Das Suslin-Kleene-Theorem

Wie üblich sei $\mathcal{N} = \omega^\omega$ der Bairesche Raum. Wir nennen seine Elemente auch reelle Zahlen.

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bezeichnen stets Produkträume, d.h. $\mathfrak{X} = X_1 \times \ldots \times X_k$ mit Faktoren $X_i \in \{\omega, \mathbb{R}, \mathcal{N}, \mathcal{C}\}$ etc.

Für Produkträume, die als polnische Räume eine abzählbare Basis besitzen, sei $\{N^{\mathfrak{X}}(i) | i \in \omega\}$ eine rekursive Abzählung dieser Basis.

Mit rekursiv meinen wir im Folgenden immer $\mathbf{\Sigma}_1^0$-rekursiv, d.h. für eine Funktion $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, daß das dazugehörige Umgebungsdiagramm $G^f \subseteq \mathfrak{X} \times \omega$ definiert durch $G^f(x, i) :\Leftrightarrow f(x) \in N^{\mathfrak{Y}}(i)$ in Σ_1^0 liegt.

Statt der üblichen Kodierung von abzählbar vielen reellen Zahlen durch eine reelle Zahl (und umgekehrt), definiert durch $x_n(m) = x(\lceil n, m \rceil)$, benutzen wir hier eine $\mathbf{\Sigma}_1^0$-rekursive Funktion $\{\cdot\} : \mathcal{N} \times \omega \to \mathcal{N}$, die jetzt definiert wird.

Sei dazu $G^{\omega^2} \subseteq \mathcal{N} \times \omega^2$ die gute $\mathcal{N}$-universelle Menge für die $\mathbf{\Sigma}_1^0$-Teilmengen von ω^2. Wir definieren hieraus die partielle Funktion $U^{\omega^2} : \mathcal{N} \times \omega \to \mathfrak{X}$ durch $U(\epsilon, n) \downarrow :\Leftrightarrow U(\epsilon, n)$ ist definiert $:\Leftrightarrow \exists! x \in \mathfrak{X} \forall i \in \omega (x \in \mathcal{N}^{\mathfrak{X}}(i)) \leftrightarrow (\epsilon, n, i) \in G^{\omega^2})$ und setze $U(\epsilon, n) :=$ das x mit obiger Eigenschaft. Jetzt definieren wir $\{\epsilon\}(n) := U(\epsilon, n)$ und diese sind wie gewünscht in $\mathcal{N}$. Sei weiterhin $\epsilon^\star(i) := \epsilon(i+1)$ der Shift-Operator.

1 Definition: Definiere durch Rekursion über α die Mengen $\mathbf{BC}_\alpha$ der Borel-Codes für $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$-Mengen und ihre Dekodierung (in einem vorgegebenen Produktraum $\mathfrak{X}$) $\pi_\alpha^{\mathfrak{X}} : \mathbf{BC}_\alpha \to \mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \upharpoonright \mathfrak{X}$.

- Für $\alpha = 0$ sei
$$\mathbf{BC}_0 := \{\epsilon \in \mathcal{N} \mid \epsilon(0) = 0\},$$
- für $0 < \alpha < \aleph_1$ sei
$$\mathbf{BC}_\alpha := \{\epsilon \in \mathcal{N} \mid \epsilon(0) = 1 \wedge \forall i (\{\epsilon^\star\}(i) \downarrow \wedge \{\epsilon^\star\}(i) \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbf{BC}_\beta\}),$$
- für $\alpha = \aleph_1$ sei
$$\mathbf{BC} := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbf{BC}_\beta.$$

Die Dekodierung:

- Für $\alpha = 0$ sei $\pi_0^{\mathfrak{X}} : \mathbf{BC}_0 \to \mathbf{\Sigma}_0^0 \upharpoonright \mathfrak{X}$ mit
$$\pi_0^{\mathfrak{X}}(\epsilon) := N^{\mathfrak{X}}(\epsilon(1)).$$

