Diplomarbeit

AD und Superkompaktheit

angefertigt am
Mathematischen Institut
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn

April 2002

von
Stefan Bold
aus
Mainz-Mombach

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Bonn, den 7. April 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Untersuchung der so genannten Großen Kardinalzahlen begann 1908, als Felix Hausdorff, durch seine Untersuchungen transfiniter Ordnungstypen motiviert, den Begriff der schwach unerreichbaren Kardinalzahl einführte [**Ha08**][1]. Diese Kardinalzahlen sind dadurch charakterisiert, daß sie unter Nachfolger-Kardinalzahlen abgeschlossen und regulär sind. Die Forderung nach stärkeren Abschlußeigenschaften, nämlich Abgeschlossenheit unter der Bildung von Potenzmengen, führte zum Begriff der (stark) unerreichbaren Kardinalzahl, eingeführt durch Wacław Sierpiński, Alfred Tarski [**SiTa30**] und Ernst Zermelo [**Ze30**].

Die Existenz dieser Großen Kardinalzahlen ist unter ZFC nicht beweisbar: Ist κ eine schwach unerreichbare Kardinalzahl, so ist $\mathbf{L}_\kappa$ ein Modell von ZFC[2], damit kann nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeits-Satz die Existenz einer solchen Kardinalzahl unter ZFC nicht bewiesen werden, wenn ZFC konsistent ist.

Schwach unerreichbare und unerreichbare Kardinalzahlen waren jedoch erst der Anfang einer, wie sich herausstellte, Hierarchie unterschiedlicher Großer Kardinalzahlen. (In [**Ka94**, S. 471] findet sich eine graphische Darstellung dieser Hierarchie.) Von Stanisław Ulam wurde der Begriff der meßbaren[3] Kardinalzahl geprägt (siehe [**Ul30**]), vermutlich der bekannteste Typ Großer Kardinalzahlen. Meßbare Kardinalzahlen stellten sich als wesentlich größer als die bis dahin bekannten Großen Kardinalzahlen heraus: Wenn eine meßbare Kardinalzahl existiert, so gilt $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ (siehe [**Sc61**]). Dieses Ergebnis wurde von Dana Scott mit Hilfe einer elementaren Einbettung bewiesen, nachdem die Methode entwickelt wurde, aus Ultrafiltern per Ultrapotenzen elementare Einbettungen zu bilden[4].

In Kapitel 1 wird der Begriff des Filter definiert, wir werden besonders Ultrafilter auf Kardinalzahlen und auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ untersuchen. Desweiteren werden wir elementare Einbettungen einführen und durch Ultrapotenzen und Extender einen Zusammenhang zwischen Ultrafiltern und elementaren Einbettungen herstellen.

Die in dieser Arbeit untersuchten superkompakten Kardinalzahlen sind in gewissem Sinne Erweiterungen der meßbaren Kardinalzahlen: Unter ZFC ist eine

[1] Die Bezeichnung (schwach) unerreichbar stammt von Kuratowski, Hausdorff selbst bezeichnete diese Kardinalzahlen als von „exorbitanter Größe“.

[2] Ein Ergebnis, das aus Kurt Gödels Untersuchungen der Eigenschaften des von ihm entwickelten Konstruktiblen Universums $\mathbf{L}$ folgt, siehe [**Gö39**]. Dabei bezeichnet $\mathbf{L}$ die Klasse der konstruierbaren Mengen, siehe dazu auch [**Ka94**, Kapitel 1, §3], oder [**Je97**, Kapitel 2, Abschnitt 12].

[3] Siehe Definition 1.1.10 in dieser Arbeit.

[4] Diese Methode wurde von Thoralf Skolem und Jerzy Łoś entwickelt, siehe [**ChKe90**, S. 211].

Kardinalzahl genau dann meßbar, wenn sie kritischer Punkt einer elementaren Einbettung ist. Sie ist superkompakt, wenn sie kritischer Punkt einer elementaren Einbettung ist, die starke zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Der Begriff der superkompakten Kardinalzahl wurde von Robert Solovay und William Reinhardt entwickelt[5]. Diese zeigten auch, daß unter ZFC eine Kardinalzahl genau dann superkompakt ist, wenn bestimmte Ultrafilter existieren. In Kapitel 3 werden die superkompakten Kardinalzahlen definiert, und der eben erwähnte Satz von Robert Solovay und William Reinhardt bewiesen.

1962 formulierten Jan Mycielski und Hugo Steinhaus das Axiom der Determiniertheit, AD. Dieses besagt, daß alle Teilmengen der reellen Zahlen determiniert sind, d.h. bei unendliche Spiele auf diesen Mengen kann durch einen der beiden Spieler ein Gewinn erzwungen werden. Das Axiom der Determiniertheit widerspricht dem Auswahlaxiom, führt aber zu weitreichenden Regularitäts-Eigenschaften der reellen Zahlen. Es hatte sich schon vorher herausgestellt, daß bestimmte Punktklassen der reellen Zahlen determiniert sind, so wie andererseits unter dem Axiom der Determiniertheit teilweise Auswahl möglich ist. Das Axiom der Determiniertheit wird in Kapitel 2 eingeführt, zusammen mit einigen seiner Folgerungen, besonders in Hinsicht auf Existenz und Eigenschaften von Ultrafiltern.

Bei der Untersuchung, wieviel Determiniertheit mit dem Auswahlaxiom vereinbar ist, wurden Zusammenhänge mit der Existenz Großer Kardinalzahlen unter ZFC entdeckt. Durch die Arbeit von Donald Martin und John Steel[6] wurde ein Zusammenhang zwischen Determiniertheit bestimmter Punktklassen unter ZFC und der Existenz sogenannter Woodin-Kardinalzahlen hergestellt, der es später Hugh Woodin ermöglichte, die genaue Konsistenzstärke von AD zu bestimmen. In Kapitel 4 wird unter Verwendung dieses Resultats von Woodin bewiesen, daß die Konsistenz von ZF + AD aus der Existenz einer superkompakten Kardinalzahl unter ZFC folgt.

Unter ZFC ist, wie anfangs bemerkt, die Existenz Großer Kardinalzahlen nicht beweisbar. Ohne Auswahl jedoch sind die Existenz eines κ-vollständigen freien Ultrafilters auf einer Kardinalzahl κ und die Existenz einer elementaren Einbettung mit kritischem Punkt κ nicht offensichtlich äquivalent. Ohne Auswahl folgt aus der Existenz eines κ-vollständigen Ultrafilters auf einer Kardinalzahl κ nicht die Unerreichbarkeit dieser Kardinalzahl. Betrachtet man nun die meßbaren und superkompakten Kardinalzahlen als per Existenz bestimmter Ultrafilter definiert, so stellt sich heraus, daß unter ZF + AD meßbare und sogar stärkere superkompakte Kardinalzahlen existieren. In Kapitel 2 beweisen wir, daß alle projektiven Ordinalzahlen unter ZF + AD meßbar sind.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird schließlich in Kapitel 5 gezeigt, daß unter AD Kardinalzahlen mit Superkompaktheitseigenschaften existieren . Wir zeigen, daß

[5] Siehe [**Ka94**, S. 298].

[6] In dem Artikel „A proof of projective determinacy“ [**MaSt89**].

jede projektive Ordinalzahl $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ $(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$-superkompakt ist. Unter AD ist sogar die Existenz von Kardinalzahlen κ beweisbar, die λ-superkompakt sind für $\lambda > \kappa^+$. Diesbezüglich werden am Ende des fünften Kapitels Resultate von Howard Becker und Steve Jackson vorgestellt, welche weitreichende Superkompaktheit für die projektiven Ordinalzahlen unter AD bewiesen haben.

Im letzten Kapitel wird die relative Konsistenz des Axioms „Es existiert eine superkompakte Kardinalzahl" unter den Basis-Systemen ZF und ZFC diskutiert. Es stellt sich heraus, daß die Systeme

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es existiert ein } \kappa\text{, das } \kappa^+\text{-superkompakt ist"}$$

und

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es existiert ein } \kappa\text{, das } \kappa^+\text{-superkompakt ist"}$$

nicht äquikonsistent sind.

Die Betrachtung der relativen Konsistenzen einiger Systeme zwischen ZFC + „Es gibt ein 2^κ-superkompaktes κ" und ZF + „Es gibt ein κ^+-superkompaktes κ" führt zu zwei weitere Fragen:

(1) Sind die Systeme

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es existiert ein } \kappa\text{, das } \kappa^+\text{-superkompakt ist"}$$

und

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es existiert ein } \kappa\text{, das } 2^\kappa\text{-superkompakt ist"}$$

äquikonsistent?

(2) Sind die Systeme

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es existiert ein } \kappa\text{, das } \kappa^+\text{-superkompakt ist"}$$

und

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es existiert eine Woodin-Kardinalzahl"}$$

äquikonsistent?

Mit den bisher bekannten Methoden können diese beiden Fragen jedoch anscheinend noch nicht beantwortet werden.

Kapitel 1

Allgemeine Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Aussagen eingeführt, die in späteren Kapiteln vorausgesetzt werden. Dabei arbeiten wir normalerweise im ZF-Kontext, eventuelle Ausnahmen sind explizit gekennzeichnet. Dadurch sind die hier angegebenen Begriffe und Resultate sowohl unter ZFC als auch unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ verwendbar. Bei allen Sätzen und Lemmas ist angegeben, welches Axiomensystem für den Beweis benötigt wird, dabei beschränken wir uns allerdings auf die Systeme ZF, ZFC und $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$. Sinn und Zweck dieses Kapitels ist die Einführung der wichtigsten mengentheoretischen Objekte und Notationen, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Eine komplette Behandlung aller Grundlagen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, als Einführung in die Mengenlehre und Modelltheorie eignen sich z.B. das Buch „Einführung in die mathematische Logik“ von Ebbinghaus, Flum und Thomas [**EFT96**], oder das Skript von Manfred Burghardt zur Vorlesungsreihe „Mengenlehre“ von Peter Koepke [**BuKo96**]. Das Buch „Set Theory“ von Thomas Jech [**Je97**] behandelt sehr ausführlich die mengentheoretischen Grundlagen, es ist als Nachschlagewerk sehr geeignet.

Bezüglich der Behandlung von Punktklassen im Allgemeinen als auch der in dieser Arbeit verwendeten projektiven Hierarchie sei auf das Buch „Descriptive Set Theory“ von Yiannis Moschovakis [**Mo80**] verwiesen. Dort wird sowohl die projektive ($\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$) als auch die analytische Hierarchie (Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n) eingeführt [**Mo80**, Abschnitt 1E bzw. 3E]. Zudem finden sich dort auch die Beweise zu den drei Periodizitäts-Theoremen und ihren Folgerungen, wie z.B. das in Abschnitt 2.3 erwähnte Uniformisierungs-Theorem, sowie ein Beweis des Coding Lemmas, das wir im Beweis von Satz 2.3.12 verwenden werden.

In „The Higher Infinite“ von Akihiro Kanamori [**Ka94**] findet man nicht nur eine Geschichte der Untersuchung Großer Kardinalzahlen, es ist auch als Nachschlagewerk zu diesem Themenbereich sehr nützlich und enthält eine gute Übersicht über die bis 1994 bekannten Resultate. Desweiteren wird dort auch die Levy-Hierarchie der Formeln (Σ_n, Π_n, usw.) eingeführt (siehe [**Ka94**, S. 5-8]), die in den Lemmas 3.2.2 und 3.2.3 Verwendung findet.

Als erstes führen wir den Begriff des Filters ein und definieren einige Filtereigenschaften, unter anderem führen wir die für uns essentiellen Ultrafilter ein. Danach beschäftigen wir uns mit elementaren Einbettungen und dem Zusammenhang zwischen elementaren Einbettungen und Ultrapotenzen, bzw. Extendern.

Hierbei werden die Resultate und Definitionen verwendet, die wir im Abschnitt über Filter erarbeitet haben. Wir erweitern den Bereich der von uns genauer untersuchten Filter auf Filter auf $\mathcal{P}_\lambda(\kappa)$ und übertragen, soweit möglich, unsere bisherigen Ergebnisse. Diese spezielle Art von Filtern werden wir später zur Definition superkompakter Kardinalzahlen benötigen.

1.1 Filter

Der Begriff des Filters stammt ursprünglich aus der Topologie, er wurde 1937 von Henri Cartan eingeführt (siehe [**Ca37**]). In diesem Abschnitt definieren wir Filter auf Mengen und führen grundlegende Eigenschaften ein, die Filter besitzen können. Dabei betrachten wir besonders Filter auf Kardinalzahlen. Schließlich untersuchen wir das Verhalten von Filtern unter Abbildungen, genauer gesagt das Urbild eines Filters unter einer Abbildung, und stellen fest, welche Filtereigenschaften bei einer solchen Transformation erhalten bleiben.

1.1.1 Definition: Sei $(P, \leq)$ eine schwache partielle Ordnung[1] auf einer Menge P und F eine nichtleere Teilmenge von P. Dann ist F ein *Filter*, falls gilt:

(1) F ist nach oben abgeschlossen, d.h. es gilt
$$\forall p, q \in P((p \in F \land p \leq q) \Rightarrow q \in F).$$

(2) Zu je zwei Elementen des Filters gibt es ein Filterelement, das unterhalb von beiden liegt, d.h. es gilt
$$\forall p, q \in F(\exists\, r \in F(r \leq p \land r \leq q)).$$

Dabei ist ein Filter ein *eigentlicher* Filter, falls $F \neq P$ gilt. Wir wollen unter einem Filter immer einen eigentlichen Filter verstehen.

Filter sind eine in der Mengenlehre häufig benutzte Konstruktion, in der obigen Form werden sie z.B. beim sogenannten Forcing benutzt. Dual zum Begriff des Filters ist der des Ideals, dies ist eine Teilmenge einer schwachen partiellen Ordnung, die nach unten abgeschlossen ist, und bei der zu je zwei Elementen ein oberhalb liegendes existiert. Zu den im Folgenden definierten Filtern und Filtereigenschaften gibt es meist Analogien für Ideale, wir werden jedoch nur mit Filtern arbeiten.

Die Inklusion $\subseteq$ bildet eine schwache partielle Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ einer Menge S. In dieser Arbeit werden wir nur Filter auf diesen schwachen partiellen Ordnungen betrachten. Dabei überträgt sich der Begriff des Filters auf einer schwachen partiellen Ordnung wie folgt zum Begriff eines Filters auf einer Menge:

[1] Eine schwache partielle Ordnung, manchmal auch partielle Präordnung genannt, ist eine reflexive und transitive Relation.

1.1.2 Definition: Sei S eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ der Potenzmenge von S ist ein *Filter auf der Menge* S, falls $\mathcal{F}$ ein eigentlicher Filter auf $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ist. Damit ist die Aussage „$\mathcal{F}$ ist ein Filter auf S" äquivalent zur Gültigkeit folgender Aussagen:

(1) Die leere Menge $\varnothing$ ist kein Element des Filters $\mathcal{F}$ (d.h. $\mathcal{F}$ ist eine eigentlicher Filter).

(2) $\mathcal{F}$ ist bezüglich Obermengen abgeschlossen, d.h. es gilt

$$\forall X, Y \subseteq S((X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y) \Rightarrow Y \in \mathcal{F})$$

(also gilt $S \in \mathcal{F}$).

(3) $\mathcal{F}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d.h. es gilt

$$\forall X, Y \in \mathcal{F}(X \cap Y \in \mathcal{F}).$$

Ein Filter, der zu jeder Teilmenge X von S entweder diese selbst, oder ihr Komplement $S \backslash X$ enthält, d.h. für den gilt

$$\forall X \subseteq S(X \in \mathcal{F} \vee S \backslash X \in \mathcal{F}),$$

heißt *Ultrafilter auf* S.

Filter, besonders Ultrafilter, messen die Größe von Teilmengen einer Menge, eine Menge ist in diesem Sinne groß, wenn sie im Filter liegt (siehe dazu auch Lemma 1.1.9).

Es existieren mehrere Methoden um Filter zu erzeugen, z.B. können geeignete Teilmengen der Potenzmenge einer Menge zu Filtern erweitert werden.

1.1.3 Definition: Sei S eine nichtleere Menge und $\mathcal{B}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von S, die nicht die leere Menge enthält. $\mathcal{B}$ ist eine *Filterbasis*, falls

$$\forall X, Y \in \mathcal{B}(\exists Z \in \mathcal{B}(Z \subseteq X \cap Y))$$

gilt. Der Abschluß von $\mathcal{B}$ unter Obermengen ist der *von* $\mathcal{B}$ *erzeugte Filter* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := \{Y \in \mathcal{P}(S) \mid \exists X \in \mathcal{B}(X \subseteq Y)\}.$$

Filter können verschiedene Eigenschaften haben, wir haben schon Ultrafilter als speziellen Filtertyp erwähnt. Weitere Eigenschaften von Filtern auf Mengen sind folgende:

1.1.4 Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge S.

