Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 6 Abgabetermin: 31. Mai 2001

Aufgabe 28

Beweisen Sie, daß die Anzahl der Borelmengen $\mathfrak{c}$ ist.

(Hinweis: Induktion nach α. Den Induktionsanfang bildet die Baumdarstellung der $\mathbf{\Pi}^0_1$-Mengen und die Berechnung der Mächtigkeit von PT.*)*

Aufgabe 29

In dieser Aufgabe arbeiten wir **nicht** in ZFC, sondern in $\mathsf{ZF}+\neg\mathsf{AC}$!

Nehmen Sie an, daß es eine Familie $\langle X_i\ ;\ i\in\omega\rangle$, so daß jede Menge X_i abzählbar ist und $\omega^\omega = \bigcup_{i\in\omega} X_i$. (Warum widerspricht das AC?) Zeigen Sie, daß dann jede Teilmenge $A\subseteq\omega^\omega$ eine F_σ-Menge ist.

Wie verhält sich dies mit der Konstruktion einer universellen G_δ-Menge? Warum ist dies kein Widerspruch?

Achtung: Diese Aufgabe ist leicht aber etwas subtil, weil eine korrekte Bearbeitung voraussetzt, daß man strikt ohne Verwendung des Auswahlaxioms arbeitet. Man sollte sich vorher sehr genau überlegen, welche Operationen ohne das Auswahlaxiom noch erlaubt sind. Z.B. kann man ohne AC nicht folgern, daß eine Familie $\langle x_{ij}\ ;\ i,j\in\omega\rangle$ gibt, so daß x_{ij} das i-te Element von X_j ist.

Aufgabe 30

Zeigen Sie die folgende äquivalente Umformulierung des Cantor-Bendixson-Ranges:

Seien X ein topologischer Raum, $x\in X$ und α eine Ordinalzahl. Äquivalent sind:

(1) $\mathrm{rank}_{\mathrm{CB}}(X)=\alpha$, und
(2) $x\notin \mathrm{CB}_{\alpha+1}(X)$ und es existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf R_α, der gegen x konvergiert.

Aufgabe 31

Folgen Sie Beispiel (9.7) und geben Sie Beispiele für Teilmengen von ω^ω an, die Cantor-Bendixson-Zahl ω, $\omega + 1$ und ω^2 haben.

Aufgabe 32

Sei $\langle \xi, \tau_< \rangle$ eine Ordinalzahltopologie (d.h. eine Ordinalzahl mit der Ordnungstopologie) und $\alpha \in \xi$ mit

$$\alpha = \omega^{\alpha_n} k_n + \ldots + \omega^{\alpha_0} k_0$$

(wobei $\alpha_n > \ldots > \alpha_0$ und $0 < k_i < \omega$; der Satz über die Cantor-Normalform sagt, daß jede Ordinalzahl eine eindeutige solche Darstellung hat).

Dann gilt: $\mathrm{rank}_{\mathrm{CB}}(\alpha) = \alpha_0$.

Aufgabe 33

(1) Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ und $A, B \in \tau$. Dann sind $A \amalg B$ und X homöomorph.
(2) Seien $\langle X, \tau \rangle$ und $\langle Y, \tau^* \rangle$ polnische Räume. Dann ist auch $X \amalg Y$ ein polnischer Raum.