- Für $0 < \alpha < \aleph_1$ sei $\pi^{\mathfrak{X}}_\alpha : \mathbf{BC}_\alpha \to \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \restriction \mathfrak{X}$ wobei

$$\epsilon \mapsto \bigcup_{i\in\omega}(\mathfrak{X} \setminus \pi^{\mathfrak{X}}_{\beta(i)}(\{\epsilon^\star\}(i)))$$

  und $\beta(i) := \min\{\beta | \{\epsilon^\star\}(i) \in \mathbf{BC}_\beta\}$,

- für $\alpha = \aleph_1$ sei $\pi^{\mathfrak{X}} := \bigcup_{\beta<\alpha} \pi^{\mathfrak{X}}_\beta$

2 Lemma:

1. Es gilt: $\beta \leq \alpha \Rightarrow \mathbf{BC}_\beta \subseteq \mathbf{BC}_\alpha$ und $\pi_\beta = \pi_\alpha \restriction \mathbf{BC}_\beta$. Damit ist $\pi^{\mathfrak{X}}$ wohldefiniert und es ist eine Dekodierung der Borelmengen in $\mathfrak{X}$ mit zugrundeliegender Menge von Borelcodes $\mathbf{BC}$.

2. Die Borelmengen von $\mathfrak{X}$ sind uniform abgeschlossen unter Komplementbildung, abzählbarer Vereinigung und abzählbarem Schnitt im folgenden Sinn:

   (a) Es gibt eine rekursive Funktion $\mathfrak{u}_1(\epsilon)$, so daß für einen Borelcode ϵ einer Menge $A \subseteq \mathfrak{X}$ die reelle Zahl $\mathfrak{u}_1(\epsilon)$ ein Borelcode von $\mathfrak{X} \setminus A$ ist.

   (b) Es gibt eine rekursive Funktion $\mathfrak{u}_2(\epsilon)$, so daß, wenn für jedes i gilt $\{\epsilon\}(i)$ ist definiert und $\{\epsilon\}(i)$ ist ein Borelcode einer Menge $A_i \subseteq \mathfrak{X}$, dann ist $\mathfrak{u}_2(\epsilon)$ ein Borelcode von $\bigcup_i A_i$.

   (c) Es gibt eine rekursive Funktion $\mathfrak{u}_3(\epsilon)$, so daß, wenn für jedes i gilt $\{\epsilon\}(i)$ ist definiert und $\{\epsilon\}(i)$ ist ein Borelcode einer Menge $A_i \subseteq \mathfrak{X}$ ist, dann ist $\mathfrak{u}_3(\epsilon)$ ein Borelcode von $\bigcap_i A_i$.

3. Wenn $P \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ in Σ^0_n oder Π^0_n liegt und $\mathfrak{X}$ vom Typ 0 oder 1 ist, (d.h. von der Form $\omega^k \times (\omega^\omega)^l$ ist,) dann gibt es eine rekursive Funktion $\mathfrak{u}_4 : \mathfrak{X} \to \mathcal{N}$, so daß für jedes x gilt: $\mathfrak{u}_4(x)$ ist ein Borelcode von $P_x = \{y | P(x, y)\}$.

3 Definition: Ein Baum T auf $\omega \times \omega$ ist eine Menge von Sequenzencodes $\lceil\lceil t_0, \xi_0\rceil, \ldots, \lceil t_{n-1}, \xi_{n-1}\rceil\rceil$ von endlichen Sequenzen von Paaren von natürlichen Zahlen, die abgeschlossen unter Anfangssegmenten ist.

Wir sagen, daß $\tau \in \mathcal{N}$ den Baum T kodiert, wenn gilt

$$\lceil\lceil t_0, \xi_0\rceil, \ldots, \lceil t_{n-1}, \xi_{n-1}\rceil\rceil \in T \Leftrightarrow \tau(\lceil\lceil t_0, \xi_0\rceil, \ldots, \lceil t_{n-1}, \xi_{n-1}\rceil\rceil) = 1.$$

Analog sagen wir für einen Baum J auf $\omega \times \omega \times \omega$, α kodiert J, wenn

$$\lceil\lceil t_0, \xi_0, \eta_0\rceil, \ldots, \lceil t_{n-1}, \xi_{n-1}\eta_{n-1}\rceil\rceil \in J \Leftrightarrow \alpha(\lceil\lceil t_0, \xi_0, \eta_0\rceil, \ldots, \lceil t_{n-1}, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}\rceil\rceil) = 1.$$

