturaliseerde epistemologie is de studie van de wijze waarop de mens als biologisch wezen

⁷ Voor een recente uiteenzetting van Hellman's positie, zie Geoffrey HELLMAN, 'Structuralism Without Structures', *Philosophia Mathematica* 4 (1996), p. 100-123.

⁸ Een goed overzicht van de huidige nominalistische strategieën vindt men in John BURNESS & Gideon ROSEN, *A Subject with no Object*, Clarendon, Oxford, 1997.

⁹ Modaliteit werd een belangrijk thema in de filosofie van de wiskunde na het verschijnen van Putnam's 'Mathematics without Foundations', herdrukt in Hilary PUTNAM, *Mathematics, Matter, and Method* (Cambridge, University Press, 1993), p. 43-59.

¹⁰ W.V.O. QUINE, *Theories and Things* (Cambridge, Mass., Belknap, 1981), p. 72. Deze definitie komt uit de tekst 'Five Milestones of Empiricism', waaraan Quine vijf stappen in de ontwikkeling van het moderne empirisme beschrijft, waarbij naturalisme de vijfde stap is.

vanuit de schaarre contacten met zijn omgeving er toe komt wetenschappelijke theorieën op te bouwen.

Naturalisme is echter vrij laat in de filosofie van de wiskunde doorgebroken. Het is vreemd dat dit naturalisme of epistemologische beschouwingen *tot en met* nauwelijks terug te vinden zijn in Quines teksten over logica en wiskunde. Het lijkt erop dat in de huidige filosofie van de wiskunde een haat in Quines filosofie wordt opgevoeld.

Bij Michael RESNIK is dit naturalisme in de meest quineaanse vorm terug te vinden. De laatste volgorde van de wiskunde waarmee Resnik aansluit op Quines denken is vaak markant. Hij ontwikkelt een genaturaliseerde epistemologie van de wiskunde. Naar analogie van Quines hypothetische theorie over de ontwikkeling van referentie¹¹, speculeert hij (p. 177-182; p. 226-242) over een quasi-genetische verklaring van het ontstaan van de wiskunde. Hij onderzoekt hoe de mens vanuit het contact met zijn omgeving overgaat tot het poneren (*posit*) van wiskundige entiteiten. De mens heeft de capaciteit patronen te herkennen, en dat is de basis voor zijn wiskundig denken. Resnik's inspiratie hiertoe komt grotendeels uit de meetkunde. Aan de hand van een aantal eenvoudige voorbeelden probeert Resnik dit uit te werken. De speculatie is zeer rudimentair, en Resnik had er beter aan gedaan zijn verhaal te adstrueren aan de hand van bestaand historisch materiaal. Het belang van Resnik's speculatie ligt echter niet in de details over het ontstaan van de wiskunde, maar in zijn interesse voor een genaturaliseerde epistemologie van de wiskunde.

Pendelope MADDY's naturalisme verschildt grondig van dat van Resnik. Waar in Resnik's naturalisme nog edo's doorklinken van het evolutionaire denken dat in het hedendaagse naturalisme manifest aanwezig is, is deze evolutionaire component veel minder aanwezig bij Maddy. Dat verschil hangt samen met een ander perspectief op de epistemologie van de wiskunde. Maddy interesseert zich maar matig voor de wijze waarop de wiskunde en aanvang heeft genomen, maar werkt aan een epistemologie voor de hogere verzamelingenleer.

We kunnen bij Maddy spreken van twee vormen van naturalisme. Haar recent naturalisme is een apostasie, want in *Naturalism in Mathematics* verlaat ze de planstond een sterk naturalistische inslag niet in de weg. Als antwoord op het probleem van Benacerraf, hoe kennis van wiskundige objecten mogelijk is, had Maddy een hypothetische neurofysiologische theorie voorgesteld over de wijze waarop perceptie¹² van verzamelingen mogelijk is. De sprong naar de hogere wiskunde maakte zij

¹¹ W. V. O. QUINE, *Word and Object* (Cambridge Mass., MIT Press, 1960), p. 80-124; W. V. O. QUINE, *The Ways of Parity* (La Salle, Open Court, 1973).

¹² P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Chiron, Oxford, 1990.

¹³ Maddy is op dit punt scherp aangevallen, o.a. door Resnik (p. 93-95), en ook in Mark BALGOUR, CAISSON, 'On Realism in Set Theory', *Philosophia Mathematica* 2 (1994), p. 97-108, en Emily 4) Jijik afstand te hebben genomen van deze verklaring.

vervolgens via een minder naturalistische faculteit, de 'intuïtie'¹⁴, die ze ontleend had aan Gödel.

In *Naturalism in Mathematics* zijn de neurofysiologische of behavioristische aspecten verdwenen. Maddy's nieuwe naturalisme is een naturalisme in de strikte zin dat geïnspireerd is door Wittgenstein¹⁵. Centraal hiertoe is het idee dat wiskundige methodologie hoofdzakelijk een wiskundige aangelegenheid is. Interne wiskundige argumenten moeten beslissen welke axioma's wiskundigen moeten aanvaarden. De concrete wiskundige praktijk moet de leidraad zijn voor filosofische stellingnames. Maddy neemt afstand van een te holistisch naturalisme en stelt dat de methodes van de wiskunde sterk verschillen van die der andere wetenschappen (p. 183).

Uitgaand van een studie van de historische ontwikkeling in de analyse en de verzamelingenleer, merkt zij op dat wiskundigen die ontologische zuinigheid hebben verdedigd en die het belang van een heldere constructie of definitie van wiskundige begrippen hebben onderstrept, streefde in het ongelijk werden gesteld. De val van het definabilisme in de loop van de ontwikkeling van het functiebegrip vormt een cruciaal punt in haar argumentatie (p. 117-126). Toen Fermat en Descartes de algebra zijn gaan toepassen op de meetkunde, heeft men aan de functies de bepaling gegeven van algebraïsch *gedefinieerde* krommen. Al spoedig bleek het om wiskundige redenen nuttig het begrip 'functie' uit te breiden. Zo liet Euler naast algebraïsche krommen, ook krommen toe die gedefinieerd werden door trigonometrische en logaritmische noties, machtrekken, en andere. Het functiebegrip werd steeds ruimer. Tenslotte werd elke verzameling van koppels van reële getallen aanvaard als functie. Het was niet langer nodig functies op een bepaalde manier te kunnen definiëren of construeren.

