Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 10 Abgabetermin: 5. Juli 2001

Aufgabe 47

Geben Sie eine Turingmaschine an, die exakt bei den geraden Inputs (also bei den Inputs $\langle \mathtt{00000}\ldots\rangle$, $\langle \mathtt{11000}\ldots\rangle$, $\langle \mathtt{11110}\ldots\rangle$, usw.) hält und sonst in eine Endlosschleife läuft.

Aufgabe 48

Seien x und y berechenbare reelle Zahlen, also Funktionen von ω nach ω. Zeigen Sie, daß dann auch die Zahl $x \circ y : n \mapsto x(y(n))$ berechenbar ist.

Aufgabe 49

Wir definieren eine etwas mächtigere Turingmaschinenarchitektur:

Sei S eine Zustandsmenge wie in (13.2). Wir wollen eine Funktion $p : S \times 2 \to S \times (2 \times \omega) \times 2$ ein **schnelles Programm** nennen. Wenn $p(q, b) = \langle q^*, \langle b_0, v\rangle, b_1\rangle$ ist, dann soll die zusätzliche Information n angeben, um wieviele Schritte die Maschine nach links (falls $b_0 = 0$) oder nach rechts (falls $b_0 = 1$) geht.

In der Beschreibung der Berechnungsfolge (vgl. (13.5)) verändert sich lediglich die Definition von h:

$$h(n+1) : \begin{cases} h(n) + v & b_0 = 1, \\ \max\{0, h(n) - v\} & b_0 = 0. \end{cases}$$

Wir wollen $\langle S, p\rangle$ eine **Schnellmaschine** nennen, falls S eine Zustandsmenge und p ein schnelles Programm ist. Eine reelle Zahl heiße **schnell berechenbar** falls eine Schnellmaschine existiert, die bei jedem Sequenzenstring der Dimension 1 hält und einen Sequenzenstring der Dimension 1 ausgibt.

Zeigen Sie, daß eine Zahl genau dann schnell berechenbar ist wenn sie berechenbar ist.

Aufgabe 50

Betrachten Sie das folgende "Schema der primitiven Rekursion":

Sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen. Wir sagen, $\mathcal{F}$ sei **abgeschlossen unter primitiver Rekursion** falls für je zwei Funktionen $g_0, g_1 \in \mathcal{F}$ auch die durch die folgenden Rekursionsgleichungen definierte Funktion f in $\mathcal{F}$ ist:

$$f(a, 0) := g_0(a),$$
$$f(a, b+1) := g_1(a, f(a, b)).$$

(1) Zeigen Sie, dass die Klasse der berechenbaren Funktionen unter primitiver Rekursion abgeschlossen ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $\langle n, m \rangle \mapsto n^m$ berechenbar ist.

(Bitte zeigen Sie dies nicht durch explizite Angabe der Turingmaschinen, sondern beschreiben Sie mit Wort und Bild, was die Turingmaschinen tun sollen.)

Aufgabe 51

Zeigen Sie: Jede partiell berechenbare Funktion $f : \omega^n \to \omega^m$ ist rekursiv aufzählbar als Teilmenge von ω^{n+m}.