Seminar Mathematik & Informatik
Induktive Definierbarkeit

Ute Gantenberg

Wintersemester 2001/02

Definition 1 *Sei $\phi : \mathfrak{P}(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ eine Punktklassenoperation, welche Teilmengen von $\mathfrak{X}$ auf Teilmengen von $\mathfrak{X}$ abbildet. Die Operation heißt monoton, wenn gilt:*
$A \subseteq B \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$.
Für jede Ordinalzahl ξ definiere die ξ'te Iterierte ϕ^ξ von ϕ über eine transfinite Rekursion
$\phi^\xi = \phi(\cup_{\eta<\xi}\phi^\eta)$
$\phi^\infty = \cup_\xi \phi^\xi$ *nennen wir Fixpunkt von ϕ.*

Lemma 1 *Sei ϕ eine monotone Operation auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$.*
(i) Wenn $\zeta \leq \xi$, dann gilt $\phi^\zeta \subseteq \phi^\xi$.
(ii) Für eine Ordinalzahl κ mit $card(\kappa) \leq card(\mathfrak{X})$, $\phi^\infty = \phi^\kappa = \cup_{\xi<\kappa}\phi^\xi$.
(iii) Die Menge ϕ^∞ ist der kleinste Fixpunkt von ϕ, d.h. $\phi(\phi^\infty) = \phi^\infty$, und es hat die Darstellung $\phi^\infty = \cap\{A \subseteq \mathfrak{X} | \phi(A) \subseteq A\}$.

Beweis:(i) $\phi^\zeta = \phi(\cup_{\eta<\zeta}\phi^\eta)$ und $\phi^\xi = \phi(\cup_{\eta<\xi}\phi^\eta)$. Nun gilt $\cup_{\eta<\zeta}\phi^\eta \subseteq \cup_{\eta<\xi}\phi^\eta$. Da ϕ monoton ist gilt $\phi^\zeta = \phi(\cup_{\eta<\zeta}\phi^\eta) \subseteq \phi(\cup_{\eta<\xi}\phi^\eta) = \phi^\xi$.
(ii) und (iii) $card(\kappa) \leq card(\mathfrak{X})$
Behauptung: $\phi^\infty = \phi^\kappa = \cup_{\xi<\kappa}\phi^\kappa$
Es gilt: $\cup_{\eta<\xi}\phi^\eta \subset \phi^\xi \forall \xi < card(\mathfrak{X})^+$, wobei ξ Ordinalzahl ist. Dann können wir ein $x_\xi \in \phi^\xi \setminus \cup_{\eta<\xi}\phi^\eta$ für jedes ξ wählen. Die Menge $\{x_\xi | \xi < card(FrX)^+\} \subseteq \mathfrak{X}$. Diese Menge hat aber $card(\mathfrak{X})^+$, das ist aber nicht möglich, da es ein Untermenge von $\mathfrak{X}$ ist. Damit gilt $\forall \zeta \geq \kappa(\phi^\zeta = \phi^\kappa \to \phi^\infty = \phi^\kappa)$, dies bedeutet, dass ϕ^∞ ein Fixpunkt ist, denn $\phi(\phi^\infty) = \phi(\phi^\kappa) = \phi(\cup_{\xi<\kappa}\phi^\xi) = \phi^\kappa = \phi^\infty$. Da ϕ monoton ist, gilt $\phi(A) \subseteq A$ und $\phi^{\xi+1}(A) \subseteq \phi^\xi(A) \subseteq \phi(A) \subseteq A$. Falls nun $\phi^\kappa = \phi^\infty \Rightarrow \phi^\kappa \subseteq A \Rightarrow \phi^\infty \subseteq A$. Damit folgt $\phi^\infty = \cap A \subseteq \mathfrak{X} | \phi(A) \subseteq A$. qed

Definition 2 *Die Ordinalzahl κ heißt Abschluß-Ordinalzahl von ϕ, wenn $card(\kappa) \leq card(\mathfrak{X})$ und $\phi^\infty = \phi^\kappa$ gilt.*

Bermerkung 1 *κ gibt die Länge der Rekursion der Operation ϕ an.*

Definition 3 *(i) Sei $\varphi(x_1, ..., x_n, A_1, ..., A_k)$, wobei Punkte $x_1 \in \mathfrak{X}_1, ..., x_n \in \mathfrak{X}_n, ..., \mathfrak{X}_n und A_1 \subseteq \mathfrak{Y}_1, ..., A_k \subseteq \mathfrak{Y}_k$, eine Mengenrelation.*
Wir nennen φ monoton, wenn $\varphi(x_1, ..., x_n, A_1, ..., A_k) \wedge A_1 \subseteq B_1 \wedge ... \wedge A_k \subseteq B_k \Rightarrow \varphi(x_1, ..., x_n B_1, ..., B_k)$.
(ii) Eine Mengenoperation φ operiert auf einem Raum $\mathfrak{W}$, wenn diese monoton und von der Form $\varphi(w, x, A)$, wobei $w \in \mathfrak{W}$ und $A \subseteq \mathfrak{W}$.