(1) $\mathcal{F}$ ist ein *Hauptfilter*, wenn er von einer einzigen Teilmenge von S erzeugt wird, d.h. wenn $\exists X_0 \subseteq S(\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{X_0\}})$ gilt.

(2) $\mathcal{F}$ ist *frei*, wenn der Schnitt über $\mathcal{F}$ leer ist, d.h. wenn $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$ gilt.

(3) $\mathcal{F}$ ist *fixiert*, wenn $\mathcal{F}$ nicht frei ist.

Zwischen den bisher genannten Filtereigenschaften bestehen folgende Zusammenhänge:

1.1.5 Lemma: [ZF]

(1) Wenn ein Filter frei ist, so ist er kein Hauptfilter.
(2) Ein Ultrafilter ist genau dann frei, wenn er kein Hauptfilter ist.
(3) Also ist ein Ultrafilter genau dann fixiert, wenn er ein Hauptfilter ist.
(4) Ein fixierter Ultrafilter $\mathcal{U}$ wird von einem Element erzeugt, d.h. es gilt

$$\exists x \in S(\mathcal{U} = \mathcal{F}_{\{\{x\}\}}).$$

Beweis:

(1) Sei $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf S. Angenommen, $\mathcal{F}$ ist ein Hauptfilter, d.h. es gibt ein $X_0 \subseteq S$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{X_0\}}$. Dann gilt $X_0 \subseteq X$ für alle $X \in \mathcal{F}$, also $X_0 \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Der Filter ist also nicht frei, Widerspruch zur Annahme.
(2) Eine Richtung dieser Äquivalenz haben wir in (1) gezeigt. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf S, der kein Hauptfilter ist. Angenommen, $\mathcal{U}$ sei nicht frei, also $\bigcup \mathcal{U} = X_0 \neq \varnothing$. Wäre X_0 ein Element von $\mathcal{U}$, so wäre $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter. Also muß $S \backslash X_0 \in \mathcal{U}$ gelten, und damit $X_0 \subseteq \bigcup \mathcal{U} \subseteq S \backslash X_0$, Widerspruch.
(3) Klar nach (2).
(4) Nach (3) ist ein fixierter Ultrafilter $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter, also gilt

$$\exists X_0 \subseteq S(\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\{X_0\}}).$$

Angenommen, es gilt $|X_0| \geq 2$, sei $x_0 \in X_0$. Es gilt weder $X_0 \subseteq \{x_0\}$ noch $X_0 \subseteq S \backslash \{x_0\}$, also sind weder $\{x_0\}$ noch sein Komplement Elemente von $\mathcal{U}$, Widerspruch zur Ultrafiltereigenschaft. Also gilt $|X_0| = 1$, d.h. es existiert ein $x \in S$ mit $\mathcal{U} = \mathcal{F}_{\{\{x\}\}}$.

□

Wir haben für Filter nur gefordert, daß sie unter endlichen Schnitten abgeschlossen sind. Ein Filter kann natürlich auch unter Schnitten mit mehr Filterelementen abgeschlossen sein.

1.1.6 Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge S, κ eine Kardinalzahl. Der Filter $\mathcal{F}$ ist *κ-vollständig*, wenn der Schnitt von weniger als κ-vielen Filterelementen selbst wieder im Filter liegt, wenn also gilt:

$$\forall \gamma < \kappa(\forall \langle X_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle \in {}^\gamma\mathcal{F}(\bigcap_{\alpha \in \gamma} X_\alpha \in \mathcal{F})).$$

Also ist jeder Filter $\aleph_0$-vollständig, und Hauptfilter sind κ-vollständig für beliebiges κ. Ein freier Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer Kardinalzahl κ kann nicht κ^+-vollständig sein, da sonst nach Lemma 1.1.5(2)

$$\bigcup_{\alpha \in \kappa} (\kappa \backslash \{\alpha\}) = \varnothing \in \mathcal{U}$$

gelten würde, ein Widerspruch zu $\varnothing \notin \mathcal{U}$.

Für Ultrafilter existiert eine Umformulierung der Vollständigkeit, die sich nicht auf Schnitte, sondern auf Vereinigungen bezieht.

1.1.7 Lemma: [ZF] Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge S, κ eine Kardinalzahl. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann κ-vollständig, wenn es in jeder Vereinigung von weniger als κ vielen Teilmengen von S, die in $\mathcal{U}$ enthalten ist, eine Teilmenge von S gibt, die selbst schon in dem Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegt, d.h. genau dann, wenn gilt

$$(\star) \qquad \forall\gamma < \kappa(\forall\langle X_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle \in {}^\gamma\mathcal{P}(S)(\bigcup_{\alpha\in\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\nu \in \gamma(X_\nu \in \mathcal{U}))).$$

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf S und $\mathcal{X} := \langle X_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle$ eine Sequenz aus Teilmengen von S mit $\bigcup\mathcal{X} \in \mathcal{U}$, wobei γ kleiner als κ ist. Angenommen, für alle $\alpha \in \gamma$ gelte $X_\alpha \notin \mathcal{U}$, also $S\backslash X_\alpha \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, gilt damit

$$S\backslash\bigcup\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha\in\gamma}(S\backslash X_\alpha) \in \mathcal{U}.$$

Also würde $(S\backslash\bigcup\mathcal{X}) \cap \bigcup\mathcal{X} = \varnothing \in \mathcal{U}$ gelten, Widerspruch.

Sei andererseits $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf S, der $(\star)$ erfüllt, und

$$\mathcal{X} := \langle X_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle$$

eine Sequenz von Filterelementen mit $\gamma < \kappa$. Angenommen, $\mathcal{U}$ ist nicht κ-vollständig, dann gilt $\bigcup\mathcal{X} \notin \mathcal{U}$, also

$$\bigcup_{\alpha\in\gamma}(S\backslash X_\alpha) = S\backslash\bigcup\mathcal{X} \in \mathcal{U}.$$

Dann aber gibt es nach $(\star)$ ein $\alpha < \gamma$, so daß $S\backslash X_\alpha$ ein Element des Ultrafilters ist, ein Widerspruch zu Annahme $X_\alpha \in \mathcal{U}$. □

Für Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ existiert ein einfaches Kriterium für die κ-Vollständigkeit.

1.1.8 Lemma: [ZF] Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann κ-vollständig, wenn der Schnitt jeder Sequenz von Filterelementen mit Länge $\gamma < \kappa$ nicht leer ist, d.h. wenn gilt:

$$(\star) \qquad \forall\gamma < \kappa(\forall\langle A_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle \in {}^\gamma\mathcal{U}(\bigcap_{\alpha\in\gamma} A_\alpha \neq \varnothing)).$$

Beweis: Wenn $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter ist, so gilt $(\star)$, da in diesem Fall $\bigcap_{\alpha\in\gamma} A_\alpha$ ein Element des Ultrafilters $\mathcal{U}$, also nicht leer ist.

Gelte andererseits $(\star)$. Angenommen, es gibt ein $\gamma < \kappa$ und eine Sequenz $\langle B_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle$ von Filterelementen mit

$$B := \bigcap_{\alpha\in\gamma} B_\alpha \notin \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt dann $\kappa\backslash B \in \mathcal{U}$. Also gilt für alle $\alpha \in \gamma$

$$C_\alpha := B_\alpha \cap (\kappa\backslash B) \in \mathcal{U}.$$

$\langle C_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma \rangle$ ist also eine Sequenz von Filterelementen, aber es gilt

$$\bigcap_{\alpha\in\gamma} C_\alpha = (\bigcap_{\alpha\in\gamma} B_\alpha) \cap (\kappa \backslash B) = B \cap (\kappa\backslash B) = \varnothing.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme von $(\star)$, also muß $\bigcap_{\alpha\in\gamma} B_\alpha \in \mathcal{U}$ gelten. $\square$

Ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ beinhaltet alle Endsegmente von κ:

1.1.9 Lemma: [ZF] Sei κ eine Kardinalzahl, $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ. Dann gilt für alle $\alpha \in \kappa$

$$\{\beta \in \kappa \,|\, \beta > \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis: Da $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist, gilt nach Lemma 1.1.5 für alle $\beta \leq \alpha$, daß $\kappa\backslash\{\beta\}$ ein Element des Ultrafilters $\mathcal{U}$ ist. Aus der κ-Vollständigkeit folgt dann

$$\bigcap_{\beta\in\alpha} (\kappa\backslash\{\beta\}) = \{\beta \in \kappa \,|\, \beta \geq \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Es gilt aber auch $\kappa\backslash\{\alpha\} \in \mathcal{U}$, und damit

$$\kappa\backslash\{\alpha\} \cap \{\beta \in \kappa \,|\, \beta \geq \alpha\} = \{\beta \in \kappa \,|\, \beta > \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

$\square$

Durch einen κ-vollständigen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer Kardinalzahl κ ist ein κ-vollständiges zwei-wertiges Maß μ auf dieser Kardinalzahl definiert und umgekehrt ($\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$). Daher wird eine Kardinalzahl κ als meßbar bezeichnet, wenn es einen κ-vollständigen freien Ultrafilter auf κ gibt.

1.1.10 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl. Wenn es einen κ-vollständigen freien Ultrafilter auf κ gibt, so ist κ *meßbar*.

Meßbare Kardinalzahlen sind die mit am besten untersuchten Großen Kardinalzahlen. In [**Ka94**, Seite 22–27], findet sich eine kurze Einführung in die Entwicklung dieses Begriffs, unter anderem auch der Nachweis der Unerreichbarkeit einer meßbaren Kardinalzahl (unter Verwendung des Auswahlaxioms).

Wie nach Definition 1.1.6 angemerkt, kann ein freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ nicht κ^+-vollständig sein. Er kann aber unter dem *Diagonalschnitt* von κ-vielen Filterelementen abgeschlossen sein. Ein solcher Ultrafilter wird als *normal* bezeichnet.

1.1.11 Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Kardinalzahl κ. Der *Diagonalschnitt* $\triangle_{i\in\kappa} C_i$ einer Sequenz von Filterelementen $\langle C_i \,|\, i \in \kappa\rangle \in {}^\kappa\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\triangle_{i\in\kappa} C_i := \{\alpha \in \kappa \,|\, \alpha \in \bigcap_{i\in\alpha} C_i\}.$$

1.1.12 Definition: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf auf einer Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ist *normal*, wenn er κ-vollständig, frei und unter Diagonalschnitten abgeschlossen ist, d.h. falls gilt

$$\forall \langle C_i \,|\, i \in \kappa \rangle \in {}^{\kappa}\mathcal{U} (\triangle_{i \in \kappa} C_i \in \mathcal{U}).$$

Die Bedingung „κ-vollständig" in der Definition eines normalen Filters ist notwendig: Ohne diese Voraussetzung gibt es freie Filter, die normal, d.h. unter Diagonalschnitten abgeschlossen, sind, aber nicht κ-vollständig sind[2]. Das folgende Beispiel eines solchen Filters stammt aus einer Arbeit von Ute Schmid (siehe [**Schm99**, S. 15]).

Seien $\lambda < \kappa$ Kardinalzahlen, und $\mathcal{C}_\lambda$ der club-Filter auf λ[3]. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{X \subseteq \kappa \,|\, \exists Y \in \mathcal{C}_\lambda \,(Y \subseteq X)\}$$

ein Filter auf κ: Aus $\varnothing \notin \mathcal{C}_\lambda$ und $\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$ folgt $\varnothing \notin \mathcal{F}$ und $\lambda \subseteq \kappa \in \mathcal{F}$. Desweiteren ist $\mathcal{F}$ per Definition unter Obermengen abgeschlossen. Sind schließlich X_1 und X_2 Elemente von $\mathcal{F}$, so gibt es Elemente C_1 und C_2 von $\mathcal{C}_\lambda$ mit $C_1 \subseteq X_1$ und $C_2 \subseteq X_2$. Da $\mathcal{C}_\lambda$ ein Filter ist, gilt $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}_\lambda$, und damit $C_1 \cap C_2 \subseteq X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf κ.

Außerdem ist $\mathcal{F}$ frei: Da $\mathcal{C}_\lambda$ frei ist, existiert für jedes $\beta < \lambda$ ein Element C von $\mathcal{C}_\lambda \subseteq \mathcal{F}$ mit $\beta \notin C$. Für jedes $\beta \geq \lambda$ ist $\kappa \backslash \{\beta\}$ eine Obermenge von $\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$, d.h. ein Element von $\mathcal{F}$. Also gilt $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$.

Noch zu zeigen ist die Normalität. Sei $\langle X_\alpha \,|\, \alpha \in \kappa \rangle$ eine Sequenz von $\mathcal{F}$-Filterelementen. Für $\beta < \lambda$ definiere $C_\beta := X_\beta \cap \lambda$, dann ist $\langle C_\beta \,|\, \beta \in \lambda \rangle$ eine Sequenz von $\mathcal{C}_\lambda$-Filterelementen. Da $\mathcal{C}_\lambda$ normal ist, gilt $\triangle_{\beta < \lambda} C_\beta \in \mathcal{C}_\lambda$. Damit folgt aber $\triangle_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in \mathcal{F}$ aus

$$\triangle_{\beta < \lambda} C_\beta \subseteq \{\beta \in \lambda \,|\, \beta \in \bigcap_{\gamma \in \beta} X_\gamma\} \subseteq \triangle_{\alpha < \kappa} X_\alpha.$$

Also ist $\mathcal{F}$ ein normaler, freier Filter auf κ, der jedoch nicht κ-vollständig sein kann: Es gilt $\lambda \in \mathcal{F}$, und wir haben beim Beweis der Freiheit von $\mathcal{F}$ gezeigt, daß $\kappa \backslash \{\alpha\} \in \mathcal{F}$ für alle $\alpha \in \kappa$ gilt. Würde $\mathcal{F}$ κ-vollständig sein, so würde gelten

$$\lambda \cap (\bigcap_{\alpha \in \lambda} (\kappa \backslash \{\alpha\})) = \lambda \cap (\kappa \backslash \lambda) = \varnothing \in \mathcal{F},$$

ein Widerspruch, da $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

Normalität für Ultrafilter ist nicht nur über Abgeschlossenheit bezüglich Diagonalschnitten definierbar, ein Ultrafilter auf einer Kardinalzahl ist auch dann normal, wenn jede Funktion, die auf einem Filterelement *regressive* ist, auch auf einem Filterelement konstant ist.

---

[2] Für freie Filter auf einer Kardinalzahl κ, die alle Endsegmente enthalten, folgt die κ-Vollständigkeit allerdings aus der Abgeschlossenheit unter Diagonalschnitten (siehe [**Schm99**, S. 15, Satz 2.1.25]).

[3] Zum Begriff club-Filter siehe Definition 2.3.13.

1.1.13 Definition: Sei T Teilmenge einer Menge S und $f : T \to S$ eine Abbildung von dieser Teilmenge T nach S. F ist *regressiv*, falls gilt

$$\forall X \in T(f(X) \in X).$$

Regressive Funktionen heißen auch *Auswahlfunktionen*.

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf S. Eine Funktion $f : T \to S$ ist *fast überall regressiv* (bezüglich $\mathcal{U}$), falls gilt

$$\{X \in S \mid f(X) \in X\} \in \mathcal{U}.$$

Dementsprechend ist eine Funktion $f : T \to S$ *fast überall konstant*, falls gilt

$$\exists Y \in S(\{X \in S \mid f(X) = Y\} \in \mathcal{U}).$$

1.1.14 Lemma: [ZF] Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ. Der Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist genau dann normal, wenn jede Funktion, die fast überall regressiv ist, auch fast überall konstant ist, d.h. wenn gilt

$$(\star) \qquad \forall f \in {}^{\kappa}\kappa\, (\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in \alpha\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{U}(|f\text{''}C| = 1))\,.$$

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf κ und $f : \kappa \to \kappa$ eine Funktion mit

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Angenommen, für alle $i \in \kappa$ gilt

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = i\} \notin \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt also für alle $i \in \kappa$

$$X_i := \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \neq i\} \in \mathcal{U}.$$

$\langle X_i \mid i \in \kappa\rangle$ ist dann eine Sequenz von Filterelementen. $\mathcal{U}$ ist normal, also gilt:

$$\triangle_{i\in\kappa} X_i = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{i\in\alpha} \{\beta \in \kappa \mid f(\beta) \neq i\}\}$$

$$= \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \in \{\beta \in \kappa \mid f(\beta) \geq \alpha\}\} = \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \geq \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Dies aber widerspricht $\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in \alpha\} \in \mathcal{U}$, also ist die Annahme falsch, es muß also ein $i \in \kappa$ mit $\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = i\} \in \mathcal{U}$ geben.

