Einführung in die Mathematische Logik

1. Übungsblatt

Abgabe: 25.04.2002, vor der Vorlesung

1.) Eine aussagenlogische Funktion ist eine Funktion

$$(X_0, \cdots, X_{n-1}) \mapsto f(X_0, \cdots, X_{n-1})$$

mit $X_0, \cdots, X_{n-1} \in \{0,1\}$ und $f(X_0, \cdots, X_{n-1}) \in \{0,1\}$.

a) Wieviele n-stellige aussagenlogische Funktionen $f(X_0, \cdots, X_{n-1})$ gibt es?

b) Ein Rechner untersucht in einer Sekunde 10^6 10-stellige aussagenlogische Funktionen. Schätzen Sie ab, wie lange die Untersuchung aller 10-stelligen Funktionen dauern würde.

c) Schreiben Sie alle 2-stelligen aussagenlogischen Funktionen mit Hilfe von $F, W, \neg, \vee$.

2.a) Geben Sie für jedes $n-$Tupel $s = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ einen n-stelligen aussagenlogischen Ausdruck A in den Variablen $X_0, \cdots, X_{n-1}$ an, der den Wert 1 genau dann annimmt,
wenn $X_0 = a_0, \cdots, X_{n-1} = a_{n-1}$.
Schreiben Sie diese Bedingung exakter mit dem Begriff der Belegung auf.

b) Geben Sie für jede aussagenlogische Funktion einen Ausdruck an, dessen Interpretation diese Funktion ist.

3.) Eine aussagenlogische Funktion G heißt *universell*, wenn sich jede aussagenlogische Funktion als (wiederholte) Komposition von G unter Benutzung der Konstante 0 darstellen lässt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

nor	0	1
0	1	0
1	0	0

universell ist.

b) Sind die Funktionen “oder” und “und” universell? (Beweis!)

4.) Beweisen Sie aus den in der Vorlesung angegebenen Booleschen Axiomen:

a) Das Komplement $\neg A$ von A ist durch die Bedingung $\neg A \wedge A = F$, $\neg A \vee A = W$ eindeutig bestimmt, d.h.:

$$B \wedge A = F \text{ und } B \vee A = W \text{ impliziert } B = \neg A.$$

b) Die De Morganschen Gesetze:

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B).$$

Homepage der Vorlesung:
http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Vorlesung.html
Newsgroup: uni-bonn.math.logik