Eine solche Relation kann man für jedes $x \in \mathfrak{X}$ schreiben mit Hilfe einer Mengenoperation auf einer Untermenge von $\mathfrak{W}$,
$\phi_x(A) = \{w|\varphi(w, x, A)\}$.
Die Mengenrelation kann man auch iterieren und man erhält:
$w \in \phi_x^\xi \Leftrightarrow \phi^\xi(w, x)$.
Jede Relation φ^ξ wird rekursiv definiert durch
$\varphi^\xi(w, x) \Leftrightarrow \varphi(w, x, \{w'|\exists\eta < \xi\varphi^\eta(w', x)\})$.
Setze $\varphi^{<\xi}(w, x) :\Leftrightarrow \exists\eta < \xi\varphi^\eta$.
Damit gilt $\varphi^\xi(w, x) \leftrightarrow \varphi(w, x, \{w'|\varphi^{<\xi}(w', x)\})$.
Damit setze: $\varphi^\infty(w, x) \Leftrightarrow \exists\xi\varphi^\xi(w, x)$. φ^∞ heißt Fixpunkt von φ. Die Abschluß-Ordinalzahl von φ ist das kleinste κ, so dass $\forall w \in \mathfrak{W}$,
$x \in \mathfrak{X}\varphi^\infty(w, x) \Leftrightarrow \varphi^\kappa(w, x) \Leftrightarrow \varphi^{<\kappa}(w, x)$.

Definition 4 *Für die kanonische Darstellung der Menge Π_1^1 sagen wir, dass R ist Π_1^1, wenn gilt $R \subseteq \mathfrak{X} : R(x) \Leftrightarrow \varphi^\infty(1, x)$, wobei φ^∞ der Fixpunkt der Mengenrelation ist.*
φ wurde definiert durch $\varphi(w, x, A) \Leftrightarrow Q(x, w) \vee \forall sA(w * \langle s\rangle)$, wobei Q eine Σ_1^0 Menge ist. Wenn die Menge $\mathfrak{X}$vom Typ 0 oder 1 ist, ist Q rekursiv.

Definition 5 *Sei Γ eine Collection von der monotonen Mengenrelationen und $R \subseteq \mathfrak{X}$. Nenne R Γ-Induktiv auf $\mathfrak{W}$, wenn es eine Mengenrelation $\varphi(w, x, A)$ in Γ gibt, welche auf $\mathfrak{W}$operiert und einen Punkt $w_0 \in \mathfrak{W}$, so dass $R(x) \Leftrightarrow \varphi^\infty(w_0, x)$. R heißt absolut Γ-induktiv auf $\mathfrak{W}$, wenn man ein rekursives w_0 wählen kann.*

Definition 6 *Eine Collection Γ von Mengenoperationen heißt Σ-Collection, wenn die folgenden Bedinungnen erfüllt sind:*
(i) Alle Relationen in Gamma sind monoton.
(ii) Für jeden Raum $\mathfrak{W}$, Γ besteht aus der Relation der Auswertung auf W:, d.h. $E_W(w, A) \Leftrightarrow A(w)(A \subseteq \mathfrak{W})$ ist monoton.
(iii) Γ besteht aus allen Σ_1^0-Punktmengen und ist abgeschlossen unter $\wedge, \vee, \exists^\leq, \forall^\leq, \exists^\omega$ und trivialer Substitution, d.h. es gibt eine Abbildung der Form $(x_1, ..., x_n, A_1, ..., A_k) \mapsto (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, A_{l_1}, ..., A_{l_k})$, wobei für jedes i, $1 \leq j_i \leq n$ und $1 \leq l_i \leq k$, so dass die Variablen permutiert, addiert oder identifiziert Variablen von jeder Sorte und bleibt in Γ.