Sei andererseits $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ und es gelte $(\star)$. Sei $\langle X_i \mid i \in \kappa\rangle$ eine Sequenz von Filterelementen. Angenommen, es gelte $\triangle_{i\in\kappa} X_i \notin \mathcal{U}$, damit also

$$X := \kappa \backslash \triangle_{i\in\kappa} X_i = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \notin \bigcap_{i\in\alpha} X_i\} = \{\alpha \in \kappa \mid \alpha \in \bigcup_{i\in\alpha} (\kappa \backslash X_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Wir definieren eine regressive Funktion f auf X durch

$$f(\alpha) := \min\{i \in \alpha \mid \alpha \in (\kappa \backslash X_i)\}.$$

Nach $(\star)$ gibt es dann ein $i < \kappa$ mit $\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = i\} \in \mathcal{U}$, also gilt

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = i\} \subseteq (\kappa \backslash X_i) \in \mathcal{U}.$$

Dies aber ist ein Widerspruch zur Annahme $X_i \in \mathcal{U}$. $\square$

Wir haben damit den Begriff Normalität nur für Ultrafilter auf Kardinalzahlen definiert. Später werden wir diesen Begriff erweitern und ihn auch für Ultrafilter auf bestimmten Teilmengen der Potenzmenge einer Kardinalzahl definieren.

Als nächstes führen wir den Begriff des Bildfilters ein. Er ermöglicht uns, mit Hilfe einer Abbildung aus einem Filter auf einer Menge einen neuen Filter auf einer anderen Menge zu konstruieren, wobei einige Filtereigenschaften bewahrt werden. Existiert z.B. ein Ultrafilter auf einer Menge A und eine Abbildung f von A in eine Menge B, so ist dadurch ein Ultrafilter auf der Menge B gegeben, nämlich der entsprechende Bildfilter.

1.1.15 Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge S und $f : S \to T$ eine Abbildung von S in eine beliebige andere Menge T. Die Menge der Teilmengen von T, deren Urbild im Filter $\mathcal{F}$ liegt, nennen wir *Bildfilter von $\mathcal{F}$ unter f*. Diesen Bildfilter bezeichnen wir mit $f_*(\mathcal{F})$.

$$f_*(\mathcal{F}) := \{X \subseteq T \mid f^{-1}{}``X \in \mathcal{F}\}$$

Noch haben wir nicht gezeigt, daß $f_*(\mathcal{F})$ überhaupt ein Filter ist, auch stellt sich die Frage, welche Eigenschaften von Filtern beim Bilden des Bildfilters erhalten bleiben.

1.1.16 Lemma: [ZF] Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge S und $f : S \to T$ eine Abbildung. Dann gilt:

(1) Der Bildfilter $f_*(\mathcal{F})$ ist ein Filter auf T.
(2) Wenn der Filter $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf S ist, so ist der Bildfilter $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf T.
(3) Wenn der Filter $\mathcal{F}$ κ-vollständig ist, so ist auch der Bildfilter $f_*(\mathcal{F})$ κ-vollständig.

Beweis:

(1) Es gilt $f^{-1}{}``\varnothing = \varnothing \notin \mathcal{F}$, also ist die leere Menge kein Element des Bildfilters. Sind $X, Y$ Elemente des Bildfilters, so folgt $X \cap Y \in f_*(\mathcal{F})$ aus $f^{-1}{}``(X \cap Y) = f^{-1}{}``X \cap f^{-1}{}``Y \in \mathcal{F}$. Und für $X \in f_*(\mathcal{F})$ und eine Obermenge Y von X folgt $Y \in f_*(\mathcal{F})$ aus $f^{-1}{}``X \subseteq f^{-1}{}``Y$ und der Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}$ unter Obermengen. $f_*(\mathcal{F})$ ist also ein Filter auf T.
(2) Sei X eine Teilmenge der Menge T. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt entweder $f^{-1}{}``X \in \mathcal{F}$ oder $S \backslash f^{-1}{}``X = f^{-1}{}``(T \backslash X) \in \mathcal{F}$, d.h. entweder $X \in f_*(\mathcal{F})$ oder $T \backslash X \in f_*(\mathcal{F})$. Also ist $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter, falls $\mathcal{F}$ einer ist.
(3) Sei $\gamma < \kappa$ und $\langle X_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle$ eine Sequenz von $f_*(\mathcal{F})$-Filterelementen. Nach Definition von $f_*(\mathcal{F})$ gilt $f^{-1}{}``X_\alpha \in \mathcal{F}$ für alle $\alpha \in \gamma$. Da $\mathcal{F}$ κ-vollständig ist, gilt demnach
$$f^{-1}{}``\bigcap_{\alpha \in \gamma} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \gamma} f^{-1}{}``X_\alpha \in \mathcal{F}.$$
Es gilt also $\bigcap_{\alpha \in \gamma} X_\alpha \in f_*(\mathcal{F})$, d.h. der Bildfilter $f_*(\mathcal{F})$ ist κ-vollständig.

□

Viele wichtige Eigenschaften von Filtern bleiben also beim Bilden eines Bildfilters erhalten. Jedoch muß der Bildfilter eines freien Filters nicht ebenfalls frei sein, genauso wie der Bildfilter eines Hauptfilters nicht immer ein Hauptfilter ist.

1.2 Einbettungen

Die meisten der Großen Kardinalzahlen werden auf eine der folgenden zwei Arten definiert: Entweder wird die Existenz von Ultrafiltern mit bestimmten Eigenschaften gefordert, oder es wird die Existenz einer Einbettung mit bestimmten Eigenschaften gefordert. Dabei sind unter AC meist beide Arten der Definition möglich und äquivalent. Nicht so unter AD. Aber dazu mehr in dem Kapitel über AD und den Kapiteln 3 und 4, in denen wir die superkompakten Kardinalzahlen betrachten.

An dieser Stelle stehen wir vor einem grundsätzlichen Problem. Wir möchten Einbettungen, d.h. Funktionen zwischen Klassen, definieren. In ZF bzw ZFC können wir aber nur Aussagen über Mengen formulieren. Um dennoch nicht nur in der Metatheorie über solche Klassen reden zu können, gibt es mehrere Methoden, wir stellen zwei davon vor.

Wir können in einem anderen axiomatischen System arbeiten. Es gibt Systeme, die den Klassenbegriff formalisieren, eine Beschreibung einiger dieser Theorien findet sich in [**Ku89**, §12], sowie in [**BuKo96**, Kapitel 20]. Von den dort genannten wäre das System NBG (Neumann-Bernays-Gödel), das auf John von Neumann, Paul Bernays und Kurt Gödel zurückgeht, für uns am geeignetsten. NBG beinhaltet die Möglichkeit, mit bestimmte Typen von Klassen zu arbeiten (nämlich den Klassen, die durch eine prädikative Formel definiert sind, d.h. eine Formel in der alle gebundenen Variablen Mengenvariablen sind). Alle in dieser Arbeit vorkommenden Klassen sind von diesem Typus. NBG ist eine konservative Erweiterung von ZF, d.h. in beiden Systemen lassen sich exakt dieselben Aussagen über Mengen beweisen. Wir können also in ZF mit (echten) Klassen arbeiten und als Berechtigung für diese Vorgehensweise auf das System NBG verweisen.

Eine weitere Methode, im ZF-Kontext mit Klassen umzugehen, verwendet die sogenannten *Klassenterme*. Dabei betrachten wir eine Klasse $\{x \mid \varphi(x, \vec{y})\}$ als Abkürzung für die Aussage:

$$z \in \{x \mid \varphi(x, y_1, \dots, y_n)\} \;:\Leftrightarrow\; \varphi[z, y_1, \dots, y_n].$$

Als Formeln sind wiederum nur prädikative Formeln zugelassen. Dann lassen sich Aussagen über Klassen zu Aussagen umformulieren, die in der Sprache der Mengenlehre liegen. Dieser Weg wird z.B. in dem Skript zur Vorlesungsreihe von Peter Koepke eingeschlagen. Das System NBG ist eine Formalisierung dieser Methode.

Zusammenfassend gesagt, können wir also in ZF durchaus mit Aussagen über Klassen arbeiten, solange diese Aussagen sich nur auf Elemente der Klassen, nicht aber auf Teilklassen beziehen. Zudem werden wir nur im ZFC-Kontext mit Klassen arbeiten, genauer gesagt mit den (noch zu definierenden) elementaren Einbettungen. Für die in diesem Zusammenhang auftretenden Aussagen über Existenz bestimmter Einbettungen werden wir jedoch beweisen, daß sie zu Aussagen über Existenz bestimmter Filter (Ultrafilter und Extender) äquivalent sind. Indem wir also mit diesen Formulierungen arbeiten, können wir ohne Aussagen über Klassen auskommen. Allerdings motiviert sich z.B. der Begriff der Superkompaktheit aus Überlegungen über bestimmte Einbettungen, und im Beweis von Satz 4.3 kommen wir nicht ohne elementare Einbettungen aus.

Erst einmal müssen wir also nun den Begriff der elementaren Einbettung einführen. Dazu benötigen wir einige Definitionen aus der Modelltheorie[4].

1.2.1 Definition: Sei M eine transitive Klasse. Wenn M ein $\in$-Modell von ZF ist und außerdem $\mathrm{On} \subseteq M$ gilt, so heißt M *inneres Model.*

1.2.2 Definition: Sei $j : M \to N$ eine injektive Abbildung zwischen zwei Strukturen M und N. Wenn für jede Formel $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ und alle $x_1, \cdots, x_n$ aus M genau dann M ein Modell von $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ ist, wenn N ein Modell von $\varphi(j(x_1), \cdots, j(x_n))$ ist, so heißt j *elementare Einbettung von M nach N* und wird durch $j : M \prec N$ dargestellt. Wenn der Bereich der Formeln φ in der obigen Definition auf Σ_n-Formeln eingeschränkt wurde, so schreiben wir $j : M \prec_n N$, dies ist dann eine *Σ_n-elementare Abbildung von M nach N.*

Sind M und N echte Klassen, so läßt sich $j : M \prec N$ im allgemeinen nicht in ZF formalisieren. Sind M und N jedoch innere Modelle, so können wir in einer Sprache mit einem zusätzlichen Konstantensymbol j, das für die elementare Einbettung steht, eine äquivalente ZF-Formalisierung angeben:

1.2.3 Satz: [ZF] Sei $j : M \prec_1 N$ eine Σ_1-elementare Abbildung zwischen zwei inneren Modellen M und N. Dann gilt:

(1) Für alle Ordinalzahlen α ist $j(\alpha)$ eine Ordinalzahl und es gilt $j(\alpha) \geq \alpha$.

(2) Wenn j nicht die Identität ist, und entweder N eine Teilklasse von M oder M ein Modell von AC ist, so gibt es eine Ordinalzahl, die nach oben abgebildet wird, d.h. ein $\kappa \in \mathrm{On}$ mit $j(\kappa) > \kappa$. Das Minimum der κ mit $j(\kappa) > \kappa$ heißt *kritischer Punkt von j,* $\mathrm{crit}(j) = \kappa$.

(3) j ist eine Σ_n-elementare Abbildung, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Siehe [**Ka94**, Seite 45, Proposition 5.1].

Für jede Anwendung und jeden Beweis wird nur eine endliche Anzahl von Formeln benötigt, d.h. es existiert ein n, so daß alle benötigten Formeln aus

[4] Als Einführung in die Modelltheorie und zur Erklärung hier nicht definierter Begriffe sei auf [**EFT96**] verwiesen. Der Struktur-Begriff wird in Kapitel 3 §1 eingeführt, die Modellbeziehung in Kapitel 3, §3.

Σ_n sind. Dadurch können wir also unter einer elementaren Einbettung zwischen inneren Modellen eine Σ_1-elementare Einbettung verstehen. (Ein ähnliches Argument wird verwendet, um bei der Technik des Forcing ein Grundmodell, d.h. ein Mengen-Modell von ZFC, zu definieren.) Da der semantische Σ_1-Folgerungsbegriff in ZF formalisierbar ist[5], können wir so auch der Begriff der elementaren Einbettung in ZF in einer Sprache mit zusätzlichem Symbol j für die elementare Einbettung formalisieren, d.h. auch elementare Abbildungen in Formeln verwenden. (Ein Problem tritt natürlich auf, wenn wir über elementare Abbildungen quantifizieren, z.B. $\exists j : M \prec N$, siehe dazu Kapitel 3.2.)

1.3 Ultrapotenzen

Wir hatten schon angemerkt, daß man aus Ultrafiltern elementare Einbettungen gewinnen kann und umgekehrt. Dabei ist die Richtung von den Ultrafiltern zu den Einbettungen nur unter Verwendung des Auswahlaxioms möglich. Eine Methode, um aus bestimmten Ultrafiltern elementare Einbettungen zu konstruieren, verwendet die sogenannte *Ultrapotenzen.*

1.3.1 Definition: Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge S und M ein $\in$-Modell (d.h. im Allgemeinen eine echte Klasse). Auf ${}^S M$, der Klasse aller Funktionen von S nach M, definieren wir nun eine Äquivalenzrelation $=^*$ und eine Relation $\in^*$. Seien f und g Elemente von ${}^S M$, wir definieren:

$$\begin{aligned} f =^* g \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x \in S \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}, \\ f \in^* g \quad &:\Leftrightarrow \quad \{x \in S \mid f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse[6] $[f]^*$ eines $f \in {}^S M$ ist dann meist eine echte Klasse. Um trotzdem mit diesen Äquivalenzklassen arbeiten zu können, benutzen wir nur eine Teilmenge von $[f]^*$ und arbeiten mit dieser, anstatt mit der vollen Klasse:

$$[f]^* := \{g \mid f =^* g \wedge \forall h (h =^* f \Rightarrow \mathrm{rank}(h) \geq \mathrm{rank}(g))\}.$$

Diese Methode wird auch als Scotts Trick bezeichnet.

Die Klasse aller solcher Äquivalenzklasssen

$$\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M) := \{[f]^* \mid f \in {}^S M\}$$

ist dann ein $\in^*$-Modell, wir bezeichnen $\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M)$ als *Ultrapotenz von M*. Statt $\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(\mathbf{V})$ schreibt man auch $\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}$, oder einfach Ult^*, wenn $\mathcal{U}$ aus dem Zusammenhang klar ist.

[5] Siehe [**Ka94**, S. 6].

[6] Die Äquivalenzklasse $[f]^*$ von f bezüglich $=^*$ ist die Klasse $\{g \mid g =^* f\}$.

Der Satz von Łoś stellt einen Zusammenhang zwischen den Elementen eines Ultrafilters und der Wahrheit von Formeln in der entsprechenden Ultrapotenz her. Der Beweis dieses Satzes benötigt jedoch das Auswahlaxiom, so daß er uns im AD-Kontext nicht zur Verfügung steht.

1.3.2 Satz (Satz von Łoś)**:** [ZFC] Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge S und M eine $\in$-Modell. Dann gilt für jede Formel $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ folgende Äquivalenz:

$$\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M) \models \varphi([f_1], \cdots, [f_n]) \quad \Leftrightarrow \quad \{x \in S \mid \varphi(f_1(x), \cdots, f_n(x))\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis: Siehe [**Ło55**].

In dieser Arbeit haben wir es meist mit Ultrafiltern zu tun, die $\aleph_1$-vollständig sind. Die Ultrapotenzen, die aus einem solchen Ultrafilter konstruiert werden können, sind dann stark fundiert[7].

1.3.3 Lemma: [ZFC] Ist $\mathcal{U}$ ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter, so ist $(\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}, \in^*)$ ein stark fundiertes $\in^*$-Modell.

Beweis: Siehe [**Ka94**, Seite 48, Proposition 5.3].

Wenn die Ultrapotenz $\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M)$ ein stark fundiertes Modell ist, so existiert der zugehörige Mostowski-Isomorphismus[8], d.h. es gibt einen Isomorphismus

$$\pi : \mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M) \leftrightarrow T$$

in eine transitive Klasse T, den Mostowski-Kollaps von $\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M)$[9]. Da π ein Isomorphismus ist, gilt $f \in^* g$ genau dann, wenn $\pi(f) \in \pi(g)$ gilt. Wenn ein solcher Mostowski-Kollaps von $(\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}(M), \in^*)$ existiert, so bezeichnen wir ihn mit $(\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(M), \in)$. Die Elemente von $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(M)$ sind dann von der Form $\pi"[f]^*$, wir bezeichnen sie mit $[f]$. Statt mit der eigentlichen Ultrapotenz kann man also mit dem Kollaps der Ultrapotenz arbeiten, da die beiden isomorph sind. Daher wollen wir im Folgenden unter einer Ultrapotenz eben diesen Kollaps verstehen, wenn dieser definiert ist, d.h. wenn die Ultrapotenz stark fundiert ist.

Mit dem Satz von Łoś kann nun gezeigt werden, daß es eine elementare Einbettung zwischen dem Model M und der Ultrapotenz $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(M)$ gibt. Desweiteren werden durch bestimmte Eigenschaften des Ultrafilters Eigenschaften der elementaren Abbildung induziert.

1.3.4 Lemma: [ZFC] Ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und M ein $\in$-Modell, so wird durch $j_{\mathcal{U}}(a) := [c_a]$ eine elementare Einbettung $j_{\mathcal{U}} : M \prec \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(M)$ definiert[10]. Ist $\mathcal{U}$ $\aleph_1$-vollständig, so ist $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$ also ein inneres Modell.