Uit deze geschiedenis distilleert Maddy het maxime: *maximize* (p. 211). Samen met het maxime *minimize*, dat nauwelijks wordt toegelicht, maar hoe dan ook aanvaardbaar is, vormt *maximize* de richtlijn die een wiskundige moet volgen. *Maximize* vormt de nieuwe justifiante van de vlucht naar de hogere verzamelingenleer, waar vroeger haar realisme de hogere verzamelingenleer veilig stelde. Het maxime *maximize* komt voor als dogmatisch, en Maddy karakteriseert het onvoldoende¹⁶ om het als richtlijn

¹⁴ Gödel is gekend voor zijn realisme of platonisme. Hij meende dat er een sterke analogie bestond tussen wiskunde en natuurkunde. Het zoal's fysieke objecten bestaan, bestaan er ook wiskundige objecten. De wiskundige tegenhanger van de fysieke perceptie was 'intuïtie'. Voor een grondiger bespreking van Gödel's 'intuïtie' zie Charles PARSONS, 'Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought', *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1 (1995), p. 44-74.

¹⁵ Maddy's boek is vrij technisch en is evenzeer voor wiskundigen als voor filosofen geschreven, vandaar de volgende opmerkelijke voetnoot (p. 161): "Some philosophers, especially those with a technical bent, tend to be unsympathetic to the style and content of the late Wittgenstein. I encourage such Wittgenstein-philosophers to skip over III. 1. and subsequent references back. Nothing essential will be lost."

¹⁶ De 'beste' karakterisering van wat het betekent verzamelingenleer te maximaliseren gaat als volgt: "... set theory should not impose any limitations on its own: the set theoretic arena in which mathematics is to be modelled should be as generous as possible; the set theoretic axioms from which mathematical theorems are to be proved should be as powerful and fruitful as possible." (p. 210-211)

voor wiskundige onderzoek te kunnen gebruiken. Dat is jammer omdat Maddy¹⁷ vroeger een uitgebreide studie heeft gemaakt van de methodologische bij het aanvaarden van verzamelingtheoretische axioma's. Daar gaf ze een beschrijving van de praktische *rules of thumb*, zoals *limitation of size*, *one step back from dissert*, enz., die wiskundigen gebruiken. "Maximize" was een andere *rule of thumb*, en kreeg een veel concretere karakterisering: "thicken the power set, and lengthen the class of ordinals"¹⁸ (p. 501). De vele, soms strijdige *rules of thumb*, met een minder dogmatisch karakter, uit 'Believing the Axioms' waren overtuigender dan de twee maxims uit haar recente boek.

Stewart SHAPIRO is een naturalist in de strikte zin, hoewel hij zichzelf nooit naturalist noemt. Wellicht is de behavioristische of sterk holistische blik van de term er voor hem teveel aan. Shapiro aanvaardt semantische primitieve noties en een nuw onderscheid analytisch/synthetisch. Volgende passage van Shapiro bepaalt duidelijk welk minimum aan naturalisme onontbeerlijk is in de filosofie van de wiskunde:

I propose that there is no universal, a priori notion of success by which all constructions or attempted idealizations are to be judged. Rather, adjudications are made in response to internal pressures within the evolving mathematical community in response to problems and goals previously taken to be important. This, in turn, is at least partly determined by the reasons the structures are being articulated and the role they play in the intellectual community at large. (p. 214)

Samenvattend kan men stellen dat revisionisme obsoliet geworden is. De filosofische aannames van de verschillende scholen uit de eerste helft van de eeuw konden nog ernstige gevolgen hebben voor de wiskundige praktijk. Nu pretenderen filosofie van de wiskunde niet langer de hervormen of te funderen, een overjarige intuitionist of constructivist niet te na gesproken.¹⁹

¹⁷ P. MADDY, 'Believing the Axioms', *Journal of Symbolic Logic* 53 (1988), p. 681-511; 735-764.

¹⁸ Deze *rule of thumb* betreft twee van de meest fundamentele concepten uit de verzamelingentheorie. Het eerste is het concept 'deelverzameling'. De machtsverzameling van een verzameling is de verzameling van deelverzamelingen. Voor eindige verzamelingen is er geen enkel probleem deze machtsverzameling te bepalen, en men kent ondubbelzinnig het aantal elementen uit deze verzameling. De manier waarop dit concept uitgebreid kan worden naar oneindige verzamelingen hangt echter af van de keuze van verzamelingtheoretische axioma's. Maddy vraagt dat de axioma's zo zouden worden gekozen dat de machtsverzameling van een verzameling zo groot mogelijk wordt. Het tweede concept is 'ordinaalgetal'. Het intuïtieve concept dat hier aan de basis ligt is 'ordening'. Een voorbeeld van een ordening is het telkens openkeur toevoggen van een nieuw object aan een verzameling. Men kan deze procedure voortzetten met oneindige verzamelingen. Het lijkt evident dat aan de verzamelingen van natuurlijke getallen een object kan toegewezen worden, zodat we een ordening kunnen hebben die langer is dan de natuurlijke getallen. Maddy vraagt dat de klasse van objecten die volgens een dergelijke procedure geconstrueerd worden, de ordinaalgetallen, zo lang mogelijk wordt. Dit heeft gevolgen voor de keuze van de verzamelingtheoretische axioma's.

