Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 1 Abgabetermin: 26. April 2001

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß die Funktion $\ulcorner\cdot,\cdot\urcorner : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit

$$\ulcorner i,j\urcorner := \frac{i^2+j^2+2ij+i+3j}{2}$$

eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ ist (vgl. (0.2)).

Aufgabe 2

Sei λ eine beliebige Kardinalzahl. Zeigen Sie, daß jede Ordinalzahl $\alpha<\lambda^+$ durch eine Teilmenge von λ kodiert werden kann:

(1) Setzen Sie $A\in \mathrm{WO}_\lambda \;:\leftrightarrow\; A$ ist eine strikte Wohlordnung. Zeigen Sie, daß für alle $A\in\mathrm{WO}_\lambda$ ein eindeutig bestimmtes $\alpha<\lambda^+$ existiert, so daß $\langle\alpha,\in\rangle$ und $\langle\lambda,R_A\rangle$ isomorph sind.
(2) Für $\alpha<\lambda^+$ mit Bijektion $f:\lambda\to\alpha$ definieren Sie die Relation R_f auf λ in Analogie zu §0 der Vorlesung.
(3) Definieren Sie wie in §0 eine Abbildung von $\mathfrak{P}(\lambda)\to\lambda^+$, die Kodes in Ordinalzahlen übersetzt. Beweisen Sie, daß diese Abbildung surjektiv ist.

Aufgabe 3

Filter und Ideale sind dual – beweisen Sie:

(1) Wenn $\mathcal{F}$ ein Filter auf X ist, dann ist $\{A\subseteq X\,;\; X\setminus A\in\mathcal{F}\}$ ein Ideal.
(2) Wenn $\mathcal{I}$ ein Ideal auf X ist, dann ist $\{A\subseteq X\,;\; X\setminus A\in\mathcal{I}\}$ ein Filter.

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

(1) Eine Topologie auf X ist genau dann diskret, wenn jede einpunktige Menge offen ist.
(2) Eine σ-Algebra auf einer abzählbaren Menge X ist genau dann diskret, wenn jede einpunktige Menge meßbar ist.

Aufgabe 5

(1) Beweisen Sie: $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ ist eine σ-Algebra.
(2) Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Mengen, die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Beweisen Sie:

$$\tau(\mathcal{S}) = \{A \subseteq X \ ; \ \exists S \subseteq \mathcal{S} \, (A = \bigcup_{B \in S} B) \, \}.$$

(3) Sei τ die diskrete Topologie auf X. Dann ist $\mathfrak{B}(\tau)$ die diskrete σ-Algebra.
(4) Zeigen Sie, daß für jede Topologie τ gilt: $\tau = \mathfrak{B}(\tau)$ genau dann wenn jede τ-offene Menge auch τ-abgeschlossen ist.

Aufgabe 6

Seien τ die diskrete Topologie und τ^* die indiskrete Topologie auf X. Sei $\langle Y, \hat{\tau} \rangle$ ein beliebige topologischer Raum. Zeigen Sie:

(1) Jede beliebige Abbildung $\pi : \langle X, \tau \rangle \to \langle Y, \hat{\tau} \rangle$ ist stetig.
(2) Jede beliebige Abbildung $\pi : \langle Y, \hat{\tau} \rangle \to \langle X, \tau^* \rangle$ ist stetig.

Die Vorlesungshomepage ist

`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2001/Vorlesung.html`.

Hier können auch die Übungsblätter im PostScript- und DVI-Format gefunden werden. Nach Fertigstellung findet sich hier voraussichtlich auch ein Skript zur Vorlesung.

Die Vorlesungsnewsgroup ist

`uni-bonn.math.logik`.

Die Newsgroup ist für Diskussionen organisatorischer und inhaltlicher Art: Fragen zum Übungsbetrieb, sowie allgemeine Fragen zum Stoff der Vorlesung können hier gestellt, beantwortet und diskutiert werden. Außerdem können alle im weiteren oder engeren Sinne mit der Logik zusammenhängenden Diskussionen geführt werden.

Die **Übungsgruppe** findet am Montag 16 – 18 Uhr im Seminarraum **A** statt. Übungsgruppenleiter ist Philipp Rohde, seine Sprechstunde ist Donnerstags von 12:30 - 14:00 Uhr (Be4Zi25).

Das Kriterium für den Erhalt des Scheins ist die regelmässige Teilnahme an den Übungen und die Bearbeitung der Mehrzahl der Übungsaufgaben. Es gibt keine Punkte für die Aufgaben.

In der Bibliothek befindet sich ein Vorlesungsapparat, in dem einige wichtige Bücher und das Burghardt-Koepke-Skript bereitgestellt werden. Diese Bücher können nicht aus der Bibliothek ausgeliehen werden. An dieser Stelle wird auch nach Fertigstellung ein gedrucktes Exemplar des Vorlesungsskriptes für diese Vorlesung liegen.

Nützliche e-mail Adressen:

- `loewe@mat.uni-bonn.de` (B. Löwe)
- `rohde@mat.uni-bonn.de` (Ph. Rohde, Übungsgruppenleiter)
- `mveijmer@mat.uni-bonn.de` (M. van Eijmeren, zuständig für das Skript)
- `logic@mat.uni-bonn.de` (Allgemeine Logik-e-Mail)