[7]Eine Relation R auf einer Klasse M ist *fundiert*, wenn jede nichtleere Menge $X \subseteq M$ ein R-minimales Element besitzt. R ist *stark fundiert*, wenn zusätzlich für jedes $x \in M$ die Klasse aller R-Vorgänger eine Menge ist.

[8]Siehe [**Je97**, Kapitel 11, Theorem 28].

[9]Um den Satz von Mostowski anwenden zu können, muß man noch zeigen, daß $(\mathrm{Ult}^*_{\mathcal{U}}, \in^*)$ extensional ist, siehe auch [**Ka94**, Seite 7]. Dies folgt jedoch aus dem Satz von Łoś.

[10]Hierbei bezeichne c_a die konstante Funktion mit Wert a.

Beweis: Sei φ eine Formel. Es gilt

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \{x \in S \mid \varphi(x_1, \dots, x_n)\} = S \Leftrightarrow \{x \in S \mid \varphi([c_{x_1}], \dots, [c_{x_n}])\} \in \mathcal{U}$$

Dies ist nach dem Satz von Łoś äquivalent zu $M \models \varphi([c_{x_1}], \dots, [c_{x_n}])$, damit ist $j_{\mathcal{U}} : M \prec \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}(M)$ eine elementare Einbettung. □

1.3.5 Lemma: [ZFC] Ist $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf einer Menge S, so gilt

$$\forall \alpha < \kappa (j_{\mathcal{U}}(\alpha) = \alpha).$$

Beweis: Angenommen nicht, sei

$$\alpha_0 := \min\{\alpha < \kappa \mid \alpha < j_{\mathcal{U}}(\alpha)\}$$

ein minimales Gegenbeispiel. Da $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$ ein inneres Modell ist gilt $\alpha_0 \in \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$. Also gibt es ein $f \in {}^S\, \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$ mit $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \models [f] = \alpha_0$. Aus der Voraussetzung folgt also

$$\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \models [f] < j_{\mathcal{U}}(\alpha_0),$$

wobei $j_{\mathcal{U}}(\alpha_0) = [c_{\alpha_0}]$ gilt. Aus dem Satz von Łoś folgt damit

$$\{x \in S \mid f(x) < \alpha_0\} \in \mathcal{U}.$$

Es gilt

$$\{x \in S \mid f(x) < \alpha_0\} = \bigcup_{\beta < \alpha_0} \{x \in S \mid f(x) = \beta\}.$$

Da $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, existiert nach Lemma 1.1.7 also ein $\beta < \alpha_0$ mit

$$\{x \in S \mid f(x) = \beta\} \in \mathcal{U}.$$

Nach den Satz von Łoś gilt deshalb $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \models \alpha_0 = \beta$, Widerspruch zu $\beta < \alpha_0$. □

1.3.6 Lemma: [ZFC] Sei $\mathcal{U}$ ein $\aleph_1$-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Menge S und $j : \mathbf{V} \prec M$ die induzierte elementare Einbettung in die Ultrapotenz.

(1) Wenn $j"X \in M$ gilt und Y eine Teilmenge von M mit $|Y| \leq |X|$ ist, so gilt $Y \in M$.
(2) Für alle Ordinalzahlen γ gilt genau dann $j"\gamma \in M$, wenn ${}^\gamma M \subseteq M$ gilt.
(3) $j"(|S|^+) \notin M$.
(4) $\mathcal{U} \notin M$.

Beweis:

(1) Y ist eine Teilmenge von M mit $|Y| \leq |X|$, daher gibt es eine Menge $\{f_x \mid x \in X\}$ mit $Y = \{[f_x] \mid x \in X\}$. Da $j"X$ ein Element von M ist, gibt es ein h mit $M \models [h] = j"X$. Damit gilt für alle $x \in X$

$$M \models j(x) = [c_x] \in [h],$$

also nach dem Satz von Łoś

$$\{i \in S \mid x \in h(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Definiere nun eine Funktion g durch

$$g(i) := \langle f_x(i) \mid x \in h(i) \rangle .$$

Dann gilt für alle $x \in X$

$$\{i \in S \mid g(i)(x) = f_x(i)\} = \{i \in S \mid x \in h(i)\} \in \mathcal{U},$$

d.h. $M \models [g](j(x)) = [f_x]$.

Da $\mathrm{dom}([g]) = [h] = j``X$ gilt, folgt also $Y = \mathrm{ran}([g]) \in M$.

(2) Dies folgt direkt aus (1), da jede Menge bijektiv zu einer Ordinalzahl ist.

(3) Sei $[f] \in M$ beliebig. Angenommen, es gilt

$$A := \{i \in S \mid |f(i)| \leq |S|\} \in \mathcal{U}.$$

Sei $\alpha \in |S|^+ \setminus \bigcup_{i \in A} f(i)$, dann gilt

$$\{i \in S \mid \alpha \notin f(i)\} \supseteq A \in \mathcal{U},$$

also $j(\alpha) \notin [f]$.
Gilt andererseits

$$B := \{i \in S \mid |f(i)| > |S|\} \in \mathcal{U},$$

so gibt es ein injektives $h \in {}^B\mathbf{V}$ mit $h(i) \in f(i)$ für alle $i \in B$, also gilt $[h] \in [f]$. Angenommen, es gäbe ein $a \in \mathbf{V}$ mit $j(a) = [c_a] = [h]$. Dann würde gelten

$$C := \{i \in S \mid h(i) = a\} \in \mathcal{U},$$

d.h. es würde eine Menge C geben mit $C \cap B \in \mathcal{U}$ und $|C \cap B| = 1$. $\mathcal{U}$ wäre also ein Hauptfilter, dies ist nach Lemma 1.1.5 ein Widerspruch zur Annahme „$\mathcal{U}$ ist frei“. Es gilt also

$$[h] \notin j``\mathbf{V} \supseteq j``(|S|^+),$$

aus $[h] \in [f]$ folgt damit $[f] \neq j``(|S|^+)$.

(4) Angenommen, $\mathcal{U} \in M$. Dann gilt $S = \bigcup \mathcal{U} \in M$, und damit $\mathcal{P}(S) \in M$, also auch $\mathcal{P}(S \times S) \in M$. Diese Menge enthält jede Wohlordnung von S, und damit gilt ${}^S(|S|^+) \in M$. Aber für alle $\alpha < |S|^+$ ist $j(\alpha)$ der Ordnungstyp von $\{[f] \mid f \in {}^S\alpha\}$ und diese Menge ist definierbar durch $\mathcal{U}$ und ${}^S(|S|^+)$, also gilt $j``(|S|^+) \in M$, dies jedoch widerspricht (3).

$\square$

Für den Fall, daß wir aus einem normalen Ultrafilter auf $\kappa > \aleph_0$ die Ultrapotenz bilden, können wir noch mehr über diese aussagen. Wir können bestimmen, welche Darstellung κ in dem transitiven Kollaps der Ultrapotenz hat.

1.3.7 Lemma: [ZFC] Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ und j die induzierte elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist normal.
(2) $M \models \kappa = [\mathrm{id}]$.
(3) Für $X \subseteq \kappa$ gilt $X \in \mathcal{U}$ genau dann, wenn $\kappa \in j(X)$ gilt.

Beweis:
(1)⇒(2) Sei $[f]$ ein Element von $[\mathrm{id}]$, also

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in \alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Dann gibt es nach Lemma 1.1.14 ein $\gamma < \kappa$ mit

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{U},$$

also $[f] = [c_\gamma]$. Nach Lemma 1.3.5 gilt aber $[c_\gamma] = \gamma$, d.h. $M \models [\mathrm{id}] \subseteq \kappa$. Andererseits gilt für alle $\gamma < \kappa$

$$\{\alpha < \kappa \mid \gamma \in \alpha\} \in \mathcal{U},$$

nach dem Satz von Łoś also

$$M \models [c_\gamma] = \gamma \in [\mathrm{id}],$$

daher gilt auch $M \models \kappa \subseteq [\mathrm{id}]$.
(2)⇒(3) Es gilt

$$X \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow [\mathrm{id}] \in j(X).$$

Nach (2) gilt $[\mathrm{id}] = \kappa$, also

$$X \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \kappa \in j(X).$$

(3)⇒(1) Sei $\langle X_\gamma \mid \gamma < \kappa\rangle \in {}^\kappa\mathcal{U}$ eine Sequenz von Filterelementen. Nach Voraussetzung gilt dann $\kappa \in j(X_\gamma)$ für alle $\gamma < \kappa$. Sei X der Diagonalschnitt dieser Sequenz:

$$X := \triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$$

Sei $j(X)$ das Bild des Diagonalschnitts unter j:

$$j(X) = \{\alpha < j(\kappa) \mid \alpha \in \bigcup_{\gamma<\alpha} j(X_\gamma)\}.$$

Dann folgt $\kappa \in j(X)$ aus $\kappa \in j(X_\gamma)$ für alle $\gamma < \kappa$, also gilt $\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{U}$ ist normal. □

Man beachte, daß wir beim Beweis von „Aus 1.3.7(3) folgt 1.3.7(1)“ das Auswahlaxiom nicht verwendet haben. Wir können also direkt folgendes Korollar formulieren, das auch die Konstruktion des Ultrafilters in Satz 1.3.9 nahelegt.

1.3.8 Korollar: [ZF] Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ, sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ. Wenn für $X \subseteq \kappa$ genau dann $X \in \mathcal{U}$ gilt, wenn $\kappa \in j(X)$ gilt, so ist $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf κ.

Unter ZFC können wir also aus einem Ultrafilter eine elementare Abbildung konstruieren. Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich, aus einer elementaren Einbettung läßt sich ein Ultrafilter konstruieren, der sogar normal ist. Dabei wird das Auswahlaxiom nicht benötigt.

1.3.9 Lemma: [ZF] Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ. Dann ist

$$D := \{X \subseteq \kappa \,|\, \kappa \in j(X)\}$$

ein normaler Ultrafilter auf κ.

Beweis: Aus $\kappa \in j(\kappa)$ folgt $\kappa \in D$, und aus $j(\varnothing) = \varnothing$ folgt $\varnothing \notin D$.
Wenn $\kappa \in j(X)$ und $\kappa \in j(Y)$ gilt, so gilt auch

$$\kappa \in j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y),$$

also ist D unter endlichen Schnitten abgeschlossen.
Für $X \subseteq Y$ mit $X \in D$ gilt

$$\kappa \in j(X) \subseteq j(Y),$$

also ist D gegen Obermengen abgeschlossen. D ist also ein Filter.
D ist kein Hauptfilter, denn für alle $\alpha < \kappa$ gilt

$$j(\alpha) = \alpha \quad \Rightarrow \quad j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\},$$

also gilt $\kappa \notin j(\{\alpha\})$.
Und D ist ein Ultrafilter: Angenommen $X \subseteq \kappa$ sei nicht in D, d.h. $\kappa \notin j(X)$. Es gilt

$$\kappa \in j(\kappa) = j(X) \cup j(\kappa \backslash X),$$

also gilt $\kappa \in j(\kappa \backslash X)$, d.h. $\kappa \backslash X \in D$.
Damit ist nur noch die κ-Vollständigkeit zu zeigen. Sei $\mathcal{X} = \langle X_\alpha \,|\, \alpha < \gamma \rangle$ eine Sequenz der Länge $\gamma < \kappa$ mit

$$\forall \alpha < \gamma \, (\kappa \in j(X_\alpha)).$$

In M ist $j(\mathcal{X})$ eine Sequenz der Länge $j(\gamma)$ und für alle $\alpha < \gamma$ ist $j(X_\alpha)$ das $j(\alpha)$-te Glied von $j(\mathcal{X})$. Da aber $j(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha < \gamma$ und $j(\gamma) = \gamma$ gilt, ist $j(\mathcal{X})$ von der Form

$$j(\mathcal{X}) = \langle j(X_\alpha) \,|\, \alpha < \gamma \rangle.$$

Also gilt

$$j(\bigcap \mathcal{X}) = \bigcap j(\mathcal{X}) = \bigcap_{\alpha < \gamma} j(X_\alpha),$$

und damit

$$\kappa \in j(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha),$$

d.h. $\bigcap \mathcal{X} \in D$. Damit ist D ein κ-vollständiger freier Ultrafilter und per Konstruktion nach Korollar 1.3.8 normal. $\square$

Jede elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ induziert also einen normalen Ultrafilter D auf ihrem kritischem Punkt. Durch diesen Ultrafilter wiederum bekommt man eine elementare Einbettung in die Ultrapotenz Ult_D. Im folgenden Lemma konstruieren wir nun eine elementare Einbettung von Ult_D nach M und erhalten so ein kommutatives Diagramm elementarer Einbettungen.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "j_D"'] & & M \\ & \mathrm{Ult}_D \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

1.3.10 Lemma: [ZFC] Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ. Sei D der normale Ultrafilter aus Lemma 1.3.9 und $j_D : \mathbf{V} \prec \mathrm{Ult}_D$ die durch D induzierte elementare Einbettung in die Ultrapotenz Ult_D. Dann gibt es eine elementare Einbettung $k : \mathrm{Ult}_D \prec M$, so daß gilt

$$\forall a(k(j_D(a)) = j(a)).$$

Beweis: Definiere $k : \mathrm{Ult}_D \to M$ für alle $[f] \in \mathrm{Ult}_D$ durch

$$k([f]) := (j(f))(\kappa)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten f. Denn $f =_D g$ bedeutet, daß

$$X := \{\alpha \in \kappa \,|\, g(\alpha) = f(\alpha)\} \in D$$

gilt, also auch $\kappa \in j(X)$. Aus

$$j(X) = \{\alpha \in j(\kappa) \,|\, (jg)(\alpha) = (jf)(\alpha)\}$$

folgt damit

$$(j(g))(\kappa) = (j(f))(\kappa).$$

k ist eine elementare Abbildung: Sei $\varphi(x)$ eine Formel und es gelte

$$\mathrm{Ult}_D \models \varphi([f]).$$

Dann gilt

$$X := \{\alpha \in \kappa \,|\, \varphi(f(\alpha))\} \in D,$$

also

$$\kappa \in j(X) = \{\alpha \in j(\kappa) \,|\, M \models \varphi((jf)(\alpha))\}.$$

Da $k([f]) := (j(f))(\kappa)$ gilt, bedeutet dies gerade $M \models \varphi(k([f]))$, d.h. k ist eine elementare Einbettung von Ult_D nach M.

Nun ist nur noch $k(j_D(a)) = j(a)$ zu zeigen. Nach der Definition von j_D aus Lemma 1.3.4 gilt $j_D(a) = [c_a]$, und damit

$$k((j_D(a)) = k([c_a]) = (j(c_a))(\kappa).$$

Da $j(c_a)$ die konstante Funktion auf $j(\kappa)$ mit Wert $j(a)$ ist, gilt also

$$k((j_D(a)) = (j(c_a))(\kappa) = j(a).$$

□

Ist $\mathcal{U}$ also ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ, so können wir einiges über die induzierte elementare Einbettung $j_\mathcal{U} : \mathbf{V} \prec \mathrm{Ult}_\mathcal{U}$ aussagen. Im folgenden Lemma fassen wir diese Aussagen zusammen, später werden wir ähnliche Resultate für normale Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ bekommen.

1.3.11 Lemma: [ZFC] Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ und $j : \mathbf{V} \prec M$ die induzierte elementare Einbettung. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $\mathrm{crit}(j) = \kappa$.
(2) $\forall x \in \mathbf{V}_\kappa (j(x) = x)$, also $\mathbf{V}_\kappa^M = \mathbf{V}_\kappa$.
(3) $\forall X \subseteq \mathbf{V}_\kappa (j(X) \cap \mathbf{V}_\kappa = X)$, also $\mathbf{V}_{\kappa+1}^M = \mathbf{V}_{\kappa+1}$ und $(\kappa^+)^M = \kappa^+$.
(4) $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.
(5) ${}^\kappa M \subseteq M$, aber ${}^{\kappa+1} M \not\subseteq M$.
(6) $\mathcal{U} \notin M$, also $\mathbf{V}_{\kappa+2} \not\subseteq M$.

Beweis:

(1) Für alle $\alpha < \kappa$ gilt nach Lemma 1.3.5 $j(\alpha) = \alpha$, und nach Lemma 1.1.9

$$\{\beta < \kappa \,|\, \alpha < \beta < \kappa\} \in \mathcal{U}.$$

Nach dem Satz von Łoś gilt also

$$\alpha = j(\alpha) < [\mathrm{id}] < j(\kappa).$$

Damit gilt $\kappa \leq [\mathrm{id}] < j(\kappa)$, d.h. κ ist der kritische Punkt von $j : \mathbf{V} \prec M$.