¹⁹ Dit betekent niet dat de interesse voor funderingen helemaal onoveraanwoord is. Het kan interessant zijn te onderzoeken wat het minimum van aannames is om theorieën op te bouwen, zie bijvoorbeeld Solomon FEFERMAN, 'Wolfgang Foundation', *Synthese* 62 (1985), p. 229-254, of ook Shapiro.

3. HET PUTNAM-QUINE ONNISBAARHEIDSGRUMENT

Het Putnam-Quine 'onnisbaarbheidsgarument' (*indispensability argument*) is een heel hangzwaar²⁰ en de meningen over het argument zijn verdeeld. Het argument stelt dat wiskundig realisme zijn verantwoordelijkheid vindt in het feit dat wiskunde onmisbaar is in onze globale wetenschappelijke theorieën. Wiskundige formules zijn waar als ze deel uitmaken van onze wetenschappelijke theorieën; wiskundige entiteiten bestaan als ze geponeerd worden in onze theorieën. Een hierbij verzegen premisse is de holistische opvatting van wetenschap. Het argument houdt in dat een strikte demarcatie tussen empirische wetenschappen en wiskunde onmogelijk is.

Putnam heeft de term 'onnisbaarbheidsgarument' ingevoerd, met een expliciete verwijzing naar Quine. In de tekst 'Philosophy of Logic' begint hij de sectie "Indispensability arguments" als volgt:

...I have been developing an argument for realism along roughly the following lines: quantification over mathematical entities is indispensable for science: both formal and physical; therefore we should accept such quantification; but this commits us to accepting the existence of the mathematical entities in question. This type of argument seems, of course, from Quine, who has for years stressed both the indispensability of quantification over mathematical entities and the intellectual dishonesty of denying the existence of what one daily presupposes.²¹

Bij Quine is het onmisbaarbheidsgarument niet in een meer concreet uitgewerkte vorm terug te vinden. Hij gebruikt dit soort argument wel ook restrictief: entiteiten of wiskundige gebieden die, zoals de hogere verzamelingentheorie, niet onmisbaar zijn in onze empirische theorieën, hebben geen bestaanrecht.²²

Resnik onderschijft het onmisbaarbheidsgarument volledig en spendeert anderhalf hoofdstuk (p. 45-81) aan het wetleggen van verschillende objecten. Wat hij verdedigt is een zwak, 'pragmatisch' onmisbaarbheidsgarument, dat evenzeer van toepassing is op geïdealiseerde theorieën als op 'echte' theorieën. Daarmee komt hij tegemoet aan een objectie van Maddy. Hij geeft de volgende versie van het onmisbaarbheidsgarument:

(1) In stating its laws and conducting its derivations science assumes the existence of many mathematical objects and the truth of mathematics.

²⁰ Naast de vernoemde auteurs hebben tal van anderen het onmisbaarbheidsgarument behandeld, bijvoorbeeld Elliott SOBER, 'Mathematics and Indispensability', *Philosophical Review* 102 (1993), p. 35-57; Geoffrey HILLMAN, 'On the Scope and Force of Indispensability Arguments', *JSA* 2 (1992), p. 456-464; Mark BAYLIS, 'A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics', *Philosophical Studies* 83 (1996), p. 291-314; Jody AZIZUINI, 'Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis', *Philosophia Mathematica* 5 (1997), p. 193-209; Mark COULYAN, 'In Defense of Indispensability', *Philosophia Mathematica* 6 (1998), p. 39-62.

²¹ Hilary PUTNAM, *Mathematics, Meaning and Method* (Cambridge, University Press, 1975), p. 347.

²² W.V.O. QUINE, 'Immanence and Validity', *Dialectica* 45 (1991), p. 219-230.

- (2) These assumptions are indispensable to the pursuit of science; moreover, many of the important conclusions drawn from and within science could not be drawn without taking mathematical claims to be true.
- (3) So we are justified in drawing conclusions from and within science only if we are justified in taking the mathematics used in science to be true. (p. 46-47)

Het onmisbaarheidargument is voor Resnik belangrijk omdat hij niet wil vervallen in een louter instrumentalistische houding tegenover de wiskunde. Het argument kan Benacerraf's objecties tegen wiskundig realisme uit 'Mathematical Truth' opragen. Indien wiskunde namelijk als een andere wetenschap kan worden behandeld, hebben wiskundige *positis* evenwel bezwaarsrecht als entiteiten uit de theoretische natuurkunde: daar is soms evenmin causale interactie mee mogelijk is, denk maar aan virtuele deeltjes of het inwendige van zwarte gaten (p. 107). Resnik gaat bovendien extra argumenten leveren voor sterk wetenschappelijk holisme, en laat het onderscheid tussen wiskunde en theoretische natuurkunde vervaagen. Het resultaat is dat Resnik eindigt met zeer losse ontologische criteria, waarbij men zich kan afvragen wat realisme nog bijtrengt. Men kan evengoed stellen dat wiskundige *positis* slechts *positis* zijn. *Dere positis* zijn waardevol binnen theorieën, maar de vraag of *dere positis* al dan niet echt bestaan, lijkt van weinig belang.

In *Realism in Mathematics* had Maddy vraagtekens geplaatst bij het Putnam-Quine onmisbaarheidargument. Maddy meende toen dat het argument onvoldoende is om een realisme betreffende de hogere domeinen in de verzamelingenleer te verdedigen. Haar realisme bestond uit een compromis tussen het Putnam-Quine onmisbaarheidargument en Gödels intuïtie. Maddy heeft nu samen met het realisme ook het onmisbaarheidargument laten vallen. Een substantieel deel van het nieuwe boek (p. 103-108; 130-160) is gewijd aan het ongelooftwaardig maken ervan. Maddy heeft vooral problemen met Quines positie, omdat Quine de hogere domeinen uit de verzamelingenleer weigert. Volgens haar kan het onmisbaarheidargument niet worden gebruikt om bepaalde wetenschappelijke takken te verwerpen.