Bermerkung 2 *Eine monotone Π-Collection wird analog definiert, d.h. Punkt (iii) wir folgendermaen formuliert:*
(iii) Gamma besteht aus allen Π_1^0-Punktmengen und ist abgeschlossen unter $\wedge, \vee, \exists^\leq, \forall^\leq, \forall^\omega$ und trivialer Substitution, d.h. es gibt eine Abbildung der Form $(x_1, ..., x_n, A_1, ..., A_k) \mapsto (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, A_{l_1}, ..., A_{l_k})$, wobei fr jedes i, $1 \leq j_i \leq n$ und $1 \leq l_i \leq k$, so dass die Variablen permutiert, addiert oder identifiziert Variablen von jeder Sorte und bleibt in Γ.

Definition 7 *Die Collection $pos\Sigma_1^0$ der positiven Σ_1^0 Mengenrelation ist die kleineste monotone Σ-Collection und $pos\Pi_1^0$ ist die kleinste monotone Π-Collection.*
Setze: $pos\Pi_2^0 = \forall^\omega pos\Sigma_1^0$
$pos\Sigma_2^0 = \exists^\omega pos\Pi_1^0$
und induktiv setze: $pos\Pi_{n+1}^0 = \forall^\omega\Sigma_n^0$
$pos\Sigma_{n+1}^0 = \exists^\omega\Pi_n^0$.
Nun definiert man noch $pos\Delta_n^0 = pos\Sigma_n^0 \cap pos\Pi_n^0$

Definition 8 *Die positiven analytischen Mengenrelationen werden definiert durch:*
$pos\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}}(\cup_n pos\Pi^0_n)$
$pos\Pi^1_1 = \exists^{\mathcal{N}}(\cup_n pos\Sigma^0_n)$
induktiv: $pos\Sigma^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}}(pos\Pi^1_n)$
$pos\Pi^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}}(pos\Sigma^1_n)$

Satz 1 *(i) Alle positiv analytischen Mengen sind monoton.*
(ii) Jede Π^1_1 Punktmenge R ist Δ^0_2-induktiv auf ω; R ist sogar positiv Π^0_1-induktiv auf ω, falls R vom Typ 0 oder 1 ist.
(iii) Wenn R positiv Π^0_1-induktiv auf ω ist, dann ist R Π^1_n.
(iv) Wenn R positiv Σ^1_n-induktiv auf ω und $n \leq 2$, dann ist R Σ^1_n.

Definition 9 *Die Punktmenge $R \subseteq \mathfrak{X}$ heißt induktiv, wenn es eine positive analytische induktiv auf $\mathcal{N}$, d.h. wenn es einen Mengenrelation $\varphi(\alpha, x, A)$, welche in einem $pos\Sigma^1_n$ ist und auf $\mathcal{N}$ operiert und bei einem festen $\alpha_0 \in \mathcal{N}$, so dass $R(x) \Leftrightarrow \varphi^\infty(\alpha_0, x)$.*
Die Punktklasse der induktiven Punktmengen bezeichnet man mit **IND**. *Wir nennen R hyperprojektiv, wenn R und $\neg R$ induktiv sind.*
Die Punktklasse der hyperprojektiven Punktmengen bezeichnet man mit **HYP**.
Wenn man α_0 rekursiv wählen kann, dann ist R absolut induktiv. Wenn beide R und $\neg R$ absolut induktiv sind, dann ist R absolut hyperprojektiv. Bezeichne diese beiden lightface Punktklassen mit IND bzw. HYP.

Satz 2 *Die Klasse IND von allen absolut induktiven Mengen ist die kleinste Spector-Punktklasse, die abgeschlossen ist unter $\forall^{\mathcal{N}}$und$\exists^{\mathcal{N}}$*
Diese steht mit der Klasse **IND**, *d.h. eine Menge $R \subseteq \mathfrak{X}$ ist unduktiv genau dann wenn es eine absolut induktives $R^* \subseteq \mathcal{N} \times \mathfrak{X}$ und für ein $\epsilon \in \mathcal{N}$, so dass $R = R^*_\epsilon = \{x | R^*(\epsilon, x)\}$.*

Satz 3 *Eine Punktmenge $R \subseteq \mathfrak{X}$ ist absolut induktiv genau dann, wenn es einen analytische Punktmenge P gibt, so dass*
$R(X) \Leftrightarrow \exists\alpha_0\forall\alpha_1\exists\alpha_2\forall\alpha_3...\exists n P(x, \langle\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}\rangle)$.