(2) Angenommen, $j(x) = x$ gilt nicht für alle $x \in \mathbf{V}_\kappa$.
Sei x Rang-minimales Gegenbeispiel mit Rang $\delta := \mathrm{rg}(x)$. Aus $y \in x$ folgt

$$j(y) = y \in j(x),$$

also gilt $x \subseteq j(x)$. Dann folgt aus $j(x) \neq x$, daß es ein $z \in j(x) \backslash x$ gibt. Angenommen $\mathrm{rg}(j(x)) \leq \delta$, dann würde $z = j(z)$ gelten, also $j(z) \in j(x)$, d.h. $z \in x$, Widerspruch. Also gilt

$$\mathrm{rg}(j(x)) = j(\mathrm{rg}(x)) = j(\delta) > \delta.$$

Dies aber ist ein Widerspruch zu $\mathrm{crit}(j) = \kappa$.

(3) Folgt aus (2) und der Tatsache, daß M jede Wohlordnung von κ enthält.

(4) Nach (3) gilt $\mathcal{P}(\kappa) = (\mathcal{P}(\kappa))^M$, damit folgt aus $M \subseteq \mathbf{V}$ also
$$2^\kappa \leq (2^\kappa)^M.$$
Und da $j(\kappa)$ in M unerreichbar ist, gilt
$$(2^\kappa)^M < j(\kappa).$$
Zum Schluß folgt $j(\kappa) = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa\}$ aus $j(\kappa) = [c_\kappa]$, also gilt
$$j(\kappa) < (2^\kappa)^+.$$
(5) Nach Lemma 1.3.5 gilt $j"\kappa = \kappa$, nach Lemma 1.3.6(2) also ${}^\kappa M \subseteq M$. Außerdem gilt nach Lemma 1.3.6(3) $j"(\kappa^+) \notin M$, und damit ${}^{\kappa^+}M \not\subseteq M$.
(6) Gilt nach Lemma 1.3.6(4).

$\square$

Die Ergebnisse dieses Kapitels zeigen, daß unter ZFC die folgenden Aussagen äquivalente Definitionen einer meßbaren Kardinalzahl sind:
(1) Es gibt einen κ-vollständigen freien Ultrafilter auf κ.
(2) Es gibt einen normalen Ultrafilter auf κ.
(3) Es gibt eine elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ mit kritischem Punkt κ (in der ${}^\kappa M \subseteq M$ gilt).

Unter ZFC ist also die Existenz eines κ-vollständigen freien Ultrafilters auf einer Kardinalzahl κ äquivalent zur Existenz eines normalen Ultrafilters auf κ. Ohne AC jedoch kann man aus einer Ultrapotenz nicht generell eine elementare Einbettung konstruieren, so daß Lemma 1.3.9 nicht verwendet werden kann, um einen normalen Ultrafilter zu erhalten.

Wir haben durch Definition 1.1.10 festgelegt, eine Kardinalzahl κ *meßbar* zu nennen, wenn auf ihr ein κ-vollständiger Ultrafilter existiert. In der Literatur wird jedoch häufig auch im ZF-Kontext, d.h. ohne Auswahlaxiom, unter einer meßbaren Kardinalzahl eine Kardinalzahl verstanden, auf der ein normaler Ultrafilter existiert.

1.4 Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit Filtern beschäftigt, deren Elemente Teilmengen von Kardinalzahlen waren. In diesem Abschnitt betrachten wir nun Filter, deren Elemente Teilmengen der Potenzmenge von Kardinalzahlen sind. In Kapitel 3 werden wir diese Art von Filtern benutzen, um zu zeigen, daß es unter ZFC zwei äquivalente Definitionen von Superkompaktheit gibt. Ähnlich wie bei den meßbaren Kardinalzahlen kann Superkompaktheit dadurch definiert werden, daß die Existenz einer elementaren Einbettung mit bestimmten Eigenschaften gefordert wird, aber es ist auch eine Definition mit Hilfe bestimmter Ultrafilter über $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ möglich. Diese Definition von Superkompaktheit werden wir im $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$-Kontext verwenden.

1.4.1 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl, S eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von S mit weniger als κ-vielen Elementen wird durch $\mathcal{P}_\kappa(S)$ bezeichnet,

$$\mathcal{P}_\kappa(S) := \{X \subseteq S \mid |X| < \kappa\}.$$

1.4.2 Definition: Sei S eine Menge, κ eine Kardinalzahl. Ein *feiner Filter $\mathcal{F}$ auf* $\mathcal{P}_\kappa(S)$ ist ein κ-vollständiger Filter[11] auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$, so daß gilt:

$$\forall i \in S\, (\{x \in \mathcal{P}_\kappa(S) \mid i \in x\} \in \mathcal{F}).$$

1.4.3 Definition: Sei $S \in \mathbf{V}$, $\kappa \in \mathrm{Card}$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$ ist *normal*, falls $\mathcal{F}$ ein feiner Filter ist und für alle Sequenzen $\langle X_i \mid i \in S\rangle \in {}^S\mathcal{F}$ der Diagonalschnitt $\triangle_{i\in S} X_i$ im Filter liegt:

$$\triangle_{i\in S} X_i := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(S) \mid x \in \bigcap_{i\in x} X_i\} \in \mathcal{F}.$$

Wenn also von einem normalen Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$ gesprochen wird, so ist obige Definition gemeint, bei einem normalen Filter auf κ die Definition 1.1.12. Zwischen normalen Ultrafiltern auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ und normalen Ultrafiltern auf κ besteht ein einfacher Zusammenhang.

1.4.4 Lemma: [ZF]

(1) Ist $\mathcal{F}$ ein normaler Ultrafilter auf κ, so ist

$$\mathcal{F}^* := \{X \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \mid X \cap \kappa \in \mathcal{F}\}$$

ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$.

(2) Ist $\mathcal{F}$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$, so ist $\mathcal{F}^* := \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(\kappa)$ ein normaler Ultrafilter auf κ.

Beweis:

(1) Man beachte, daß jedes Element von κ eine Teilmenge von κ mit Kardinalität kleiner κ, und damit κ eine Teilmenge von $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ ist. Daher ist auch $X \cap \kappa$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$. Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{F}^*$ überhaupt ein Filter ist.

Die leere Menge ist nicht in $\mathcal{F}^*$ enthalten, da sie kein Element von $\mathcal{F}$ ist. Gilt $X \in \mathcal{F}^*$, so sind auch alle Obermengen Y von X Elemente von $\mathcal{F}^*$, denn $\mathcal{F}$ ist gegen Obermengen abgeschlossen. Ist $\langle X_i \mid i \in \gamma\rangle$ eine Sequenz von $\mathcal{F}^*$-Filterelementen der Länge $\gamma < \kappa$, so gilt $X_i \cap \kappa \in \mathcal{F}$ für alle $i < \gamma$. $\mathcal{F}$ ist ein κ-vollständiger Filter auf κ, also gilt

$$(\bigcap_{i\in\gamma} X_i) \cap \kappa = \bigcap_{i\in\gamma} (X_i \cap \kappa) \in \mathcal{F},$$

[11] Ein Filter auf der Menge $\mathcal{P}_\kappa(S)$ ist, algebraisch gesehen, ein Filter auf der schwachen partiellen Ordnung $(\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa(S)), \subseteq)$.

damit ist $\mathcal{F}^*$ also ein κ-vollständiger Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$.

Sei $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ beliebig. Wenn $X \notin \mathcal{F}^*$ gilt, d.h. $X \cap \kappa \notin \mathcal{F}$, so folgt

$$(\mathcal{P}_\kappa(\kappa)\backslash X) \cap \kappa = \kappa\backslash(X \cap \kappa) \in \mathcal{F},$$

da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist. Damit gilt $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)\backslash X \in \mathcal{F}^*$, auch $\mathcal{F}^*$ ist ein Ultrafilter.

Wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathcal{F}^*$ auch normal ist, also fein und unter Diagonalschnitten abgeschlossen. Sei $\alpha \in \kappa$ beliebig, dann gilt

$$\{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, \alpha \in X\} \cap \kappa = \{x \in \kappa \,|\, \alpha \in x\} \in \mathcal{F}.$$

Daher ist $\mathcal{F}^*$ ein feiner Filter. Wenn $\langle X_i \,|\, i \in \kappa\rangle$ eine Sequenz von $\mathcal{F}^*$-Filterelementen ist, so gilt

$$(\triangle_{i\in\kappa} X_i) \cap \kappa = \{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, X \in \bigcap_{i\in X} X_i\} \cap \kappa$$

$$= \{x \in \kappa \,|\, x \in \bigcap_{i\in x}(X_i \cap \kappa)\} \in \mathcal{F},$$

also ist $\mathcal{F}^*$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$.

(2) Wir zeigen auch hier zuerst, daß $\mathcal{F}^*$ überhaupt ein Filter ist.

Die leere Menge ist nicht in $\mathcal{F}^*$ enthalten, da sie kein Element von $\mathcal{F}$ ist. Da $\mathcal{F}$ fein und κ-vollständig ist, gilt für alle $\alpha \in \kappa$

$$\{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, \alpha \subseteq X\} = \bigcup_{i\in\alpha}\{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, i \in X\} \in \mathcal{F}.$$

Da $\mathcal{F}$ normal ist, gilt also

$$\triangle_{i<\kappa}\{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, \alpha \subseteq X\}$$

$$= \{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, X \in \bigcap_{i\in X}\{Y \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, i \subseteq Y\}\} = \kappa \in \mathcal{F},$$

d.h. $\kappa \in \mathcal{F}^*$. Gilt $X \in \mathcal{F}^*$, so sind auch alle Obermengen Y von X Elemente von $\mathcal{F}^*$, denn $\mathcal{F}$ ist gegen Obermengen abgeschlossen. Also ist $\mathcal{F}^*$ ein Filter auf κ.

Ist $\langle X_i \,|\, i\rangle \in \gamma$ eine Sequenz von $\mathcal{F}^*$-Filterelementen der Länge $\gamma < \kappa$, so gilt $X_i \in \mathcal{F}$ für alle $i < \gamma$. Da $\mathcal{F}$ ein κ-vollständiger Filter ist, gilt $\bigcap_{i\in\gamma} X_i \in \mathcal{F}$. Aber $\bigcap_{i\in\gamma} X_i$ ist eine Teilmenge von κ, damit ist auch $\mathcal{F}^*$ ein κ-vollständiger Filter.

Sei $X \subseteq \kappa$ beliebig. Wenn $X \notin \mathcal{F}^*$ gilt, so folgt $(\mathcal{P}_\kappa(\kappa)\backslash X) \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist. Also gilt

$$\kappa\backslash X = (\mathcal{P}_\kappa(\kappa)\backslash X) \cap \kappa \in \mathcal{F},$$

und damit $\kappa\backslash X \in \mathcal{F}^*$, daher ist $\mathcal{F}^*$ ein Ultrafilter.

Wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathcal{F}^*$ auch normal ist, also frei und unter Diagonalschnitten abgeschlossen. Wäre $\mathcal{F}^*$ fixiert, so wäre $\mathcal{F}^*$ nach Lemma 1.1.5(4) von einem Element aus κ erzeugt, d.h. es würde ein $\alpha \in \kappa$ mit $\{\alpha\} \in \mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ geben. Dann aber müßte $\{\alpha\} \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ gelten, also $|\alpha| = \kappa$, Widerspruch zu $\alpha \in \kappa$.

Wenn $\langle X_i \,|\, i \in \kappa \rangle$ eine Sequenz von $\mathcal{F}^*$-Filterelementen ist, so folgt aus $X_i \subseteq \kappa$ für alle $i < \kappa$ und $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$

$$\triangle_{i\in\kappa} X_i = \{X \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) \,|\, X \in \bigcap_{i\in X} X_i\} = \{x \in \kappa \,|\, x \in \bigcap_{i\in x} X_i\} \in \mathcal{F},$$

also gilt $\triangle_{i\in\kappa} X_i \in \mathcal{F}^*$, und damit ist $\mathcal{F}^*$ ein normaler Ultrafilter auf κ. □

Für meßbare Kardinalzahlen haben wir also eine weitere Charakterisierung: Eine Kardinalzahl ist genau dann meßbar, wenn es eine normalen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ gibt.

In Lemma 1.1.16 haben wir gezeigt, daß Vollständigkeit und die Ultrafiltereigenschaft bei Bildfiltern erhalten bleibt. Nun haben wir eine weitere Filtereigenschaft, deren Verhalten beim Erzeugen eines Bildfilters überprüft werden muß, die Feinheit.

1.4.5 Definition: Seien S und T Mengen, κ eine Kardinalzahl und $g : S \leftrightarrow T$ eine Bijektion. Mit $\hat{g} : \mathcal{P}_\kappa(S) \to \mathcal{P}_\kappa(T)$ sei die durch $g"x : \mathcal{P}_\kappa(S) \to \mathcal{P}_\kappa(T)$ definierte Bijektion bezeichnet.

1.4.6 Lemma: [ZF] Seien S und T Mengen, κ eine Kardinalzahl und $g : S \leftrightarrow T$ eine Bijektion. Wenn der Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$ fein ist, so ist auch der Bildfilter $\hat{g}_*(\mathcal{F})$ auf $\mathcal{P}_\kappa(T)$ fein.

Beweis: Für die Bijektion $\hat{g} : \mathcal{P}_\kappa(S) \to \mathcal{P}_\kappa(T)$ gilt

$$\hat{g}^{-1}(x) = g^{-1}"x.$$

Für alle $i \in S$ ist zu zeigen:

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(T) \,|\, i \in x\} \in \hat{g}_*(\mathcal{F}).$$

Diese Aussage ist aber äquivalent zu

$$\hat{g}^{-1}"\{x \in \mathcal{P}_\kappa(T) \,|\, i \in x\} \in \mathcal{F},$$

und diese wiederum zu

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(S) \,|\, g^{-1}(i) \in x\}) \in \mathcal{F}.$$

Diese Aussage jedoch ist wahr, da $\mathcal{F}$ ein feiner Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(S)$ ist. □

Wie in Lemma 1.1.14 gibt es auch für Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ (γ eine Ordinalzahl) eine Äquivalenz zur Normalität, die nicht den Diagonalschnitt verwendet, sondern regressive Funktionen.

1.4.7 Lemma: [ZF] Sei κ eine Kardinalzahl und $\gamma \geq \kappa$ eine Ordinalzahl. Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger feiner Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann normal, wenn zu jeder fast überall regressiven[12] Funktion $f : \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \to \gamma$ ein $\lambda < \gamma$ existiert, so daß $\{x \,|\, f(x) = \lambda\} \in \mathcal{U}$ gilt, f also fast überall konstant ist.

[12]Eine Funktion ist fast überall regressiv, falls $\{x \,|\, f(x) \in x\} \in \mathcal{U}$ gilt, siehe Definition 1.1.13.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ und $f : \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \to \gamma$ eine Funktion mit

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) \in x\} \in \mathcal{U}.$$

Angenommen, für alle $i \in \gamma$ gilt

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) = i\} \notin \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt also für alle $i \in \gamma$

$$X_i := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) \neq i\} \in \mathcal{U},$$

$\langle X_i \,|\, i \in \gamma \rangle$ ist dann eine Sequenz von Filterelementen. $\mathcal{U}$ ist normal, also gilt:

$$\triangle_{i\in\gamma} X_i = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, x \in \bigcap_{i \in x} \{y \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma), \,|\, f(y) \neq i\}\}$$

$$= \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, x \in \{y \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(y) \notin x\}\} = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) \notin x\} \in \mathcal{U}.$$

Dies aber widerspricht $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) \in x\} \in \mathcal{U}$, also ist die Annahme falsch, es muß also ein $i \in \gamma$ mit $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) = i\} \in \mathcal{U}$ geben.

Sei andererseits $\mathcal{U}$ ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Sei $\langle X_i \,|\, i \in \gamma \rangle$ eine Sequenz von Filterelementen. Angenommen, es gelte $\triangle_{i\in\gamma} X_i \notin \mathcal{U}$, damit also

$$X := \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash \triangle_{i\in\gamma} X_i = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, x \notin \bigcap_{i \in x} X_i\}$$

$$= \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, x \in \bigcup_{i \in x} (\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Wir definieren eine regressive Funktion f auf X durch

$$f(x) := \min\{i \in x \,|\, x \in (\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X_i)\}.$$

Dann gibt es nach Voraussetzung ein $i \in \gamma$ mit $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) = i\} \in \mathcal{U}$, also gilt

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, f(x) = i\} \subseteq (\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X_i) \in \mathcal{U}.$$

Dies aber ist ein Widerspruch zur Annahme $X_i \in \mathcal{U}$. □

Ein normaler Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ und die dazu gehörige Einbettung in die Ultrapotenz haben Eigenschaften, die zum Teil zu denen in Lemma 1.3.11 analog sind.

1.4.8 Lemma: [ZFC] Sei $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ mit $\kappa \leq \gamma$ und $j : \mathbf{V} \prec M$ die dadurch induzierte elementare Einbettung. Dann gilt folgendes [13]:

(1) $j"\gamma = [\mathrm{id}]$ und ${}^\gamma M \subseteq M$.
(2) Für $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ gilt $X \in \mathcal{U}$ genau dann, wenn $j"\gamma \in j(X)$ gilt.
(3) Der kritische Punkt von j ist κ und es gilt $\gamma < j(\kappa)$.