Maddy's objectie is vooral gericht tegen het naïeve beeld van wetenschap waar de verdedigers van het argument van uitgaan. Ze stelt dat slechts een klein deel van de wetenschap als waar beschouwd wordt, onder wetenschap in hoge mate gebruik maakt van idealisaties.²³ Als voor de hand liggende voorbeelden vermeldt ze onder meer de onenig diepe oceanen en frictieloze vlakken die gesimpuleerd worden in bepaalde berekeningen. Vervolgens concentreert ze zich in haar analyse expliciet op de wiskunde die gebruikt wordt in fysische theorieën welke op het eerste gezicht geen gebruik maken van idealisaties. Hierbij beschouwt ze problemen die relevant zijn voor de verzamelingenleer, namelijk problemen over het continuüm. Ze bespreekt fysische differentiaalvergelijkingen, die gebruikt maken van de continuïteit van fysische

²³ Maddy schrijft dat ze hierbij geïnspireerd is door het werk van Ernan McMullin en Nancy Cartwright (p. 144 voetnoot 23).

grootheden, en meer in het bijzonder van de continuïteit van tijd en ruimte. Maddy stelt dat de moderne natuurkunde geen enkele uitspraak doet over continuïteit. Hierbij haakt ze een aantal problemen²⁴ aan uit de moderne natuurkunde die laten uitschijnen dat onze fysische theorieën onbetrouwbaar worden op heel kleine afstanden, en dus dat de continuïteit van tijd en ruimte slechts een speculatie is. Ze concludeert dat fysici weliswaar gebruik maken van continuïteit, maar gezinszins de garantie kunnen bieden dat dit meer is dan een idealisatie (zoals bijvoorbeeld frictieloze vlakken). De moderne fysica doet geen uitspraken over de wiskundige vragen die Maddy relevant vindt.

Het onmisbaarheidargument is een vaag argument; men spreekt er vaak in het meevoud over. Een hele achtergrondepistemologie, waarheidscriteria, een verfijning van het wetenschappelijk holisme zijn nodig om het argument te kunnen gebruiken. Ik besluit met een citaat van Shapiro dat het argument correct taxeert:

One premise [voor wiskundig realisme] is that mathematics is indispensable for science, and another is that the basic principles of science are (more or less) true [...]. However, even if the premises are true and even if the Quine-Putnam indispensability argument is convincing, it is much too *cozy* to leave things at this stage. To shore up the argument, the realist must provide an account of exactly how mathematics is applied in science. The first premise is in itself a mystery. What does the realm of numbers and sets have to do with the physical world studied in science? How can such items shed light on electrons, bridge stability, and market stability? We cannot sustain the Quine-Putnam indispensability argument until we know this [...]. By itself, the indispensability argument has the advantage of theft over honest toil. (p. 245)

4. HOGERE VERZAMELINGENLEER

Vershillende wiskundige axioma's hebben aanleiding gegeven tot heel wat discussie. Het heeft een poos geduurd vooracter meekundigen ervan overtuigd waren dat het parallel-axioma losstaat van Euclides' andere axioma's, en niet strikt nodig is om een zinvolle meekunde op te bouwen. Begin deze eeuw was er een enorme strijd rond Zermelo's keuze-axioma. Dit axioma stelt dat voor elke verzameling die bestaat uit disjuncte verzamelingen, een verzameling bestaat met precies één element uit elk van de disjuncte verzamelingen. Inmiddels is dit axioma zo onmisbaar in de wiskunde dat niemand het nog ernstig ter discussie stelt. Maddy is ervan overtuigd dat ook over het verwerpen van het axioma ' $V=L$ ' dergelijke consensus mogelijk is.

²⁴ Maddy citeert *The Feynman Lectures on Physics*—Richard Feynman was één van de belangrijkste fysici van de tweede helft van deze eeuw, tevens uitmuntend op didactisch gebied—en een synthese van de moderne fysica van de hand van Pauli DAVIES uit Pauli DAVIES (Ed.), *The New Physics* (Cambridge University Press, 1989). Maddy had beter ook recentere voorbeelden gegeven—bijvoorbeeld de theorie van Hawking over de quantisatie van tijd en ruimte—om haar betoog nog overtuigender te maken.

$V=L$ is een axioma dat kan worden toegevoegd aan de Zermelo-Fraenkel axioma's (ZF). ZF is de standaard axiomatisatie in de verzamelingenleer. Omwille van Gödel's onvolledigheidsstelling kan ZF uitgebreid worden. Een mogelijkheid is via het model L . Dit model²⁵ werd voorgesteld door Gödel in 1939. Het axioma $V=L$ stelt dat de verzamelingen in het model V in het model L gelijk zijn.

Met $V=L$ kon Gödel bewijzen dat $ZF + [V=L]$ het keuze-axioma (AC) en de continuüm-hypothese (CH) impliceert, en dus dat ZF consistent is met AC en CH. Later ging Gödel geloven dat CH vals was, en dus ook $V=L$. Het axioma $V=L$ werd opnieuw opgevoerd door Ronald Jensen die er een groot aantal gevolgen van ontleent en het opnieuw enige geloofwaardigheid gaf. Het axioma is vrij marginaal bij wiskundigen die werken in verzamelingenleer. Quine daarentegen staat welwillend tegenover $V=L$, en verwerpt resoluut onbereikbare kardinaalgetallen²⁶, omwille van een ontologische kenterigheid.

Waar het aanvaren van $V=L$ een constructieve hiërarchie van verzamelingen oplevert, heeft het verwerpen van $V=L$ het voordeel of nadeel dat men onbereikbare kardinaalgetallen krijgt. Dit kan een veel meer geschatte universum van verzamelingen opleveren. Naast de reeds vermelde $V=L$ en CH zijn er nog diverse uitbreidingen van ZFC (d.i. $ZF + AC$) mogelijk. De uitbreidingen van ZFC vormen een complex wiskundig onderzoeksveld met tal van keuzes tussen axioma's die onderling onverenigbare resultaten geven.

