Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 9 Abgabetermin: 28. Juni 2001

Aufgabe 41 *(wiederholt von Blatt 8)*

Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß die Familie der mageren Mengen ein σ-Ideal bildet. (Vergleichen Sie Proposition (11.2).)

Aufgabe 42 *(wiederholt von Blatt 8)*

Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(1) Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) A ist nirgends dicht im Sinne von Definition (11.1), und
   (b) für alle offenen Mengen $P \subseteq X$ gilt, daß $A \cap P$ nicht dicht in P ist.

(2) Zeigen Sie, daß der Abschluß einer nirgends dichten Menge wieder nirgends dicht ist.

(3) Zeigen Sie, daß das Komplement einer nirgends dichten Menge dicht ist.

Aufgabe 43 *(wiederholt von Blatt 8)*

Zeigen Sie die Aussage von Proposition (11.6) "Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq \omega^\omega$, die nicht die Baire-Eigenschaft hat" durch einen direkten Beweis, d.h. ohne Verwendung von (7.12).

Idee: Siehe Blatt 8.

Aufgabe 44

Zeigen Sie, daß LO und die Menge A definiert durch

$$\langle x, y\rangle \in A \iff y \in \mathrm{LO} \text{ und } x \text{ ist eine absteigende Kette durch } y$$

Borelmengen sind. (Sie finden die Definitionen in (12.5).)

Aufgabe 45

Zeigen Sie, daß die Menge WT $\mathbf{\Pi}^1_1(2^\omega)$ ist. (Die Definition finden Sie in (12.10).)

Aufgabe 46

Sei $c : 2^\omega \to \mathfrak{P}(\omega^{<\omega})$ die Bijektion, die wir zum Kodieren von Bäumen verwenden. Sei π die Abbildung, die jedem x den Kode für den Baum T_x zuordnet, d.h.

$$c(\pi(x)) = T_x.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung π stetig ist.