Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 11 Abgabetermin: 12. Juli 2001

Aufgabe 52

Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n existiert eine berechenbare Bijektion $\beta_n : \omega^n \to \omega$.

Hinweis: Induktion, wobei (15.3) den Induktionsanfang bildet.

Aufgabe 53

Zeigen Sie: Es gibt eine berechenbare Bijektion $\beta : \omega^{<\omega} \to \omega$. (An dieser Stelle sollten Sie zunächst definieren, was das genau heißt.)

Aufgabe 54

Wir wollen eine Ordinalzahl α **berechenbar** nennen, wenn es einen Kode $w \in \mathrm{WO}$ mit $|w| = \alpha$ gibt, der berechenbar ist (als reelle Zahl).

Zeigen Sie:

(1) Es gibt nur abzählbar viele berechenbare Ordinalzahlen.
(2) Die Ordinalzahlen $\omega \cdot 2$, ω^2 und ω^ω sind berechenbar.
(3) Sei ω_1^{CK} die kleinste nicht berechenbare Ordinalzahl (diese Zahl wird "**omega-eins-Church-Kleene**" genannt). Zeigen Sie, daß ω_1^{CK} eine Limesordinalzahl ist.