Gegeven deze pluriformiteit in de verzamelingenleer, verzet Maddy zich tegen 'Glib Formalism' (p. 70). Een Glib Formalist ziet geen essentieel verschil tussen de verschillende mogelijke uitbreidingen van ZFC, en meent dat elke consistente uitbreiding van ZFC even goed is als een andere. Maddy is van oordeel dat er goede gronden zijn om bepaalde axioma's boven andere te verkiezen. Haar duidelijkste voorbeeld is $V=L$. CH is bijvoorbeeld al veel moeilijker (p. 66 voertmoet).

In *Realism in Mathematics* wilde ze de ramificaties in de verzamelingenleer beweren door platonisme. Maddy stelde toen dat de verzamelingtheoretische axioma's een waarheidswaarde hadden. $V=L$ werd afgewezen als onwaar axioma. In *Naturalism in Mathematics* is haar houding gematigder. Ze argumenteert dat de keuze van uitbreidingen van ZFC hoofdzakelijk een intern wiskundige zaak is, waarbij het de bedoeling moet zijn de wiskunde maximaal uit te breiden. Externe constructivistische objecties kunnen geen rol spelen. Haar laatste hoofdstuk is een zeer

²⁵ Het model L is een modificatie van Zermelo's cumulatieve hiërarchie van verzamelingen V . Zermelo's cumulatieve hiërarchie bestaat uit een one van niveaus van verzamelingen, waarbij de verzamelingen op een bepaald niveau bepaald zijn als de deelverzamelingen van het niveau eronder. Deze cumulatieve hiërarchie zit vervat in de axioma's van ZFC. Het model L is een gelijkwaardige cumulatieve hiërarchie, waarbij een bepaald niveau bestaat uit de deelverzamelingen die kunnen beschreven worden door welbepaalde logische formules.
²⁶ W.V.O. QUINE, 'Immaturity and Validity', *Dialectica* 45 (1991), p. 219-230. Onbereikbare kardinaalgetallen (*inaccessible cardinals*) zijn verzamelingen die niet met de axioma's van ZFC alleen kunnen worden beschreven. Extra axioma's, die dan ZFC uitbreiden, kunnen het bestaan van dergelijke grote verzamelingen postuleren.

technische uitleg over de wijze waarop het verwerpen van $V=L$ de verzamelingenleer 'maximaliseert', namelijk op welke wijze $V=L$ minder structuur bevat.

De hardnekkigheid waarmee Maddy $V=L$ te lijf gaat is opvallend. Indien het overduidelijk is dat $V=L$ wiskundig ininteressanter is dan $V=L$, waarom zou ze zich dan bekommeren om enkelingen die $V=L$ verder uitwerken? Maddy wil met filosofische argumenten de noodzaak aantonen van het aanvaren van onbereikbare getallen. Zo is ze de filosofische sprekerbuis van de Cabal-groep, een groep Amerikaanse wiskundigen die werk leveren in de descriptieve verzamelingenleer. Descriptieve verzamelingenleer is een deel van de hogere verzamelingenleer, en is ontstaan uit de analyse, meer bepaald uit de maattheorie. Maddy's insistentie op de noodzaak van onbereikbare getallen valt te begrijpen als een apologie van het onderzoek in de hogere verzamelingenleer. Hogere verzamelingenleer is niet onomstreden, omdat deze veraf komt te staan van *mainstream*-wiskunde. Voor sommigen is de hedendaagse verzamelingenleer een ongebreidelde woekering van wiskundige structuren geworden. Zij spreken van een moderne 'theologie'²⁷ of ook van een 'astrologie'. Maddy wijst de vergelijking met de astrologie van de hand met de motivatie: "mathematics is *staggeringly* *useful*, *seriously* *indispensable*, to the practice of natural science, while astrology is *not*" (p. 204). Een onmisbaarheidsargument speelt hier blijbaar toch een rol in de verdediging van de verzamelingenleer.

Een onvoldoende uitgewerkt punt in de argumentatie van Maddy is de band tussen traditionele wiskunde en verzamelingenleer²⁸. Maddy maakt zelden een verschil tussen wiskunde en verzamelingenleer, en vaak schrijft ze '*mathematics*' waar het in feite in eerste instantie verzamelingenleer betreft. Ze presenteert de hogere verzamelingenleer als een natuurlijk gevolg van een interne wiskundige dynamiek. Intern betekent voor Maddy vooral: binnen de verzamelingenleer – hoewel zij pretendeert dat het binnen de wiskunde in het algemeen is. Indien verzamelingenleer voldoende verstrengd is met andere domeinen uit de wiskunde, dan is het pragmatische argument uit het vorige citaat over het nut in de wetenschap geldig, en is verzamelingenleer niet gelijk te stellen met astrologie. Indien verzamelingentheorie extern is aan de wiskunde, dat wil zeggen, indien de band tussen verzamelingenleer en de rest van de wiskunde vrij los is, dan zou Maddy het praktische nut van verzamelingenleer moeten kunnen aantonen, waarbij ik alvast benieuwd zou zijn naar die argumenten. Indien verzamelingenleer een normaal deel is van de wiskunde, zou er niets aan de hand zijn. Dat is echter veel minder evident dan de leek op het eerste gezicht zou vermoeden op basis van de 'moderne wiskunde' die hij vroeger heeft ondergaan. De vraag is van groot filosofisch en wiskundig belang, maar is moeilijk te beantwoorden. Zo hebben twee ZFC axioma's, namelijk *Foundation* en *Replacement*, al nauwelijks wiskundige

²⁷ Zie RESNIK, o.c., p. 140 voertmoet.

²⁸ In 'On the Scope and Force of Indispensability Arguments' van Hellman wordt dieper ingegaan op de band tussen verzamelingenleer en wiskunde, en de onmisbaarheid van verzamelingenleer.

repercussies. Maddy zou haar betoog een stuk overtuigender maken, als ze op dit probleem dieper zou ingaan.

