Seminar Mathematik & Informatik
A Glimpse beyond (Exp und mehr)
Infopapier

von Torsten Langer

January 26, 2002

1 Exponentialzeit

1.1 Definition:

- Exp $:= \bigcup_{k \in N} Time\left(2^{n^k}\right)$,
- NExp $:= \bigcup_{k \in N} NTime\left(2^{n^k}\right)$.

1.2 Satz: Falls $P = NP$, so gilt auch $Exp = NExp$.

1.4 Bemerkung:

- $2SAT \in P$.
- $SAT \in NPC$.
- $QSAT_i$ ist $\Sigma_i P - vollst\ddot{a}ndig$.
- $AGPL \notin R$, das heisst das Allgemeingültigkeitsproblem der Prädikatenlogik, welches wie folgt definiert wird, $\{(R_i)_{i \leq l}, (f_j)_{j \leq m}, (c_k)_{k \leq n}, \varphi \,|\varphi\, ist\, Formel\, in\, (R_i)_{i \leq l}, (f_j)_{j \leq m}, (c_k)_{k \leq n}\, und\, \vdash \varphi\}$ ist nicht entscheidbar.

1.5 Definition: Eine *Schönfinkel-Bernays-Formel* ist eine Aussage φ, in deren Alphabet nur Relationssymbole und Konstanten, aber keine Funktionssymbole, vorkommen, in der Form $\varphi \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \psi$, ψ quantorenfrei.
Schönfinkel-Bernays SAT ist die Frage nach der Erfüllbarkeit eines solchen Ausdrucks.

Bemerkungen:

1. Üblicherweise wird hier ausserdem noch verlangt, dass das Alphabet kein Gleichheitszeichen enthalten darf. Da ich allerdings keinen Grund für diese Voraussetzung finden konnte, diese aber den Beweis erschwert, verzichte ich hier auf diese Forderung.
2. Diese Definition ist natürlich rein syntaktischer Natur.

1.10 Satz: Schönfinkel-Bernays SAT ist $NExp{-}vollst\ddot{a}ndig$; insbesondere ist also $Sch\ddot{o}nfinkel{-}Bernays\, SAT \notin P$.

1.11 Bemerkung: Weiterhin ist für Sprachen ohne Funktionssymbole und ohne Gleichheitszeichen bekannt:

- Die Ackermann-Klasse: „$\exists^* \forall \exists^* \psi$" ist $Exp - vollst\ddot{a}ndig$.

- Die Gödel-Klasse „$\exists^*\forall\forall\exists^*\psi$" ist $NExp - vollständig$.

$()^*$ steht dabei für eine beliebig lange, endliche Folge, in der Mengenlehre üblicherweise mit $()^{<\omega}$ bezeichnet.

1.13 Übersicht: $P \subset NP \subset \ldots PH \subset Exp \subset NExp \subset R$.

2 Ein einheitlicher Ansatz für Komplexitätsklassen

(vgl. [2])

Wir betrachten jetzt nicht-deterministische, polynomiell-beschränkte Turingmaschinen. Diese sollen ohne Einschränkung so normiert sein, dass sie

1. in jedem Schritt in genau zwei Möglichkeiten verzweigen (vgl. „Cook's Theorem" im Referat von Martina Eckner),
2. nach genau $p(|x|)$ Schritten hält, wobei p polynomiell beschränkt sei (vgl. Begriff der „präzisen Maschine").

Damit produziert eine solche (festgehaltene) Maschine M bei (variabler) Eingabe x genau $2^{p(|x|)}$ mögliche Antworten JA oder NEIN als Blätter (, diese werden in der Mengenlehre „terminale Knoten" genannt,) des Berechnungsbaumes. Werden diese als 0 bzw. 1 interpretiert, können wir jedem x ein $M(x) \in (0,1)^{2^{p(|x|)}} \subset (0,1)^*$ zuordnen.

2.2 Definition: Seien $A, B \subset (0,1)^*$. Dann definiert C(A,B) := {L Sprache | ∃ NTM M: $(x \in L \Leftrightarrow M(x) \in A) \wedge (x \notin L \Leftrightarrow M(x) \in B)$} eine Komplexitätsklasse.

2.3 Satz: Wir können alle bisher kennengelernten Klassen so darstellen. In der folgenden Tabelle habe ich einige Beispiele aufgelistet. Dabei habe ich folgende Notation verwendet:

1. „#" bezeichnet Berechnungsäste, die in einem „weiss nicht" Zustand enden. Dieser regulär nicht vorhandene Zustand kann simuliert werden, indem man die Zustände „1" durch „11", „0" durch „00" und „#" durch „01" ersetzt.
2. „$\diamond$" ist das Verketten von Wörtern, wobei allerdings erkennbar bleibt, welche Buchstaben zu welchem Wort gehörten. Die genaue Definition für $x, y \in \Sigma^*$ist $x \diamond y := (x)_1(y)_0$, dabei ist $(x)_a := x_1 a x_2 a \ldots x_{|x|} a$ für beliebige $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

C(A,B)	A	B
P	1^*	0^*
NP	$\{0,1\}^*1\{0,1\}^*$	0^*
$coNP$	1^*	$\{0,1\}^*0\{0,1\}^*$
$NP \cap coNP$	$\{1,\#\}^*1\{1,\#\}^*$	$\{0,\#\}^*0\{0,\#\}^*$
$\Sigma_2 P$	$A_2 = \{z_1 \ldots z_n \,\lvert \forall i : \lvert z_i \rvert = n \wedge \exists i : z_i = 1^n\}$	$B_2 = \{z_1 \ldots z_n \,\lvert \forall i : \lvert z_i \rvert = n \wedge \forall i : z_i \neq 1^n\}$
$\Sigma_{k+1} P$	$A_{k+1} = \{z_1 \ldots z_n \,\lvert \forall i : \lvert z_i \rvert = n^k \wedge \exists i : z_i \in B_k\}$	$B_{k+1} = \{z_1 \ldots z_n \,\lvert \forall i : \lvert z_i \rvert = n^k \wedge \forall i : z_i \in A_k\}$
$PSpace$	$\{z \,\lvert z = k \diamond x \wedge x \in A_k\}$	$\{z \,\lvert z = k \diamond x \wedge x \in B_k\}$

References

[1] Christos H. Papadimitriou: Computational Complexity, Addison-Wesley, 1995.

[2] D. P. Bovet, P. Crescenzi, R. Silvestri: A uniform approach to define complexity classes, Theor. Comp. Sci. **104** (1992), pp. 263-283.