Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 8 Abgabetermin: 21. Juni 2001

Aufgabe 39 (*wiederholt von Blatt 7*)

Seien I und J beliebige Indexmengen. Seien A und B Mengen mit $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ und $B = \bigcup_{j\in J} B_j$. Wir nehmen an, daß für alle $i \in I$ und $j \in J$ eine Menge C_{ij} existiert, die A_i und B_j separiert. Dann separiert $C := \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} C_{ij}$ A und B.

Aufgabe 40

Wir verwenden die Notation des Beweises von Theorem (10.11): Sei T ein Baum auf $\kappa \times \omega$ und sei eine Folge von Bäumen T_η wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T_0 &:= T, \\ T_{\xi+1} &:= \{s \in T_\xi \ ; \ p[T_\xi{\upharpoonleft} s] \text{ hat mehr als ein Element}\}, \\ T_\lambda &:= \bigcap_{\xi<\lambda} T_\xi. \end{aligned}$$

Es gibt ein kleinstes $\eta < \kappa^+$, so daß $T_\eta = T_{\eta+1}$. Nehmen Sie an, daß $T_\eta \neq \emptyset$ und zeigen Sie, daß $p[T_\eta]$ eine perfekte Teilmenge enthält.

Aufgabe 41

Sei $\langle X, \tau\rangle$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß die Familie der mageren Mengen ein σ-Ideal bildet. (Vergleichen Sie Proposition (12.2).)

Aufgabe 42

Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(1) Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
  (a) A ist nirgends dicht im Sinne von Definition (12.1), und
  (b) für alle offenen Mengen $P \subseteq X$ gilt, daß $A \cap P$ nicht dicht in P ist.

(2) Zeigen Sie, daß der Abschluß einer nirgends dichten Menge wieder nirgends dicht ist.

(3) Zeigen Sie, daß das Komplement einer nirgends dichten Menge dicht ist.

Aufgabe 43

Zeigen Sie die Aussage von Proposition (12.5) "Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq \omega^\omega$, die nicht die Baire-Eigenschaft hat" durch einen direkten Beweis, d.h. ohne Verwendung von (7.12).

Idee: Listen Sie die Menge

$$X := \{\langle P, M \rangle \ ; \ P \text{ offen}, M \text{ mager und } F_\sigma\}$$

durch Listen der Länge $\mathfrak{c}$ auf, und sorgen Sie in einer rekursiven Konstruktion von A (ähnlich dem Beweis von (7.12)) dafür, daß die konstruierte Menge A allen Instanzen der Definition der Baire-Eigenschaft widerspricht. Man muß sich hierzu überlegen, warum eine solche Liste existiert, und warum es ausreicht, gegen die mageren F_σ-Mengen zu diagonisieren und nicht gegen alle mageren Mengen (hierzu verwenden Sie Aufgabe 42 (2)).

[Einen ausführlicheren Hinweis finden Sie in Moschovakis' Buch auf Seite 110*sq.*]