Het lijkt me overigens weinig geloofwaardig dat wiskundigen of filosofen van de wiskunde een concrete invulling kunnen geven aan het maximale *maximize*. Maddy slooft zich uit om aan te tonen dat wiskundigen noodzakelijk $V=L$ achter zich moeten laten, om de wiskunde te kunnen maximaliseren. Maddy's invulling van het principe *maximize* is om te beginnen erg vaag, en bovendien vooral gebaseerd op de manier waarop de huidige generatie wiskundigen die werken in verzamelingenleer, hun discipline proberen uit te breiden. Het is niet vanzelfsprekend welke inhoud het principe heeft in takken van de wiskunde waar verzamelingen nauwelijks een rol spelen.

Te vertegende extrapolaties van de huidige methoden in de wiskunde zijn gevaarlijk. Een tijdlang dacht men dat het 'maximaliseren' van de meetkunde gerevisereerd werd door hogere-orde krommen zoals de cirkel van Monge en het folium van Descartes te bestuderen. De differentiaalrekening maakte niet veel omslag met dit project. Misschien is de projectieve meetkunde, een tijdlang de meest abstracte vorm van meetkunde, binnenkort ook vergeen. Misschien zijn ook de hogere domeinen in de verzamelingenleer eerlang vergeen, omdat ze onafhankelijk zijn van de groei in andere domeinen in de wiskunde of de wetenschap. Het tegendeel kan ook. Voor de obscure theorie van Lie-groepen, die een tijd fungeerde als typevoorbeeld van ontoepasbare wiskunde, zijn een halve eeuw later plots wel uiterst interessante toepassingen gevonden in elementaire deeltjesfysica. De natuurkundige Witten kreeg onlangs de *FIELDS medal* voor onderzoek in knopentheorie, op het eerste gezicht een wiskundige discipline voor padvindders, die echter wel belangrijke toepassingen heeft in snaartheorieën.³⁰ De wiskundige toekomst van de hogere verzamelingenleer lijkt moeilijk te voorspellen, en ik heb dan ook geen enkele pretentie een oordeel te vellen over hogere verzamelingenleer. Met een slogan van Mao, die Shapiro vaak herhaalt in deze context, zou ik zeggen: "Let a thousand flowers (try to) blossom."

5. STRUCTURALISME

De positie die Resnik en Shapiro innemen in de filosofie van de wiskunde wordt aangeduid met de term structuralisme. Dit structuralisme is een dominante stroming geworden in de hedendaagse filosofie van de wiskunde. Het is geen al te homogene stroming. Structuralisten hebben gemeen dat ze allen wiskunde karakteriseren als de wetenschap van structuren. Het verhelderen van het filosofische statuut van structuren, in ontologische en semantische zin, is het centrale thema.

³⁰ Zie W.V.O. QUINE, *From Stimulus to Science*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1995, p. 74-75: "what matters for any objects, concrete or abstract, is not what they are but what they contribute to our overall theory of the world as neural nodes in its logical structure."

³¹ Peano's postulaten zijn de standaardaxiomatisering van de structuur van de natuurlijke getallen.

Resnik is een realist wat de posities binnen een structuur betreft. Posities binnen een structuur voldoen aan een duidelijk individuaal criterium, en zijn daarom perfect aanvaardbaar als objecten. Dit realisme is verwant met Quines meer recente ontologische opvattingen. Quine heeft zijn vroegere platonistische opvattingen over wiskundige objecten vervangen door meer structuralistische, waarbij objecten slechts knooppunten³¹ in structuren zijn. Voor Resnik zijn getallen op deze wijze posities in een rij van posities die voldoet aan de structuur beschreven door middel van Peano's postulaten.³¹

Resnik is echter geen realist wat de structuren zelf betreft:

[...] the typical mathematical theory concludes the structure it is supposed to describe from its universe of discourse, and consequently does not recognize it as a mathematical object. For example, most formulations of number theory have individual variables for numbers, but no *individual* variables for number-theoretic relations, functions, or the number sequence itself [...]. These theories have the *wherewithal* for asserting that there are numbers but not for asserting that there is a number sequence. (p. 246)

Dit betekent nog niet dat het onmogelijk is over structuren te spreken, of structuren als objecten te beschouwen. Dat kan, als de structuur waarover sprake is, kan worden voorgesteld als een positie in een ruimere structuur. Op deze wijze kan men een hiërarchie van structuren creëren, waarbij een structuur echter nooit zichzelf kan beschrijven (p. 247).

Voor Resnik is er geen *fact of the matter* bij het vergelijken van verschillende structuren. Het is mogelijk destructuren van een ruimere structuur met elkaar te vergelijken, maar wanneer die omvattende structuur er niet is, zijn er geen identificatiecriteria voorhanden om te beslissen of objecten in een structuur gelijk zijn aan objecten uit een andere structuur. Zo is er geen zinvol antwoord op de vraag of de natuurlijke getallen kunnen worden gelijkgesteld met posities in bepaalde structuren (p. 248). De structuren zelf zijn afhankelijk van, of ingebed in een achtergrondkennis. Volgens Resnik is er echter geen vaste achtergrondkennis; deze achtergrondkennis kan slechts naar gelang de omstandigheden beter geëxpliciteerd worden. Resnik noemt dit *structural relativity* (p. 250). Hiermee valt elke absolute fundering voor de wiskunde weg. Er zijn geen absolute noties, zelfs begrippen als 'definierbar' of 'isomorf' zijn niet absoluut (p. 251). Dit betekent dat het structuralisme zelf geen theorie kan zijn: "But it is not clear that structuralism, or any philosophical approach to mathematics, need be formulated as a theory, much less as a regimented mathematical theory." (p. 253-254) Resnik's structuralisme is een positie die ontsnapt aan wiskundige formaliseerbaarheid. Het is bijgevolg een dynamische positie die meer precies gemaakt

³² Zie W.V.O. QUINE, *From Stimulus to Science*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1995, p. 74-75: "what matters for any objects, concrete or abstract, is not what they are but what they contribute to our overall theory of the world as neural nodes in its logical structure."