[13] id ist hier id : $\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \to \mathcal{P}_\kappa(\gamma)$, die identische Abbildung auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$.

Beweis:

(1) Sei $\delta < \gamma$, da $\mathcal{U}$ fein ist, gilt $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \mid \delta \in x\} \in \mathcal{U}$, und damit $j(\delta) \in [\mathrm{id}]$. Ist andererseits $[f] \in [\mathrm{id}]$, so gilt $\{x \mid f(x) \in x\} \in \mathcal{U}$, und damit gibt es nach Lemma 1.4.7 ein $\delta < \gamma$ mit $\{x \mid f(x) = \delta\} \in \mathcal{U}$, also $[f] = j(\delta)$. Und aus $j"\gamma = [\mathrm{id}] \in \mathcal{U}$ folgt ${}^{\gamma}\,\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$ nach Lemma 1.3.6.

(2) $\{x \mid x \in X\} \in \mathcal{U}$ bedeutet $[\mathrm{id}] \in j(X)$, dies ist nach (2) äquivalent zu $j"\gamma \in j(X)$.

(3) Da $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, gilt $\mathrm{crit}(j) \geq \kappa$. Der Ordnungstyp von $j"\gamma$ ist γ, und damit gilt $\mathrm{otp}([\mathrm{id}]) = \mathrm{otp}(j"\gamma) = \gamma$. Damit folgt $|\mathrm{otp}(x)| = |x| \geq \kappa$ aus $\mathrm{otp}(x) \geq \kappa$, also gilt $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \mid \mathrm{otp}(x) < \kappa\} = \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \in \mathcal{U}$, und damit $\gamma = \mathrm{otp}([\mathrm{id}]) < j(\kappa)$.

□

Die mit Ultrafiltern auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ gebildeten Ultrapotenzen sind also nach Lemma 1.4.8(1) dazu geeignet, Abschlußeigenschaften wie ${}^{\lambda}M \subseteq M$ darzustellen. Mit Ultrapotenzen, die aus Ultrafiltern auf Kardinalzahlen gebildet worden sind, ist dies nach Lemma 1.3.11(5) für $\lambda > \kappa$ nicht möglich. In Kapitel 3 werden aus Ultrafiltern auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ gebildete Ultrapotenzen eine wichtige Rolle spielen, denn durch sie kann der Begriff der superkompakten Kardinalzahl in ZFC formalisiert werden.

1.5 Extender

Ebenso wie die Abschlußeigenschaft ${}^{\lambda}M \subseteq M$ für $\lambda > \kappa$ ist auch die Abschlußeigenschaft $\mathbf{V}_\lambda \subseteq M$ für $\lambda > \kappa + 1$ nicht durch eine Ultrapotenz realisierbar, die aus einem Ultrafilter auf κ gebildet worden ist, siehe Lemma 1.3.11(6). Diese Art des Abschlusses kann jedoch durch eine Variante von Ultrapotenzen, den sogenannten Extensionen dargestellt werden. Hierfür benötigt man den Begriff des *Extenders.*

Wir werden Extender nur in einem Beweis in Kapitel 4 benötigen, daher stellen wir Extender nicht allgemein vor, sondern beschränken uns auf die Definitionen und Aussagen, die wir später benötigen.

Eine allgemeinere Einführung in die hier verwendeten Extender findet sich in dem Buch von Kanamori [**Ka94**, Kapitel 26]. Der von uns verwendete Typ von Extendern wird auch Dodd-Jensen-Extender genannt. In [**Ko98**] wird ein anderer Typ von Extendern vorgestellt, und benutzt, um das Martin-Steel-Theorem[14] zu beweisen. Dabei sind die beiden erwähnten Typen von Extendern äquivalent, wie in dem Artikel von Peter Koepke [**Ko98**, S. 145] bemerkt wird.

[14] Siehe [**MaSt89**], „A Proof of Projective Determinacy“.

*

1.5.1 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl und β eine Ordinalzahl mit $\beta > \kappa$. Sei $\mathcal{E} = \langle E_a \,|\, a \in [\beta]^{<\omega} \rangle$ eine Sequenz. Dann ist $\mathcal{E}$ ein (κ, β)-*Extender*, falls gilt:

Es existiert ein $\eta \geq \kappa$, so daß folgende Aussagen wahr sind:

(1) Für alle $a \in [\beta]^{<\omega}$ ist E_a ein κ-vollständiger Ultrafilter auf $[\eta]^{|a|}$, mit
  (a) Es gibt ein $a \in [\beta]^{<\omega}$, so daß E_a nicht κ^+-vollständig ist.
  (b) Für alle $\alpha \in \eta$ gibt es ein $a \in [\beta]^{<\omega}$ mit $\{s \in [\eta]^{|a|} \,|\, \alpha \in s\} \in E_a$.

(2) Seien $b = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $a = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$ Elemente von $[\beta]^{<\omega}$ mit $a \subseteq b$. Definiere für solche a, b eine Funktion $\pi_{ba} : [\eta]^{|b|} \to [\eta]^{|a|}$ durch

$$\pi_{ba}(\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}) := \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_m}\}.$$

Dann gilt

$$X \in E_a \;\Leftrightarrow\; \{s \,|\, \pi_{ba}(s) \in X\} \in E_b.$$

(3) Für alle endlichen Sequenzen $\langle a_i \,|\, i < m \rangle \in {}^m([\beta]^{<\omega})$ und $\langle X_i \,|\, i < m \rangle$ mit $X_i \in E_{a_i}$ existiert eine Funktion $d : \bigcup_{i<m} a_i \to \eta$ mit $d\text{''}a_i \in X_i$ für $i < m$.

(4) Sei a ein Element aus $[\beta]^{<\omega}$ und $f : [\eta]^{|a|} \to \mathbf{V}$ eine Funktion, so daß gilt:

$$\{s \in [\eta]^{|a|} \,|\, f(s) \in \max(s)\} \in E_a.$$

Dann existiert ein Element b in $[\beta]^{<\omega}$, b eine Teilmenge von a, mit

$$\{s \in [\eta]^{|b|} \,|\, f(\pi_{ba}(s)) \in s\} \in E_b.$$

Ein Extender ist also ein Sequenz von Ultrafiltern, die durch ihren Aufbau ein gerichtetes System[15] von Ultrapotenzen induziert. Von diesem System läßt sich der direkte Limes bilden, so daß eine elementare Einbettung entsteht.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{V} & \xrightarrow{j_{\mathcal{E}}} & M_{\mathcal{E}} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{V} & \xrightarrow{j_c} & M_c \\
\mathrm{id}\uparrow & & \uparrow i_{bc} \\
\mathbf{V} & \xrightarrow{j_b} & M_b \\
\mathrm{id}\uparrow & & \uparrow i_{ab} \\
\mathbf{V} & \xrightarrow{j_a} & M_a
\end{array}$$

i_{ab} ist für $a, b \in [\beta]^{<\omega}$ mit $a \subseteq b$ definiert durch $i_{ab}([f]_{E_a}) := [f \circ \pi_{ba}]_{E_b}$.

1.5.2 Lemma: [ZFC] Aus einem (κ, β)-Extender $\mathcal{E}$ läßt sich eine elementare Einbettung $j_{\mathcal{E}} : \mathbf{V} \prec M_{\mathcal{E}}$ mit kritischem Punkt κ konstruieren.

Beweis: Siehe [**Ka94**, S. 354–356].

Als wir Ultrapotenzen untersuchten, haben wir festgestellt, daß sich mit Hilfe einer elementaren Einbettung ein Ultrafilter bilden läßt. Analog läßt sich aus einer elementaren Einbettung auch ein Extender bilden.

---
[15] Zur Definition gerichtetes System und direkter Limes siehe z.B. [**Ka94**, S. 9].

1.5.3 Lemma: [ZF] Aus einer elementaren Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ mit kritischem Punkt κ läßt sich zu jedem $\beta > \kappa$ ein (κ, β)-Extender $\mathcal{E}$ konstruieren.

Beweisskizze: Sei η die kleinste Ordinalzahl mit $\beta \leq j(\eta)$. Für jedes $a \in [\beta]^{<\omega}$ konstruieren wir einen Ultrafilter E_a durch

$$X \in E_a \quad :\Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}([\eta]^{|a|}) \wedge a \in j(X).$$

Dann ist $\mathcal{E} := \langle E_a \,|\, a \in [\beta]^{<\omega} \rangle$ ein (κ, β)-Extender. Ein ausführlicher Beweis hierzu findet sich z.B. in [**Ka94**, S. 352–354].

Dabei hängt es von β ab, inwiefern die aus diesem Extender konstruierte elementare Abbildung die ursprüngliche elementare Abbildung approximiert.

1.5.4 Lemma: [ZFC] Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ eine elementare Abbildung mit kritischem Punkt κ, $\beta > \kappa$ eine Kardinalzahl und $\mathcal{E}$ der aus j gebildete (κ, β)-Extender. Dann gilt $(\mathbf{V}_\gamma)^{M_\mathcal{E}} = (\mathbf{V}_\gamma)^M$ für alle γ mit $|\mathbf{V}_\gamma|^M \leq \beta$. Ist β gleich $j(\kappa)$, so gilt $j_\mathcal{E}(\kappa) = j(\kappa)$.

Beweis: Siehe [**Ka94**, Lemma 26.1, S. 354].

Sei z.B. $j : \mathbf{V} \prec M$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ, die der Abschlußeigenschaft $\mathbf{V}_{\kappa+\eta} \subseteq M$ genügt. Ein solches κ heißt η-stark[16] und ist eine Große Kardinalzahl. Der aus j gebildete $(\kappa, \kappa + \eta)$-Extender $\mathcal{E}$ bezeugt dann bereits die η-Stärke von κ, da die aus $\mathcal{E}$ gebildete elementare Abbildung $j_\mathcal{E} : \mathbf{V} \prec M_\mathcal{E}$ ebenfalls der nötigen Abschlußeigenschaft $\mathbf{V}_{\kappa+\eta} \subseteq M_\mathcal{E}$ genügt. Mit Extendern können wir also elementare Abbildungen konstruieren, deren Abschlußeigenschaften über die hinausgehen, die man durch elementare Einbettungen erhält, welche durch Ultrapotenzen von Ultrafiltern auf Kardinalzahlen gebildet werden.

[16] Siehe [**Ka94**, S. 358].

Kapitel 2

Das Axiom der Determiniertheit

In diesem Kapitel stellen wir das Konzept des unendlichen Spiels mit perfekter Information vor. Dadurch kommen wir zur Frage, ob und für welche Mengen es eine Gewinnstrategie für einen der Spieler gibt, d.h. für welche Mengen Spiele determiniert sind. Wir führen das Axiom der Determiniertheit AD ein, und beschäftigen uns mit einigen seiner Konsequenzen, besonders in Bezug auf seine Auswirkung auf Ultrafilter. Desweiteren zeigen wir, daß unter $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ die sogenannten projektiven Ordinalzahlen meßbar sind.

In der Diplomarbeit von Philipp Rohde [**Ro01**] findet sich eine ausführlichere Betrachtung des Axioms der Determiniertheit und seiner Folgerungen. Dort ist genauer betrachtet, wieviel Auswahl mit AD verträglich ist, und auf welche Arten AD erweitert werden kann.

2.1 Spiele und Determiniertheit

Die Idee des unendlichen Spiels hat seine Wurzeln in der Untersuchung endlicher Spiele wie z.B. Schach. Bei einem endlichen Zwei-Personen-Spiel mit perfekter Information gibt es immer eine Strategie für einen der Spieler, durch die er zumindest ein Unentschieden erreichen kann. Wobei natürlich aus der Existenz dieser Strategie nicht folgt, daß diese auch einfach beschreibbar ist, es gibt ja auch noch kein perfektes Schachprogramm. Bisher ist nicht einmal bekannt, für welchen der beiden Spieler eine Strategie existiert, die ihm mindestens ein Unentschieden garantiert.

Wir beschäftigen uns mit folgender Art von Spielen: Zwei Spieler spielen abwechselnd Elemente einer bestimmten Menge, dies tun sie unendlich oft. Anhand der entstehenden unendlichen Folge wird entschieden, welcher der beiden Spieler gewonnen hat. Im Folgenden wird dieser Begriff eines unendlichen Spiels mit perfekter Information formalisiert.

2.1.1 Definition: Sei M eine Menge, X sei eine Teilmenge von ${}^{\omega}M$, die als *Gewinnmenge* bezeichnet wird. Eine *Partie des Spiels* $G_M(X)$ ist eine Folge $x \in {}^{\omega}M$, wobei die geraden Folgeglieder

$$x_{\mathrm{I}}(i) := x_{2i}$$

die von Spieler I gespielten Züge repräsentieren, und die ungeraden Folgeglieder

$$x_{\mathrm{II}}(i) := x_{2i+1}$$

die von Spieler II. Falls $x \in X$ gilt, so gewinnt Spieler I die Partie, ansonsten Spieler II. Das Spiel $G_M(X)$ besteht aus den möglichen Partien. Statt $G_\omega(X)$ schreiben wir auch $G(X)$. Eine Partie stellen wir folgendermaßen da:

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathrm{I} & x_0 & & x_2 & & x_4 & & x_6 & \ldots & (= x_{\mathrm{I}}) \\
\mathrm{II} & & x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \ \ldots & (= x_{\mathrm{II}})
\end{array}$$

Wir wollen unter einem Spiel immer ein Spiel mit perfekter Information verstehen, d.h. wenn ein Spieler am Zug ist, hat er Kenntnis aller bisherigen Spielzüge. Diese Kenntnis kann er benutzen, um seinen Zug auszuwählen, d.h. er kann eine Strategie verwenden. Abhängig vom Spiel, also abhängig von Grund- und Gewinnmenge, kann es für genau einen der Spieler eine Strategie geben, die gewährleistet, daß er jede Partie gewinnt, die er mit dieser Strategie spielt.

2.1.2 Definition: Sei x eine Partie eines Spiels $G_M(X)$.
Eine *Strategie* für Spieler I ist eine Funktion

$$\sigma : \bigcup_{n\in\omega} {}^{2n}M \to M,$$

für Spieler II eine Funktion

$$\tau : \bigcup_{n\in\omega} {}^{2n+1}M \to M.$$

Dabei spielt Spieler I nach der Strategie σ, falls gilt

$$x_0 = \sigma(\varnothing) \quad \wedge \quad \forall n \in \omega\, (n > 0 \to x_{2n} = \sigma(\langle x_0, x_1, \ldots , x_{2n-1}\rangle)).$$

Analog für Spieler II. Falls Spieler I nach der Strategie σ und Spieler II die Folge y spielen, so wird die dadurch eindeutig festgelegte Partie mit $\sigma * y$ bezeichnet. Analog bezeichnet $y * \tau$ die Partie, in der I die Folge y und II nach τ spielen.

2.1.3 Definition: Sei $A \subseteq {}^{\omega}M$ und σ, τ Strategien für I bzw. II.
σ ist eine *Gewinnstrategie für I*, falls gilt

$$\{\sigma * y \,|\, y \in {}^{\omega}M\} \subseteq X.$$

Analog ist τ eine *Gewinnstrategie für II*, falls gilt:

$$\{x * \tau \,|\, x \in {}^{\omega}M\} \subseteq {}^{\omega}M \backslash X.$$

Ein Spiel $G_M(X)$ heißt *determiniert*, wenn einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. Man bezeichnet in diesem Fall auch die Gewinnmenge X als determiniert. Also ist eine Punktklasse $D \subseteq \mathcal{P}({}^{\omega}M)$ determiniert, wenn jedes $X \in D$ determiniert ist.

Bei den meisten Spielen gibt es Regeln, d.h. die Spieler können nicht beliebige Züge spielen. Durch den bisherigen Spielablauf sind ihre Möglichkeiten eingeschränkt. Ein Spiel mit Regeln läßt sich als Baum auffassen, in dem alle erlaubten Zugfolgen aufgeführt sind. Spieler I gewinnt ein solche Spiel mit Regel, wenn die gespielte Partie in der Gewinnmenge liegt und die Regeln eingehalten wurden, d.h. die Zugfolge in dem Baum liegt, oder Spieler II als erstes einen regelwidrigen Zug gespielt hat. Ein solches Spiel läßt sich einfach in ein Spiel ohne Regeln umwandeln, indem man alle Partien, in denen Spieler I als erstes die Regeln verletzt, aus der Gewinnmenge herausnimmt, und alle Partien, in denen Spieler II als erstes einen Regelverstoß begeht, hinzufügt. Spiele mit Regeln sind also äquivalent zu Spielen ohne Regeln, d.h. Regeln führen nicht zu einer größeren Klasse von Spielen.

1953 zeigten Gale und Stewart [**GaSt53**], daß offene und abgeschlossene Mengen determiniert sind[1]. Sie zeigten aber auch, daß nicht alle reellen Teilmengen determiniert sind, wenn man das Auswahlaxiom voraussetzt.