4 Definition: Für einen Baum T auf $\omega \times \omega$ ist die Projektion $\mathfrak{p}[T]$ eine Teilmenge von $\mathcal{N}$:

$$\mathfrak{p}[T] := \{\alpha | \exists f \in \omega^\omega \forall n (\ulcorner \ulcorner \alpha(0), f(0) \urcorner, \dots, \ulcorner \alpha(n-1), f(n-1) \urcorner \urcorner \in T)\}.$$

5 Satz: (Das starke Separationstheorem)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Angenommen, A und B sind disjunkte κ-Suslin Teilmengen eines perfekten Produktraumen $\mathfrak{X}$. Dann gibt es eine $(\kappa+1)$-Borelmenge C, die A von B separiert, d.h.

$$A \subseteq C \text{ und } C \cap B = \emptyset.$$

6 Satz: (Das effektive Separationstheorem (starke Version))
Es gibt eine rekursive Funktion $\mathfrak{u} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, so daß wenn τ bzw. σ Bäume T bzw. S kodieren mit $\mathfrak{p}[T] \cap \mathfrak{p}[S] = \emptyset$, dann ist $\mathfrak{u}(\tau, \sigma)$ ein Borelcode einer Menge C, die $\mathfrak{p}[T]$ von $\mathfrak{p}[S]$ separiert, d.h.

$$\mathfrak{p}[T] \subseteq C \text{ und } C \cap \mathfrak{p}[S] = \emptyset.$$

7 Definition: Eine Funktion $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ heißt Borel bzw. Borel-meßbar, wenn Urbilder von Borelmengen in $\mathfrak{Y}$ unter f Borelsch in $\mathfrak{X}$ sind.

Eine Funktion $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ heißt effektiv Borel (oder „Borel in der Kodierung“), wenn es eine rekursive Funktion $\nu : \omega \to \mathcal{N}$ gibt, so daß für jedes $i \in \omega$ die reelle Zahl $\nu(s)$ ein Borelcode der Menge $\pi^{-1}[N_i^{\mathfrak{Y}}]$ ist.

Fixiere eine $\mathcal{N}$-universelle Menge $G^{\mathfrak{X}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathfrak{X}$ für $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Teilmengen von $\mathfrak{X}$, die selbst Σ^1_1 (in $\mathcal{N} \times \mathfrak{X}$) ist und definiere: Ein $\epsilon \in \mathcal{N}$ ist $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Code für eine Menge $A \subseteq \mathfrak{X}$, wenn gilt: $A = G^{\mathfrak{X}}_\epsilon = \{x \in \mathfrak{X} | (\epsilon, x) \in G^{\mathfrak{X}}\}$.

Nenne ein $\epsilon \in \mathcal{N}$ einen $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-Code von $C \subseteq \mathfrak{X}$, wenn $\epsilon(\ulcorner 0, n \urcorner)$ ein $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Code für C ist und $\epsilon(\ulcorner 1, n \urcorner)$ ein $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Code für $(\mathfrak{X} \setminus C)$ ist.

8 Lemma:

1. Für jeden Produktraum $\mathfrak{X}$ gibt es eine effektive Borel- und Δ^1_1-rekursive Injektion

$$\pi_* : \mathfrak{X} \to \mathcal{N}.$$

2. Wenn $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ effektiv Borel ist, dann gibt es eine rekursive Funktion $\mathfrak{u} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, so daß für jeden Borelcode ϵ einer Menge $A \subseteq \mathfrak{Y}$ ein Borelcode von $\pi^{-1}[A]$ durch $\mathfrak{u}(\epsilon)$ gegeben ist.

9 Satz: (Das Suslin-Kleene-Theorem)
Für jeden Produktraum $\mathfrak{X}$ gibt es eine rekursive Funktion $\nu : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, so daß für $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Codes ϵ, ζ von Mengen $A, B \subseteq \mathfrak{X}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$\nu(\epsilon, \zeta)$ ist ein Borelcode einer Menge C, die A von B separiert.

Insbesondere gibt es für jedes $\mathfrak{X}$ eine rekursive Funktion $\nu^* : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, so daß wenn ϵ ein $\mathbf{\Delta}^1_1$-Code von $A \subseteq \mathfrak{X}$ ist, $\nu^*(\epsilon)$ ein Borelcode von A ist.