³¹ Peano's postulaten zijn de standaardaxiomatisering van de structuur van de natuurlijke getallen.

kan worden als er nood aan is (p. 261). De grens tussen wiskunde en filosofie van de wiskunde verwaagt. Structuren zijn eerder epistemische of semantische noties dan wiskundige noties.

Het statuut van Resnik's structuren is problematisch³². Resnik heeft nood aan een semantische theorie om zijn structuralisme verder uit te werken. Een aanzet hiertoe wordt gegeven in zijn hypothetische theorie over patroonherkenning. Het begrijpen van complexe wiskundige structuren wordt teruggekoppeld naar het inzicht in eenvoudige patronen. Toch lijkt dit vrij onbetreffend. Resnik's structuralisme lijkt zelfs moeilijker dan Quines verzalgemend structuralisme (*global structuralism*). In dit veralgemeende structuralisme zijn alle objecten slechts knooppunten in structuren. Deze structuren zijn betekenisvol via de *observation sentences* die ze impliceren. Deze structuren zijn met empirische waarneming verbonden. Resnik beperkt zijn structuralisme tot *wiskundig* structuralisme (p. 267). De lezer blijft in het ongewisse over de semantische en epistemische achtergrond die aanwezig is in Resnik's structuralisme.

Shapiro is zich uitermate goed bewust van de semantische problemen die opduiken in de filosofie van de wiskunde en gaat daar ook diep op in. Op het punt waar Resnik's structuralisme problematisch wordt, valt Shapiro terug op semantische noties. Wellicht is deze uitweg niet aanvaardbaar voor Resnik, omwille van de invloed van Quines semantisch pessimisme³³. Shapiro heeft minder scrupules over semantische noties.

Het uitgangspunt hiervoor is een modeltheoretisch³⁴ kader (p. 46), dat slechts een ruw kader is voor de samenhang tussen semantische noties. Modeltheorie kan echter niet voor haar eigen interpretatie zorgen:

There is a general problem of explaining how formal languages relate to natural languages of mathematics. Model theory itself does not address these questions. Thus, even if model-theoretical semantics is the central framework for philosophical realism, by itself it is an empty framework. (p. 47)

³² Dit woord is gebruikt in een zin die ontleend is aan Kant. De problemen over het statuut van structuren zijn verwant met Kants probleem over het statuut van de categorieën. Kant definieert de term 'probleematisch' in *Kritik der reinen Vernunft* B310: "Ich nenne einen Begriff problematisch, der keinen Widerspruch enthält, der auch als eine Begrenzung gegebener Begriffe mit andern Erkenntnissen zusammenhängt, dessen objective Idealität aber auf keine Weise erkannt werden kann."

³³ Quine staat bekend voor zijn extreme sceptisisme over semantische entiteiten. Hij heeft steeds enige twijfels uitgedrukt over de mogelijkheid van een goede karakterisering van 'betekenis'. Kennmerkend voor zijn semantisch pessimisme is zijn these van de onherpallbaarheid van de vertaling. Deze these stelt dat het voor een linguïst onmogelijk is een totaal vreemde taal op een unieke manier te vertalen. Zie W.V.O. QUINE, *Word and Object* (Sanberidge Mass, MIT Press, 1960), p. 26-79.

³⁴ Modeltheorie is een tak van de wiskunde die ontzinkt in de logica. Modeltheorie bestudeert hoe theorieën die uitgedrukt zijn door predikaatlogica verschillende modellen kunnen hebben, en extraneus van de predikaten van de theorie. Een model van een theorie bestaat uit een ontologie en de waarden van de predikaten van de theorie. De extraneus van predikaten zijn verzamelingen elementen van deze ontologie.

De typische praktijk in modeltheorie is vervolgens objectueel en metataal te scheiden, waarbij de semantiek van de objecttaal in de metataal is bepaald. Dit leidt tot een regressie omdat we steeds van hogere metaal kunnen bspelen voor een metaal. Op zeker moment stopt men de regressie om te 'berusten' in de 'moedertaal' of 'achtergrondtaal' die gewoon *gebruikt* (*used*) wordt. Shapiro gebruikt hiervoor de term 'U-language', een term die hij ontleend heeft aan de logicus Haskell Brooks Curry:

the communicative language which is mutually understood by speaker and hearer. I shall call this language the U-language, i.e.: the language being used [...] (p. 51)

Deze U-language is voor Shapiro gezinszins een universele noch onveranderlijke taal. Er is een dialectiek zodat wiskundige ontwikkelingen de U-language kunnen modificeren, en semantische problemen kunnen wiskundige vooruitgang stimuleren.

Dit aanvaarden van een relatief stabiele achtergrondtaal laat Shapiro toe een aantal semantische noties en onderscheidingen te introduceren. Een aantal primitieve semantische noties zijn onder andere structuur-equivalentie³⁵, categoriciteit, en coherentie (p. 132-136). Deze noties zijn primitieve semantische noties, want ze kunnen niet geformaliseerd worden. Een theorie is categorisch als we 'begrijpen' dat slechts één model van de theorie mogelijk is. Dit lijkt in regenspraak met de Löwenheim-Skolem-stelling dat elke theorie die een oneindig model heeft, een model heeft in elke oneindige cardinaliteit. Hierdoor heeft elke theorie oneindig veel modellen. Shapiro is echter niet overtuigd dat deze Skolem-paradox een echt probleem vormt, en gelooft niet dat het onmogelijk is niet-standaard modellen uit te sluiten: "the informal language of mathematics has the resources to distinguish standard from nonstandard models" (p. 133) Naast de uniciteit van een model van een theorie kan ook het bestaan van een model ter discussie staan³⁶. Een theorie is coherent als er een model voor bestaat.

