Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 3 Abgabetermin: 10. Mai 2001

Aufgabe 12 *(Wiederholt von Übungsblatt 2)*

Sei X mit der diskreten Topologie versehen, und sei $\mathcal{S}_{\text{Stone}} := \{O_A \; ; \; \emptyset \neq A \subseteq X\}$ die Basis des Stoneraums $\mathbb{O}(X)$ über X wie in Definition (3.6).

(1) Zeigen Sie, daß jede Menge dieser Basis sowohl offen als auch abgeschlossen ist. (Vgl. (3.7).)
(2) Zeigen Sie, daß einpunktige Mengen $\{\mathcal{F}\}$ abgeschlossen sin d.
(3) Zeigen Sie darüber hinaus, daß die speziellen einpunktigen Mengen $\{\mathcal{F}(\{\{x\}\})\}$, die einen Hauptultrafilter enthalten, sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
(4) Zeigen Sie, daß für alle $U \subseteq \mathbb{O}(X)$ gilt:

$$\mathrm{cl}(U) := \{\mathcal{F} \; ; \; \forall A \in \mathcal{F}(\exists \mathcal{F}^* \in U(A \in \mathcal{F}^*))\}.$$

(5) Betrachten Sie die stetige Funktion $j : X \to \mathbb{O}(X)$ aus (3.8) und (3.9) definiert durch

$$j : x \mapsto \mathcal{F}(\{\{x\}\})$$

und deren Bild $j[X]$ versehen mit der Subraumtopologie. Zeigen Sie, daß $j[X]$ und X homöomorph sind. [D.h., j bettet X dicht in $\mathbb{O}(X)$ ein.]

Aufgabe 13

Prüfen Sie nach, daß x genau dann ein Häufungspunkt der Folge $\langle x_i \; ; \; i \in \omega\rangle$ ist, wenn x ein Berührpunkt des von $\langle x_i \; ; \; i \in \omega\rangle$ erzeugten Filters ist. (Vgl. (4.2).)

Aufgabe 14

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$, $\mathcal{F}$ ein Filter auf A und $x \in X$. Zeigen Sie, daß x genau dann ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, wenn es einen Filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ auf A gibt, der gegen x konvergiert. (Vgl. (4.3).)

Aufgabe 15

Sei X ein Hausdorffscher Raum und $A \subseteq X$ mit der Subraumtopologie versehen. Zeigen Sie, daß A ebenfalls Hausdorffsch ist. (Vgl. (4.5).)

Aufgabe 16

Wir definieren einen neuen Begriff der Konvergenz: Sei X ein topologischer Raum und $\vec{x} := \langle x_\alpha \; ; \; \alpha < \omega_1 \rangle$ eine Folge der Länge ω_1. Wir sagen, daß $\vec{x}$ **gegen** x **konvergiert**, falls es für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $\beta < \omega_1$ gibt, so daß $\{x_\alpha \; ; \; \alpha > \beta\} \subseteq U$.

Sei nun $A \subseteq X$. Wir betrachten die Menge der ω_1**-Limiten von** A:

$$\mathrm{LP}_{\omega_1}(A) := \{x \in X \; ; \; \exists \vec{x} \subseteq A \, (\vec{x} \text{ konvergiert gegen } x) \, \}.$$

Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{LP}_{\omega_1}(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.

(2) Es gibt einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\mathrm{LP}_{\omega_1}(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$. (Tip: Verallgemeinern Sie den Beweis von (4.9) auf $X = \omega_2 + 1$.)

(3) Verallgemeinern Sie das Phänomen von (2) auf Folgen beliebiger fixierter Länge.

Aufgabe 17

Die Cantormenge (wie definiert in (5.2)) besteht exakt aus denjenigen reellen Zahlen zwischen 0 und 1, deren Ternärbruchentwicklung keine 1 enthält.