MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 06.06.2002

Einführung in die Mathematische Logik SS 2002

Übungsaufgaben, Folge 8, Abgabe: 20.06 nach der Vorlesung

Aufgabe 1
Für jede natürliche Zahl n sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ferner seien $r, s \in \mathbb{R}$. Wählen Sie in jeder der Teilaufgaben (a)-(f) eine geeignete Symbolmenge S, eine geeignete S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und einen S-Ausdruck φ, so daß $\mathfrak{I} \models \varphi$ gleichwertig ist mit der jeweils angegebenen Aussage.

(a) $\lim_{x\to r} f(x) = s$.

(b) f ist stetig an der Stelle r.

(c) f ist stetig.

(d) f ist gleichmäßig stetig.

(e) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f.

(f) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 2
Es sei $\mathfrak{I}_0 = (\mathfrak{A}_0, \beta_0)$ eine S_0-Interpretation und $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine S_1-Interpretation, beide über demselben Träger A. Ferner sei $S :\equiv S_0 \cap S_1$. Zeigen Sie:

(a) Es sei t ein S-Term. Wenn für alle $x \in \mathrm{var}(t)$ und für alle $\ell \in S$, die in t vorkommen, $\beta_0(x) = \beta_1(x)$ sowie $\ell^{\mathfrak{A}_0} = \ell^{\mathfrak{A}_1}$ gilt, dann gilt $\mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_1(t)$.

(b) Es sei φ ein S-Ausdruck. Wenn für alle $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$ und für alle $\ell \in S$, die in φ vorkommen, $\beta_0(x) = \beta_1(x)$ sowie $\ell^{\mathfrak{A}_0} = \ell^{\mathfrak{A}_1}$ gilt, dann gilt $\mathfrak{I}_0 \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ gilt.

(c) Gelten die Aussagen (a) und (b) auch dann noch, wenn $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ unterschiedliche Träger haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie das Substitutionslemma aus der Vorlesung. Untersuchen Sie dabei auch noch einmal detailliert den in der Vorlesung bereits behandelten Quantorenfall.

(b) Die Symbolmenge S besitze ein einstelliges Funktionssymbol g, ein zweistelliges Funktionssymbol f, ein zweistelliges Relationssymbol R, ein dreistelliges Relationssymbol P und ein Konstantensymbol c. Es sei φ der S-Ausdruck

$$(\exists v_0\, Rv_0fv_1v_2 \wedge \forall v_2\, Pv_0v_1v_2).$$

Bestimmen Sie die folgenden S-Ausdrücke.

(α) $\varphi\dfrac{c\ \ v_0\ \ gv_0}{v_0\ \ v_1\ \ v_2}$

(β) $\varphi\dfrac{fv_1v_2\ \ fv_1v_2\ \ c}{v_0\ \ v_1\ \ v_2}$

(γ) $\varphi\dfrac{v_2\ \ gv_0\ \ fv_0v_2\ \ c}{v_0\ \ v_1\ \ v_2\ \ v_3}$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist S eine Symbolmenge, φ ein S-Ausdruck und sind t_0 und t_1 S-Terme und x_0 sowie x_1 verschiedene Variablen, so sind $\left[\varphi \frac{t_0}{x_0}\right] \frac{t_1}{x_1}$ und $\varphi \frac{t_0\; t_1}{x_0\; x_1}$ logisch äquivalent.

Aufgabe 4

Formalisieren die folgenden Aussagen in einer geeigneten Sprache S, und verwenden Sie das in der Vorlesung eingeführte formale Beweiskalkül, um einen Zusammenhang zwischen „matupeln" und „Eine Mause haben" abzuleiten.

1. Wer bedrüpt ist, makst nicht.
2. Wer knaselt, hat eine Mause.
3. Jeder, der nicht deuken kann, makst.
4. Alle Drumser nehmen Pfuff.
5. Wer kein Pli ist, matupelt nicht.
6. Kein betuxter Klep kann deuken.
7. Wer Pfuff nimmt, ist bedrüpt.
8. Nur betuxte Kleps knaseln nicht.
9. Jeder Pli ist ein Drumser.