Een ander semantisch onderscheid dat Shapiro invoert is het onderscheid algebraïsch/niet-algebraïsch:

A field is non-algebraic if it has a single 'intended' interpretation among its models or, more precisely, if all of its 'intended' models are isomorphic (or at least equivalent). [...] A field is algebraic if it has a broad class of (nonequivalent) models. Group theory, for example, is about all groups. (p. 50)

Shapiro (p. 73 voetnoot 2) merkt op dat Resnik het belang van dit onderscheid niet erkent. Ik meen dat Resnik het onderscheid terecht aanwerft. De U-language lijkt me onvoldoende universeel om dit onderscheid te kunnen funderen. Ik heb er moeite

³⁵ SHAPIRO, *o.c.*, p. 91: "structure equivalence is characterized in terms of *definability*, a blazant linguistic notion. One consequence is that equivalence is dependent on the resources available in the background metalanguage (or the U-language)."

³⁶ Dit geldt vooral voor een tweede-orde theorie, want Gödels volledigheidstelling die stelt dat een consistente eerste-orde theorie een model heeft, laat consistentie en coherentie in een eerste-orde theorie samenvalen (p. 134).

meer dat de natuurlijke getallen een algebraïsche structuur zouden zijn, terwijl groepen slechts de structuur van concrete groepen zouden beschrijven. Eindige groepen, als bijvoorbeeld de viergroep³⁷, lijken me zeer concreet. Daarentegen bestaan voor de Peano-axioma's, die de natuurlijke getallen beschrijven, verschillende structuren in de verzamelingenleer die eraan voldoen, wat de kern was van Benacerraf's 'What Numbers Could Not Be'. Het onderscheid behoeft minstens verheldering, en het lijkt me niet duidelijk dat het onderscheid deze poging tot verheldering zal doorstaan.

Het verschil tussen Resnik en Shapiro ligt in hun respectievelijke opvattingen over de achtergrondtaal. Voor Shapiro is er een *U-taal*, die vrij stabiel is in de tijd en homogeen gebruikt wordt in een bepaalde taalgemeenschap. Deze achtergrondtaal is ten dele bepaald door de historische stand van de wiskunde, maar kan wel functioneren als algemene achtergrond waarbinnen de wiskundige structuren kunnen worden beschreven. Voor Resnik is het gebruik van de achtergrondtaal relatief. Structuren variëren met de logische achtergrond (p. 252), en volgens Resnik ligt deze achtergrond niet a priori vast.

Structuralisme lijkt te verzinken in een semantisch moeras. Het is absoluut niet duidelijk hoe een geloofwaardige wiskundige, taalkundige of filosofische theorie over de achtergrondtaal van de wiskunde opgesteld moet worden. Filosofie van de wiskunde is onvermijdelijk door semantische problemen besmet. Omgekeerd lijkt filosofie van de wiskunde onmisbaar in elke zinvolle analyse van semantiek. Een aantal wiskundige problemen werpt een heel specifiek licht op semantische problemen. Zo lijken noties als 'structurele equivalentie' of 'categoriteit' meer dan gelijk welke noties uit andere werensschappen of uit de dagelijkse ervaring in aanmerking te komen als semantisch primitieve noties. Deze noties kunnen zelfs door de meest rebiate anti-essentialist niet zonder meer als irrelevant worden afgewezen. Anderzijds zijn deze noties ingebed in achtergrondtaal waarvan het natuur problematisch is. 'Noties die deel uitmaken van een evolerende (achtergrondtaal) kunnen bezwaarlijk 'primitief' genoemd worden. Het debat over essentialisme kan wellicht op een interessante vorm bediscussieerd worden in de filosofie van de wiskunde. Men kan een hele discussie opzetten rondom de vraag of 'structurequivalentie', 'categoriteit', de natuurlijke getallen zelf, universalia zijn, of via de achtergrondtaal afhangen van de culturele context.

6. EVALUATIE

In het voorafgaande heb ik een aantal thema's naar voren gebracht die centraal staan in de hedendaagse filosofie van de wiskunde. Ik wens deze laatste sectie te reserveren voor een meer specifieke evaluatie van de afzonderlijke boeken. Alle drie

³⁷ De viergroep is een eenvoudige groep met vier elementen, waarbij het kwadraat van elk element het neutraal element oplevert, dit wil zeggen voor elk element a van de groep hebben we: $a^2 = a_0$.

zijn ze zonder voorbehoud de moeite waard. Ze geven een nieuwe impuls aan een aantal hangende debatten. Het boek van Resnik lijkt het best geschikt als kennismaking met de hedendaagse filosofie van de wiskunde. Het wiskundig-technisch materiaal is beperkt, en de auteur zet vrij rechtlijnig zijn standpunt uiteen. In grote lijnen is dat het standpunt van Quine. Meer dan ooit heeft Quine een zeer voornamelijk plaats in de hedendaagse discussies, hoewel hij nooit zijn positie in de filosofie van de wiskunde uitgebreid geschetst heeft. Resnik's boek kan daar min of meer toe dienen.

Maddy's boek is veel technischer en vereist een redelijke kennis van de verzamelingenleer. Haar argumentatie is meestal heel helder en filosofisch interessant, maar erg specifiek gericht op één punt, namelijk de verdediging van hogere verzamelingenrekenen. Maddy wil wiskundig onderzoek in een bepaalde richting sturen.

Shapiro's boek is wellicht het meest gevarieerde en het meest genuanceerde van de drie. Het geeft op de beste manier weer hoe semantiek en epistemologie in de filosofie van de wiskunde onontbeerlijk zijn. De thema's worden op een zodanige wijze behandeld dat ze ruimere consequenties hebben dan alleen binnen de filosofie van de wiskunde. Ook voor wie minder voor filosofie van de wiskunde, maar eerder voor ontologie, referentie, semantiek, of epistemologie geïnteresseerd is, is dit boek een aanrader.³⁸

³⁸ Ik dank Paul Corrois, Leon Horssen, Herman Roelans en Jaap van Brakel voor waardevolle opmerkingen.