Uni Bonn
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 2 Abgabetermin: 3. Mai 2001

Aufgabe 7

(1) Sei α eine beliebige abzählbare Ordinalzahl mit der Ordnungstopologie. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B}(\tau_<)$ die diskrete σ-Algebra ist.
(2) Listen Sie alle Topologien und σ-Algebren auf der Menge $3 = \{0, 1, 2\}$ auf. Welche der Topologien ist die Ordnungstopologie? Welche der σ-Algebren ist die von der Ordnungstopologie erzeugte σ-Algebra?

Aufgabe 8

(1) Seien n und m natürliche Zahlen mit $n \neq m$. Zeigen Sie: Dann sind $\langle \omega \cdot n, \tau_< \rangle$ und $\langle \omega \cdot m, \tau_< \rangle$ nicht homöomorph.
(2) Zeigen Sie: Keiner der Räume $\langle \omega \cdot n, \tau_< \rangle$ ist homöomorph zu $\langle \omega^2, \tau_< \rangle$.

Aufgabe 9

Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\{A \cap O \ ; \ O \in \tau\}$$

die Subraumtopologie auf A ist.

Aufgabe 10

(1) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X. Zeigen Sie, daß

$$\mu_{\mathcal{U}} := \begin{cases} 0 & \text{if } A \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{if } A \in \mathcal{U} \end{cases}$$

ein zweiwertiges Maß auf der diskreten σ-Algebra auf X ist. (Vgl. (3.10)(a).)

(2) Sei μ ein zweiwertiges Maß auf der diskreten σ-Algebra auf X. Zeigen Sie, daß $\mathcal{U}_\mu := \{A \subseteq X \ ; \ \mu(A) = 1\}$ ein Ultrafilter auf X ist. (Vgl. (3.10)(b).)

(3) Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie: Die Menge der μ-Nullmengen bildet ein Ideal, welches unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. (Ein solches Ideal nennt man auch ein σ-Ideal.)

Aufgabe 11

Seien X und Y zwei Mengen, $\pi : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y und $\mathcal{I}$ ein Ideal auf Y. Man definiere:

$$A \in \pi^*\mathcal{F} \ :\leftrightarrow \ \pi[A] \in \mathcal{F}, \text{ und}$$

$$A \in \pi^*\mathcal{I} \ :\leftrightarrow \ \pi[A] \in \mathcal{I}.$$

(1) Zeigen Sie, daß $\pi^*\mathcal{F}$ ein Filter ist, wenn $\pi[X] \in \mathcal{F}$.

(2) Zeigen Sie, daß $\pi^*\mathcal{I}$ ein Ideal ist, wenn $\pi[X] \notin \mathcal{I}$.

(3) Nehmen Sie an, π sei surjektiv und $\mathcal{F}$ sei ein Ultrafilter. Zeigen Sie, daß dann auch $\pi^*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist.

Aufgabe 12

Sei X mit der diskreten Topologie versehen, und sei $\mathcal{S}_{\text{Stone}} := \{O_A \ ; \ \emptyset \neq A \subseteq X\}$ die Basis des Stoneraums $\mathrm{I\!O}(X)$ über X wie in Definition (3.6).

(1) Zeigen Sie, daß jede Menge dieser Basis sowohl offen als auch abgeschlossen ist. (Vgl. (3.7).)

(2) Zeigen Sie, daß einpunktige Mengen $\{\mathcal{F}\}$ abgeschlossen sind.

(3) Zeigen Sie darüber hinaus, daß die speziellen einpunktigen Mengen $\{\mathcal{F}(\{\{x\}\})\}$, die einen Hauptultrafilter enthalten, sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(4) Zeigen Sie, daß für alle $U \subseteq \mathrm{I\!O}(X)$ gilt:

$$\mathrm{cl}(U) := \{\mathcal{F} \ ; \ \forall A \in \mathcal{F}(\exists \mathcal{F}^* \in U(A \in \mathcal{F}^*))\}.$$

(5) Betrachten Sie die stetige Funktion $j : X \to \mathrm{I\!O}(X)$ aus (3.8) und (3.9) definiert durch

$$j : x \mapsto \mathcal{F}(\{\{x\}\})$$

und deren Bild $j[X]$ versehen mit der Subraumtopologie. Zeigen Sie, daß $j[X]$ und X homöomorph sind. [D.h., j bettet X dicht in $\mathrm{I\!O}(X)$ ein.]