Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 4 Abgabetermin: 17. Mai 2001

Aufgabe 17 *(Wiederholt von Übungsblatt 3)*

Die Cantormenge (wie definiert in (5.3)) besteht exakt aus denjenigen reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die einen Ternärbruch haben, dessen Entwicklung keine 1 enthält. (*Beachten Sie:* $\frac{1}{3} = \sum_{i\in\omega} 2 \cdot 3^{-(i+2)}$.)

Aufgabe 18

(1) Beweisen Sie: Wenn T ein Baum auf 2 ist, der (als Teilmenge von $2^{<\omega}$) unendlich viele Elemente besitzt, dann hat T für jede natürliche Zahl n ein Element der Länge n.
(2) Beweisen Sie: Wenn T ein Baum auf 2 ist, der unendlich viele Elemente besitzt, dann ist $[T] \neq \emptyset$. (Diese Aussage wird auch als **"Königs Lemma"** bezeichnet.)
(3) Was hat Königs Lemma mit der Tatsache zu tun, daß der Cantor-Raum kompakt ist?
(4) Geben Sie einen Baum T auf ω an, der für jede natürliche Zahl n ein Element der Länge n enthält, aber keinen unendlichen Ast hat.

Aufgabe 19

Betrachten Sie $(2^\omega)^2$ mit der Produkttopologie und zeigen Sie, daß $(2^\omega)^2$ und 2^ω homöomorph sind. Folgern Sie daraus, daß 2^ω und $[0,1]$ nicht homöomorph sein können.

Aufgabe 19

(1) Für $x, y \in 2^\omega$ sei
$$n(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ n & \text{falls } x \neq y \text{ und } n = \min\{k \ ; \ x{\restriction}k \neq y{\restriction}k\}. \end{cases}$$
Zeigen Sie, daß die Abbildung $d : 2^\omega \times 2^\omega \to [0,1]$, definiert durch
$$d(x,y) := \frac{1}{2^{n(x,y)}},$$
eine Metrik auf 2^ω ist, und daß die von dieser Metrik induzierte Topologie die Produkttopologie ist. (Vgl. (5.12))

(2) Definieren Sie die entsprechende Funktion für den Baire-Raum und prüfen Sie nach, daß diese dieselben Eigenschaften erfüllt, d.h. eine vollständige Metrik ist, die die Produkttopologie erzeugt.

Aufgabe 20

Wir nennen einen topologischen Raum **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie, daß sowohl der Cantorraum als auch der Baireraum separabel sind. (Vgl. (5.14))

Aufgabe 21

Wir verwenden die Notationen aus dem Beweis von (5.11), d.h. $C = C(S^{\text{Cantor}})$ ist die (in (5.3) definierte und in (5.8) durch ein Cantorsystem dargestellte) Cantormenge und $\pi : 2^\omega \to C(S^{\text{Cantor}})$ ist die in (5.10) definierte Bijektion, die jedes Element des Cantorraums auf das eindeutig bestimmte Element von C wirft, welches durch den Pfad durch das Cantorsystem bestimmt ist.

Vervollständigen Sie den Beweis von (5.11), indem Sie die folgenden Behauptungen zeigen:

(1) Zeigen Sie, daß die Menge $\{S_s^{\text{Cantor}} \ ; \ s \in 2^{<\omega}\}$ eine Basis der Subraumtopologie auf $C(S^{\text{Cantor}})$ ist.

(2) Zeigen Sie, daß für alle Folgen $s \in 2^{<\omega}$ gilt:
$$\pi[[s]] = S_s^{\text{Cantor}},$$
und damit auch (weil π eine Bijektion ist):
$$\pi^{-1}[S_s^{\text{Cantor}}] = [s].$$

(3) Folgern Sie aus (1) und (2), daß die Funktion π ein Homöomorphismus ist.