Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 7 Abgabetermin: 15. Juni 2001 (Postfach "Rohde")

Aufgabe 32 *(Wiederholt von Blatt 6)*

Sei $\langle \xi, \tau_< \rangle$ eine Ordinalzahltopologie (d.h. eine Ordinalzahl mit der Ordnungstopologie) und $\alpha \in \xi$ mit

$$\alpha = \omega^{\alpha_n} k_n + \ldots + \omega^{\alpha_0} k_0$$

(wobei $\alpha_n > \ldots > \alpha_0$ und $0 < k_i < \omega$; der Satz über die Cantor-Normalform sagt, daß jede Ordinalzahl eine eindeutige solche Darstellung hat).

Dann gilt: $\mathrm{rank}_{\mathrm{CB}}(\alpha) = \alpha_0$.

Aufgabe 33 *(Wiederholt von Blatt 6)*

(1) Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ und $A, B \in \tau$. Dann sind $A \amalg B$ und X homöomorph.
(2) Seien $\langle X, \tau \rangle$ und $\langle Y, \tau^* \rangle$ polnische Räume. Dann ist auch $X \amalg Y$ ein polnischer Raum.

Aufgabe 34

Sei $\langle X, \tau$ ein polnischer Raum mit Metrik d. Sei $F \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge. Dann können wir eine Metrik auf $X \setminus F$ wie folgt definieren:

$$d^*(x, y) := d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|.$$

Zeigen Sie:

(1) d^* ist eine vollständige Metrik auf $X \setminus F$, und
(2) die von d^* erzeugte Topologie ist gleich der Subraumtopologie.

Aufgabe 35

Seien X und Y polnische Räume und $F \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $f : F \to Y$ eine stetige Funktion.

(1) Zeigen Sie, daß $f \subseteq X \times Y$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.
(2) Braucht man wirklich, daß X und Y polnisch sind? Welche Eigenschaften der topologischen Räume reichen aus um (1) zu beweisen?

Aufgabe 36

Gruppieren Sie die folgenden Ordinalzahlen nach Homöomorphietypen:

- $\omega^7 + 7$,
- $\omega^7 + \omega \cdot 7 + 7$,
- $\omega^7 + \omega^7$,
- $\omega^7 + \omega^7 + 7$,
- $\omega \cdot 7 + 7$,
- $\omega \cdot 7 + \omega^7 + 7$,
- $\omega^7 \cdot \omega^7 + 7$,
- $\omega^7 + \omega \cdot \omega^7 + 7$,
- $\omega^7 + \omega \cdot 7 + \omega \cdot 7 + \omega \cdot 7 + 7 + 7 + 7$,
- $\omega^7 + \omega \cdot 7 + 7 + \omega^7 + \omega \cdot 7 + 7$,
- 7,
- $\omega \cdot 7$,
- $\omega \cdot 7 + 7 + 7 + \omega^7$.

Aufgabe 37

(1) Zeigen Sie, daß die Punktklasse $\mathbf{\Sigma}^1_1$ eine Fettdruck-Punktklasse ist, d.h. abgeschlossen unter stetigen Urbildern ist.
(2) Zeigen Sie, daß die Punktklasse $\mathbf{\Sigma}^1_1$ unter Projektionen abgeschlossen ist.
(3) Sei $S = \langle S_s\ ;\ s \in \omega^{<\omega} \rangle$ eine Familie von Mengen. Wir definieren $\mathcal{A}(S) := \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} S_{x\restriction n}$. Wir sagen, eine Punktklasse Γ sei **unter der Operation $\mathcal{A}$ abgeschlossen**, falls für alle Familien $S = \langle S_s\ ;\ s \in \omega^{<\omega} \rangle$ mit $S_s \in \Gamma$ für alle $s \in \omega^{<\omega}$, die Menge $\mathcal{A}(S)$ immer noch in Γ ist.

Zeigen Sie, daß $\mathbf{\Sigma}^1_1$ unter der Operation $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 38

Wir verallgemeinern den Begriff κ-Suslin ein wenig: Eine Menge $A \subseteq (\omega^\omega)^n$ heisst **κ-Suslin** falls eine Menge X mit Mächtigkeit κ und ein Baum T auf $X \times \omega^n$ existiert, so daß $A = p([T])$. Zeigen Sie:

(1) Falls $A \subseteq (\omega^\omega)^{n+1}$ κ-Suslin ist, so ist auch $p(A) \subseteq (\omega^\omega)^n$ κ-Suslin.
(2) Falls $\langle A_\xi\ ;\ \xi < \kappa \rangle$ eine Familie von Mengen ist, von denen jede κ-Suslin ist, so ist auch $\bigcup_{\xi<\kappa}$ κ-Suslin.
(3) Die $\mathbf{\Sigma}^1_1(\omega^\omega)$-Mengen sind abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung.
(4) Jede κ-Suslin-Menge A erfüllt die folgende schwache Form der Kontinuumshypothese: Entweder ist die Kardinalität von A kleiner oder gleich κ, oder sie ist $\mathfrak{c}$.

Aufgabe 39

Seien I und J beliebige Indexmengen. Seien A und B Mengen mit $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ und $B = \bigcup_{j\in J} B_j$. Wir nehmen an, daß für alle $i \in I$ und $j \in J$ eine Menge C_{ij} existiert, die A_i und B_j separiert. Dann separiert $C := \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} C_{ij}$ A und B.