Jan Mycielski und Hugo Steinhaus schlugen 1962 einen anderen Weg ein. Sie formulierten die Determiniertheit aller reellen Teilmengen als neues Axiom [**MySt62**].

2.1.4 Definition: Das Axiom der Determiniertheit AD

(AD) $\forall X \subseteq \omega^\omega \, (G(X)$ ist determiniert) (d.h. $\mathcal{P}(\omega^\omega)$ ist determiniert.)

Da sich AC und AD nach Gale und Stewart widersprechen, können wir nicht in $\mathsf{ZFC}+\mathsf{AD}$ arbeiten, sondern müssen uns für ZFC oder $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ entscheiden. In den nächsten Abschnitten dieser Arbeit untersuchen wir einige der Folgerungen aus $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$, besonders im Bezug auf Ultrafilter. In Kapitel 4 wird dann ein Resultat zur Konsistenzstärke von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ vorgestellt, das wir verwenden werden, um einen Zusammenhang zwischen der Konsistenz von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ und der Existenz superkompakten Kardinalzahlen unter ZFC herzustellen.

---

[1] 1955 zeigte Philip Wolfe [**Wo55**], daß auch $\mathbf{\Sigma}^0_2$-Mengen, determiniert sind. Morton Davis [**Da64**] bewies 1964, daß $\mathbf{\Sigma}^0_2$-Mengen ebenfalls determiniert sind.

2.2 Ultrafilter unter AD

Welche Auswirkungen hat AD nun auf die Eigenschaften von Filtern?

2.2.1 Satz: [ZF + AD]

(1) Jeder Ultrafilter auf ω ist fixiert.
(2) Jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer beliebigen Menge S ist $\aleph_1$-vollständig.

Beweis: (1) Angenommen, es gebe einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf ω. Sei $G^*(\mathcal{U})$ folgendes Spiel: Die Spieler wählen ihre Züge aus $\mathcal{P}_{<\omega}(\omega)$ unter Berücksichtigung der Regel

$$\forall n \in \omega(x_n \cap \bigcup_{i<n} x_i = \varnothing)$$

aus. Es verliert der Spieler, der zuerst diese Regel verletzt. Wenn beide Spieler die Regel einhalten, gewinnt I falls

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \in \mathcal{U}$$

gilt, ansonsten gewinnt II. Da $\mathcal{P}_{<\omega}(\omega)$ abzählbar ist, läßt sich dieses Spiel $G^*(\mathcal{U})$ in ein Spiel $G(A)$ mit geeignetem $A \subseteq \omega^\omega$ umformen und ist damit unter AD determiniert. Einer der beiden Spieler besitzt also eine Gewinnstrategie.
Fall 1: Angenommen I besitzt eine Gewinnstrategie σ.
Sei τ_σ folgende Strategie für II:

$$\tau_\sigma(\langle x_0, \cdots, x_{2i}\rangle) = \begin{cases} \sigma(\varnothing)\backslash x_0 & \text{falls } i = 0 \\ \sigma(\langle x_1, \cdots, x_{2i}\rangle)\backslash x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei x eine Partie, in der Spieler II mit dieser Strategie spielt. Dann gilt

$$\forall i \in \omega(x_{\mathrm{II}}(i) \subseteq (x_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1})).$$

Aber nach der Definition von τ_σ ist $x_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1}$ die Obermenge einer Zugfolge von I in einer Partie in der I mit σ spielt, damit gilt

$$x_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1} \in \mathcal{U}.$$

Weil $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist gilt $\omega\backslash\{n\} \in \mathcal{U}$ für alle $n \in \omega$, und, da x_0 endlich ist, damit auch

$$\omega\backslash x_0 = \bigcap_{n\in x_0} (\omega\backslash\{n\}) \in \mathcal{U}.$$

Also gilt

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1} = (\omega\backslash x_0) \cap (x_0 \cup \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1}) \in \mathcal{U}.$$

Entweder hat I in der Partie x die Regel verletzt und damit verloren, oder es gilt

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \cap \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1} = \bigcup_{i\in\omega}(x_{2i} \cap \bigcup_{j<i} x_{2i+1}) = \varnothing.$$

Dann aber haben wir

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \subseteq \omega \backslash \bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1} \notin \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \notin \mathcal{U},$$

und I hat damit wieder verloren. Also ist τ_σ eine Gewinnstrategie für Spieler II, Widerspruch zur Annahme.

Fall 2: Angenommen Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie τ.

Sei $x_{\mathrm{I}} \in (\mathcal{P}_{<n}(\omega))^\omega$ eine beliebig Zugfolge des Spielers I. Wir definieren

$$\bar{x}_1 := \tau(x_0), \qquad \bar{x}_{2i+1} := \tau(\langle x_0, \bar{x}_1, x_2, \cdots, \bar{x}_{2i-1}, x_{2i}\rangle).$$

Definiere eine Strategie $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau}(\langle x_0, \cdots, x_{2i}\rangle) := \begin{cases} (\bar{x}_{2i+1} \backslash \{0, \cdots, i-1\}) \cup \{i\} \\ \qquad \text{falls } i \notin \bigcup\limits_{0\leq j\leq i} (x_{2i} \cup \bar{x}_{2i+1}) \\ (\bar{x}_{2i+1} \backslash \{0, \cdots, i-1\}) \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\bar{\tau}$ eine Gewinnstrategie für II, falls τ eine ist, und es gilt

$$\bigcup_{i\in\omega} (x_{\mathrm{I}} * \bar{\tau})_i = \omega.$$

Sei also o.B.d.A τ eine Gewinnstrategie für II mit

$$\forall y \in (\mathcal{P}_{<n}(\omega))^\omega \ (\bigcup_{i\in\omega} (y * \tau)_i = \omega).$$

Wenn in $x = x_{\mathrm{I}} * \tau$ die Regel von I eingehalten wird gilt

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \notin \mathcal{U},$$

da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt also

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i+1} = \omega \backslash \bigcup_{i\in\omega} x_{2i} \in \mathcal{U}.$$

Sei σ_τ folgende Strategie für I:

$$\begin{array}{rrcl} & \sigma_\tau(\varnothing) & = & \tau(\langle\varnothing\rangle) \\ \forall 0 < i \in \omega & \sigma_\tau(\langle x_0, \cdots, x_{2i-1}\rangle) & = & \tau(\langle \varnothing, x_0, \cdots, x_{2i-1}\rangle) \end{array}$$

Ist $x = \sigma_\tau * y$ mit y beliebig eine Partie in der Spieler I mit σ_τ spielt, so ist

$$x' := \langle 0, \varnothing\rangle \cup \bigcup_{i\in\omega} \{\langle i+1, x_i\rangle\}$$

eine Partie in der II nach τ spielt. Da τ eine Gewinnstrategie ist, hat also entweder der Spieler I in dieser Partie, und damit auch in der Partie $x = \sigma_\tau * y$, die Regel verletzt, oder es gilt

$$\bigcup_{i\in\omega} x_{2i} = \bigcup_{i\in\omega} x'_{2i+1} \in \mathcal{U}.$$

Damit ist σ_τ eine Gewinnstrategie für I, Widerspruch zur Annahme.
(2) Angenommen, es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer Menge S, der nicht $\aleph_1$-vollständig ist. Das heißt, es existiert eine Sequenz $\langle Y_i \,|\, i \in \omega\rangle$ mit $Y_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in \omega$, so daß $\bigcap_{i\in\omega} Y_i \notin \mathcal{U}$ gilt. Sei $f : S \to \omega$ folgende Funktion:

$$f(s) := \begin{cases} 0 \quad \text{falls } s \notin \left(\bigcup_{i\in\omega}(S\backslash Y_i)\right) \\ \min\{n+1 \,|\, s \in (S\backslash Y_n)\backslash \left(\bigcup_{i<n}(S\backslash Y_i)\right)\} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $f_*(\mathcal{U})$ der Bildfilter von $\mathcal{U}$ unter F:

$$f_*(\mathcal{U}) := \{X \subseteq \omega \,|\, f^{-1}\text{''}X \in \mathcal{U}\}.$$

Nach Lemma 1.1.16 ist $f_*(\mathcal{U})$ dann ein Ultrafilter auf ω, also nach (1) fixiert. Es muß also ein $n \in \omega$ mit $f^{-1}(n) \in \mathcal{U}$ geben. Aber es gilt

$$f^{-1}(0) = S\backslash(\bigcup_{i\in\omega}(S\backslash Y_i)) = \bigcap_{i\in\omega} Y_i \notin \mathcal{U},$$

und für alle $n > 0$ gilt

$$f^{-1}(n) \subseteq S\backslash Y_{n-1} \notin \mathcal{U},$$

also kann $f_*(\mathcal{U})$ nicht fixiert sein, Widerspruch zu (1). Also muß jeder Ultrafilter unter $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ $\aleph_1$-vollständig sein. □

Unter AC kann jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitert werden, dies ist unter AD nicht möglich. Erstens benutzt der entsprechende Beweis das Auswahlaxiom, und zweitens läßt sich z.B. der Fréchet-Filter F, definiert durch

$$F := \{X \subseteq \omega \,|\, |\omega\backslash X| < \aleph_0\},$$

nicht zu einem Ultrafilter erweitern. Denn für alle $x \in \omega$ gilt $\omega\backslash\{x\} \in F$, also wäre der Ultrafilter, der F erweitert, frei. Er wäre auch nicht $\aleph_1$-vollständig, denn auf einer abzählbaren Menge kann kein $\aleph_1$-vollständiger freier Ultrafilter existieren. Also gibt es unter AD keinen Ultrafilter, der den Fréchet-Filter erweitert.

2.3 Weitere Eigenschaften von $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$

Das Axiom der Determiniertheit hat eine Reihe erstaunlicher Konsequenzen. Insbesondere gilt der folgende Satz über Regularitätseigenschaften von Teilmengen der reellen Zahlen:

2.3.1 Satz: [$\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$] Jede Teilmenge der reellen Zahlen ist Lebesgue-meßbar, besitzt die Baire-Eigenschaft, und ist entweder abzählbar oder besitzt eine perfekte Teilmenge.

Beweis: Der Beweis zur Lebesgue-Meßbarkeit befindet sich in [**MySt64**]. Die Idee zu dem Spiel, mit dem man die Baire-Eigenschaft für beliebige Teilmengen der reellen Zahlen beweisen kann, stammt von Stanisław Mazur, Stefan Banach bewies 1935 die Baire-Eigenschaft, der erste veröffentlichte Beweis stammt jedoch von John Oxtoby aus dem Jahr 1957, er findet sich in [**Ox57**]. Ein Beweis zur letzten Eigenschaft findet sich in [**Da64**, Theorem 2.1].

Wir hatten schon gesagt, daß das Axiom der Determiniertheit dem Auswahlaxiom widerspricht. Es stellt sich also die Frage, wieviel Auswahl mit AD verträglich ist.

2.3.2 Satz: [$\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$] Es gilt $\mathsf{AC}_\omega(X)$ für alle X, zu denen eine Surjektion $f:\omega^\omega\to X$ existiert, d.h. jede abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen eines Raums, auf den der Baire-Raum surjektiv abgebildet werden kann, besitzt eine Auswahlfunktion.

Beweis: Sei $\langle X_i\,|\,i\in\omega\rangle$ eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von X. Dann ist $\langle f^{-1}[X_i]\,|\,i\in\omega\rangle$ wegen der Surjektivität von f eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von ω^ω. Angenommen, es gibt für diese Familie eine Auswahlfunktion

$$g:\langle f^{-1}[X_i]\,|\,i\in\omega\rangle\to\bigcup_{i\in\omega}f^{-1}[X_i]\text{ mit }g(f^{-1}[X_i])\in f^{-1}[X_i]\text{ für alle }i\in\omega.$$

Dann gilt $f(g(f^-1[X_i]))\in f(f^{-1}[X_i])\subseteq X_i$ für alle $i\in\omega$, d.h.

$$h:\langle X_i\,|\,i\in\omega\rangle\to\bigcup_{i\in\omega}X_i\text{ mit }h(X_i):=f(g(f^{-1}[X_i])).$$

ist eine Auswahlfunktion für die Familie $\langle X_i\,|\,i\in\omega\rangle$. Es genügt also $\mathsf{AC}_\omega(\omega^\omega)$ zu beweisen.

Sei $\mathcal{X}:=\langle X_i\,|\,i\in\omega\rangle$ eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von ω^ω. Wir betrachten das Spiel $G(A)$, wobei die Gewinnmenge A definiert ist durch

$$A:=\{x\in\omega^\omega\,|\,x_{\mathrm{II}}\notin X_{x(0)}\}.$$

In diesem Spiel besitzt Spieler I keine Gewinnstrategie: Durch seinen ersten Zug legt Spieler I die Menge $X_{x(0)}$ fest, da diese nicht leer ist, kann Spieler II also durch seine Züge ein Element dieser Menge spielen. Wir arbeiten unter AD, da

Spieler I keine Gewinnstrategie besitzt, muß Spieler II eine besitzen. Es gibt also eine Strategie τ für Spieler II, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt: $(x * \tau)_{\mathrm{II}} \in X_{x(0)}$. Mit Hilfe dieser Strategie können wir nun eine Auswahlfunktion g für $\mathcal{X}$ definieren:

$$g : \langle X_i \,|\, i \in \omega\rangle \to \bigcup_{i\in\omega} X_i, \text{ definiert durch } f(X_n) := (\langle n, 0, 0, 0, \dots .\rangle * \tau)_{\mathrm{II}}.$$

□

Aus dem Axiom der Determiniertheit folgt also abzählbare Auswahl für Mengen reeller Zahlen. Mehr Auswahl ist möglich, Alexander Kechris zeigte 1978, wenn $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ konsistent ist, so ist auch $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}+\mathsf{DC}$[2] konsistent (siehe [**Ke78**]). Allerdings impliziert AD nicht DC, Solovay zeigte 1978, wenn $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ konsistent ist, so ist auch $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}+\neg\mathsf{DC}$ konsistent (siehe [**So78**]).

In der Literatur über AD wird meist unter der Annahme $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}+\mathsf{DC}$ gearbeitet. Manchmal vereinfacht die Annahme von DC die Beweise etwas, aber meistens wird DC nicht benötigt. Wir arbeiten rein unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$, nur bei einigen Bemerkungen wird $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}+\mathsf{DC}$ die adäquate Theorie sein, darauf wird aber an den entsprechenden Stellen explizit hingewiesen.

Unter ZFC ist die Existenz Großer Kardinalzahlen nicht beweisbar. Wie aber ist die Situation unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$? Wie in der Einleitung bemerkt ist ohne AC eine meßbare Kardinalzahl nicht automatisch eine unerreichbare Kardinalzahl, unter AD ist die Existenz eine Vielzahl solcher nicht unerreichbarer, meßbarer Kardinalzahlen beweisbar. Robert Solovay bewies 1967 die Meßbarkeit von $\aleph_1$ unter AD und 1968 die Meßbarkeit von $\aleph_2$ (siehe [**Ka94**, S. 384, Theorem 28.2], bzw. [**Ka94**, S. 388, Theorem 28.6]).

Wir werden unter AD die Meßbarkeit der sogenannten projektiven Ordinalzahlen zeigen, dabei gehen wir wie in dem Artikel von Kechris [**Ke78**] vor.

2.3.3 Definition: Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Präwohlordnung auf M*, wenn R transitiv, reflexiv und konnex ist, und außerdem die durch $x <_R y :\Leftrightarrow x\,R\,y \wedge \neg(y\,R\,x)$ definierte Relation $<_R$ fundiert ist.

2.3.4 Definition: Sei $n > 0$. Die *projektiven Ordinalzahlen* $\boldsymbol{\delta}^1_n$ sind definiert durch

$$\boldsymbol{\delta}^1_n := \sup\{\eta \,|\, \eta \text{ ist die Länge einer } \boldsymbol{\Delta}^1_n\text{-Präwohlordnung, von } \omega^\omega\}.$$

Unter AD sind diese Ordinalzahlen nicht nur Kardinalzahlen, es läßt sich sogar zeigen, daß alle projektiven Ordinalzahlen meßbar sind. Desweiteren sind unter AD $\aleph_1$ und $\aleph_2$ die ersten beiden projektiven Ordinalzahlen, womit wir einen weiteren Beweis ihrer Meßbarkeit erhalten. Für den Beweis zur Meßbarkeit der projektiven Ordinalzahlen benötigen wir einige Definitionen und Theoreme. Diese Definitionen und Theoreme formulieren wir nicht allgemein, sondern nur in der Form, die wir für den Beweis der Meßbarkeit aller projektiven Ordinalzahlen $\boldsymbol{\delta}^1_n$

[2] DC bezeichnet das Axiom der abhängigen Auswahl, Principle of Dependent Choices, siehe z.B. [**Ka94**, S.132].

benötigen (siehe Satz 2.3.12(5)). Für eine allgemeinere Form und ausführliche Beweise sei auf [**Mo80**] verwiesen.

2.3.5 Definition: Wir können Elemente von ${}^{\omega}(\omega^\omega)$ durch Elemente von ω^ω kodieren: Sei $x \in \omega^\omega$, wir bekommen eine Sequenz $\langle (x)_i \,|\, i \in \omega\rangle$ durch

$$(x)_i(m) := x(p_i^{m+1}-2), \text{ dabei bezeichne } p_i \text{ die } (i+1)\text{-te Primzahl.}$$

2.3.6 Definition: Eine Menge W ist *universell für* $\mathbf{\Sigma}^1_n \cap {}^2(\omega^\omega)$ wenn gilt:

(1) W ist eine Teilmenge von ${}^3(\omega^\omega)$ und ein Element von $\mathbf{\Sigma}^1_n$.
(2) Eine Teilmenge A von ${}^2(\omega^\omega)$ ist genau dann ein Element von $\mathbf{\Sigma}^1_n$, wenn es ein $x \in \omega^\omega$ mit $A = \{y \in {}^2(\omega^\omega) \,|\, \langle y, x\rangle \in W\}$ gibt.

2.3.7 Lemma: [$\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$]
Sei $n > 0$, es existiert eine Σ^1_n-Menge W, die universell für $\mathbf{\Sigma}^1_n \cap {}^2(\omega^\omega)$ ist.

Beweis: Siehe [**Ka94**, Kapitel 3, S. 158].

2.3.8 Definition: Eine Menge B *uniformisiert eine Menge* $A \subseteq (\omega^\omega \times {}^m(\omega^\omega))$ wenn gilt:

(1) B ist eine Teilmenge von A.
(2) Für alle $\vec{y} \in {}^m(\omega^\omega)$, für die ein $x \in \omega^\omega$ existiert mit $\langle x, \vec{y}\rangle \in A$, gibt es genau ein $x' \in \omega^\omega$ mit $\langle x', \vec{y}\rangle \in B$.

2.3.9 Satz: [$\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$](Uniformisierungstheorem von Moschovakis)
Sei $n > 0$. Jede $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Menge $A \subseteq (\omega^\omega \times {}^m(\omega^\omega))$ kann durch eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Teilmenge B uniformisiert werden.

Beweis: Siehe [**Mo80**, S. 317, Theorem 6C.5].

2.3.10 Definition: Sei A eine Teilmenge von ω^ω, $\preceq$ eine Präwohlordnung auf A. Sei $\varphi : A \to \eta := \mathrm{length}(\preceq)$ die kanonisch von der Präwohlordnung induzierte Norm (d.h. $\varphi(x) \leq \varphi(y) \Leftrightarrow x \preceq y$). Für Funktionen $f : \eta \to \mathcal{P}({}^n(\omega^\omega))$ definieren wir

$$\mathrm{Code}(f, \preceq) := \{\langle x, \vec{y}\rangle \in {}^{n+1}(\omega^\omega) \,|\, x \in A \wedge \vec{y} \in f(\varphi(x))\}.$$

2.3.11 Satz: [$\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$](*Coding Lemma* von Moschovakis)
Sei $n > 0$. Sei $\preceq$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Präwohlordnung einer Teilmenge von ω^ω, sei η die Länge dieser Präwohlordnung. Dann existiert zu jeder Funktion $f : \eta \to \mathcal{P}({}^n(\omega^\omega))$ eine Funktion $g : \eta \to \mathcal{P}({}^n(\omega^\omega))$ mit

(1) Für alle $\alpha \in \eta$ gilt $g(\alpha) \subseteq f(\alpha)$.
(2) Für alle $\alpha \in \eta$ folgt $g(\alpha) \neq \varnothing$ aus $f(\alpha) \neq \varnothing$.
(3) $\mathrm{Code}(g, \preceq)$ ist eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Menge.

Beweis: Siehe [**Mo80**, Theorem 7D.5].

Das *Coding Lemma* von Moschovakis (siehe auch [**Mo70**], [**Mo80**, S. 426, Theorem 7D.5]) ist ein wichtiges Handwerkszeug, um Aussagen über die Komplexität von Ordinalzahl-Mengen unterhalb von Θ zu beweisen[3]. Auch werden wir es im Beweis des nächsten Satzes benötigen.

2.3.12 Satz: $[\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}]$

(1) Alle projektiven Ordinalzahlen sind Kardinalzahlen.
(2) Alle projektiven Ordinalzahlen sind regulär.
(3) Alle projektiven Ordinalzahlen mit geradem Index sind Nachfolger der projektiven Ordinalzahlen mit ungeradem Index, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+ \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

(4) Es gilt $\boldsymbol{\delta}^1_1 = \aleph_1$ und $\boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2$.
(5) Alle projektiven Ordinalzahlen sind meßbar.

Beweis: Beweise für alle Aussagen dieses Satzes finden sich z.B. in [**Ke78**]. In [**En01**] sind die Aussagen (1)-(4) ausführlich und sehr verständlich bewiesen. Wir werden nur die Aussage (5) beweisen, dabei gehen wir wie in [**Ke78**] vor. Das Spiel, das im folgenden definiert und verwendet wird, ist ein sogenanntes Solovay-Spiel. Ein ähnliches Spiel wurde von Solovay verwendet, um unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ die Meßbarkeit von $\aleph_1$ zu beweisen, in [**St98**, S. 62, Abschnitt 5.1] befindet sich eine ausführliche Darstellung dieses Beweises, siehe auch [**Ka94**, S. 384, Theorem 28.2].

Sei $n \geq 0$. Nach Lemma 2.3.7 existiert eine Menge $W \in {}^3(\omega^\omega)$, die universell für $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \cap {}^2(\omega^\omega)$ ist. Wir definieren:

$$S := \{x \in \omega^\omega \,|\, W_x \text{ ist eine wohlfundierte binäre Relation auf } \omega^\omega\}.$$

Für $x \in S$ sei $\|x\|$ der Ordnungstyp von (ω^ω, W_x). Dann gilt

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{\|x\| \,|\, x \in S\}.$$

Sei A eine Teilmenge von $\boldsymbol{\delta}^1_n$. Wir definieren ein Spiel G^A: Beide Spieler spielen Elemente von ω, sei $x = x_{\mathrm{I}} * x_{\mathrm{II}}$ eine Partie. Es soll folgende Regel eingehalten werden:

$$\forall i \in \omega((x_{\mathrm{I}})_i \in S \wedge (x_{\mathrm{II}})_i \in S).$$

Spieler II gewinnt die Partie $x = x_{\mathrm{I}} * x_{\mathrm{II}}$, falls Spieler I die Regel zuerst bricht, d.h. wenn gilt

$$\min\{i \in \omega \,|\, (x_{\mathrm{I}})_i \notin S\} < \min\{i \in \omega \,|\, (x_{\mathrm{II}})_i \notin S\},$$

oder, falls beide Spieler die Regel beachten, falls folgendes gilt:

$$\sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|\} \cup \sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{II}})_i\|\} \in A.$$

[3] Θ ist folgende Ordinalzahl: $\Theta := \sup\{\alpha \,|\, \text{Es gibt eine Surjektion von } \omega^\omega \text{ nach } \alpha\}$.

Ansonsten gewinnt Spieler I. Wir definieren eine Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{P}(\boldsymbol{\delta}^1_n)$:

$$\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\delta}^1_n) \,|\, \text{Spieler II hat in dem Spiel } G^A \text{ eine Gewinnstrategie}\}.$$

Dieses $\mathcal{U}$ ist gerade ein Zeuge der Meßbarkeit von $\boldsymbol{\delta}^1_n$, d.h. wir müssen zeigen, daß $\mathcal{U}$ ein $\boldsymbol{\delta}^1_n$-vollständiger freier Ultrafilter auf $\boldsymbol{\delta}^1_n$ ist.

Nach Definition der Gewinnmenge kann Spieler II für $\varnothing$ keine Gewinnstrategie haben, also gilt $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Da weiterhin $\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{\|x\| \,|\, x \in S\}$ gilt, muß Spieler II nur die Regel beachten, um das Spiel für die Menge $\boldsymbol{\delta}^1_n$ zu gewinnen, also gilt $\boldsymbol{\delta}^1_n \in \mathcal{U}$.

Sei A ein Element von $\mathcal{U}$, $B \subseteq \boldsymbol{\delta}^1_n$ eine Obermenge von A. Dann ist auch B ein Element von $\mathcal{U}$, denn nach Definition des Spiels ist eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel G^A auch eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel G^B.

Seien A und B Elemente von $\mathcal{U}$. Es existiert also eine Gewinnstrategie τ für Spieler II im Spiel G^A und eine Gewinnstrategie σ für Spieler II im Spiel G^B. Aus τ und σ bilden wir eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel $G^{A\cap B}$. Dazu führen wir eine weitere Verknüpfung von zwei Elementen aus ω^ω ein: Seien x und y aus ω^ω, bilde $x \otimes y \in \omega^\omega$ wie folgt:

$$\forall i \in \omega (x \otimes y)_i := \begin{matrix} (x)_n & \text{falls } i = 2n \\ (y)_n & \text{falls } i = 2n+1 \end{matrix}$$

Dabei benötigen wir zum Bilden des i-ten Gliedes der Folge $x \otimes y$ nur die Kenntnis der ersten $i-1$ Glieder von x und y, es ist also möglich $(x \otimes y) \restriction (n+1)$ aus $x \restriction n$ und $y \restriction n$ zu konstruieren. In einer Partie des Spiels $G^{A\cap B}$, Spieler I spiele x_{I}, geht Spieler II wie folgt vor: Er konstruiert sukzessiv simultan zwei Elemente y' und y'' von ω^ω:

$$y'(n) := \tau((x_{\mathrm{I}} \otimes y'') \restriction (n-1)),$$

$$y''(n) := \sigma((x_{\mathrm{I}} \otimes y') \restriction (n-1)).$$

Aus y' und y'' konstruiert Spieler II seine Zugfolge $y' \otimes y''$, die entstehende Partie ist also $x_{\mathrm{I}} * (y' \otimes y'')$. Dann ist $(x_{\mathrm{I}} \otimes y'') * y'$ eine Partie im Spiel G^A in der Spieler II mit der Gewinnstrategie τ spielt, also gilt

$$\sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}} \otimes y'')_i\|, \|(y')_i\|\} = \sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|(y')_i\|, \|(y'')_i\|\} \in A.$$

Andererseits ist $(x_{\mathrm{I}} \otimes y') * y''$ eine Partie im Spiel G^B in der Spieler II mit der Gewinnstrategie σ spielt, also gilt

$$\sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}} \otimes y')_i\|, \|(y'')_i\|\} = \sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|(y')_i\|, \|(y'')_i\|\} \in B.$$

In der Partie $x_{\mathrm{I}} * (y' \otimes y'')$ des Spiels $G^{A\cap B}$ gilt also

$$\sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|(y' \otimes y'')_i\|\} = \sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|(y')_i\|, \|(y'')_i\|\} \in A \cap B.$$

Damit hat Spieler II in $G^{A\cap B}$ eine Gewinnstrategie, es gilt $A \cap B \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ ist also ein Filter auf $\boldsymbol{\delta}^1_n$.

$\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter: Angenommen, für eine Teilmenge A von $\boldsymbol{\delta}^1_n$ gilt $A \notin \mathcal{U}$. Dann hat Spieler II keine Gewinnstrategie in dem Spiel G^A, da AD vorausgesetzt wird besitzt also Spieler I eine Gewinnstrategie τ. Damit gilt für eine Partie, in der II x_{II} und I nach τ spielt

$$\sup_{i\in\omega}\{\|((\tau * x_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I}})_i\|, \|(x_{\mathrm{II}})_i\|\} \in (\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A).$$

Im Spiel $G^{\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A}$ spielt Spieler II nun nach folgender Strategie σ:

$$x_n := \sigma(x_0, \dots, x_{n-1}) := \begin{cases} \tau(\varnothing) & \text{falls } n = 0, \\ \tau(x_1, x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n-2}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Spieler II spielt also so, als ob er Spieler I sei und nach τ spielt:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I'=II} & x_1 := \tau(\varnothing) & & x_3 := \tau(x_1, x_0) & & \tau(x_1, x_0, x_3, x_2) & \dots \\ \text{II'=I} & & x_0 & & x_2 & & \dots \end{array}$$

Dadurch aber gilt in einer Partie $x_{\mathrm{I}} * \sigma$ in der II mit σ spielt

$$\begin{aligned} &\sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|((x_{\mathrm{I}} * \sigma)_{\mathrm{II}})_i\|\} \\ &= \sup_{i\in\omega}\{\|(x_{\mathrm{I}})_i\|, \|((\tau * x_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}})_i\|\} \in (\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A). \end{aligned}$$

Also ist σ eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel $G^{\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A}$, damit gilt also $(\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A) \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter.

Um zu beweisen, daß $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist, reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{U}$ keine in $\boldsymbol{\delta}^1_n$ beschränkten Teilmengen von $\boldsymbol{\delta}^1_n$ enthält (siehe Lemma 1.1.5(2)). Angenommen, $A \in \mathcal{U}$ sei in $\boldsymbol{\delta}^1_n$ beschränkt, $\delta := \sup A < \boldsymbol{\delta}^1_n$. Da $\boldsymbol{\delta}^1_n$ regulär ist, gibt es ein $\alpha \in \mathrm{On}$ mit $\delta < \alpha < \boldsymbol{\delta}^1_n$, um zu gewinnen muß Spieler I also nur so spielen, daß er die Regel nicht verletzt und $\alpha = (x_{\mathrm{I}})_i$ für ein $i \in \omega$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß Spieler II eine Gewinnstrategie besitzt, also sind alle Elemente von $\mathcal{U}$ unbeschränkt in $\boldsymbol{\delta}^1_n$, und damit ist $\mathcal{U}$ frei.

Es bleibt noch die $\boldsymbol{\delta}^1_n$-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ zu beweisen. Nach Lemma 1.1.8 genügt es zu beweisen, daß für jede Sequenz $\langle A_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle$ von Filterelementen mit Länge $\gamma < \boldsymbol{\delta}^1_n$ der Schnitt dieser Sequenz nicht leer ist, d.h. es muß $\bigcap_{\alpha\in\gamma} A_\alpha \neq \varnothing$ gelten. Sei also $\gamma < \boldsymbol{\delta}^1_n$ beliebig und $\langle A_\alpha \,|\, \alpha \in \gamma\rangle$ eine Sequenz mit Elementen in $\mathcal{U}$.

Sei $\preceq$ eine $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-Präwohlordnung von ω^ω der Länge $\gamma < \boldsymbol{\delta}^1_n$ und $\varphi : \omega^\omega \to \gamma$ die durch $\preceq$ induzierte Norm. Definiere eine Funktion f auf γ durch

$$f(\alpha) := \{\tau \,|\, \tau \text{ ist eine Gewinnstrategie für II im Spiel } G^{A_\alpha}\}.$$

Dann gibt es nach dem Coding Lemma 2.3.11 eine Funktion g mit

(1) Für alle $\alpha < \gamma$ gilt $g(\alpha) \subseteq f(\alpha)$.
(2) Für alle $\alpha < \gamma$ folgt $g(\alpha) \neq \varnothing$ aus $f(\alpha) \neq \varnothing$.
(3) Es gibt ein $z \in \omega^\omega$ so daß $\mathrm{Code}(g, \preceq)$ eine $\Sigma^1_n(z)$-Menge ist.

Als nächstes beweisen wir, daß für jedes $m \geq 0$ eine Funktion $f_m : S^{m+1} \to S$ existiert, so daß für alle $x^0, \dots, x^m \in S$, für alle $x \in \omega^\omega$ mit $(x)_i = x^i$ für $i \leq m$ und für alle $\tau \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} g(\alpha)$ folgendes gilt:

$$\|f_m(x^0, \dots, x^m)\| \geq \|(x * \tau)_m\|.$$

Sei dazu $x^0, \dots, x^m \in S$ beliebig, wir definieren eine wohlfundierte Relation $\prec_{x^0,\dots,x^m}$:

$$\begin{aligned}(x, y, \tau, z) \prec_{x^0,\dots,x^m} (x', y', \tau', z') \quad :\Leftrightarrow \quad & x = x' \land y = y' \land \tau = \tau' \\ & \land \forall i \leq m((x)_i = x^i) \\ & \land (y, \tau) \in \mathrm{Code}(g, \preceq) \\ & \land (z, z') \in W_{(x*\tau)_m}\end{aligned}$$

Dann ist $\prec_{x^0,\dots,x^m}$ eine $\Sigma^1_n(x^0, \dots, x^m, z)$-Relation mit einer Länge die größer gleich $\|(x * \tau)_m\|$ ist. Sei $f'_m : \gamma \to \mathcal{P}(^{m+1}(\omega^\omega))$ definiert durch:

$$f'_m(\alpha) = \{\langle x^0, \dots, x^m\rangle \mid \alpha = \|\prec_{x^0,\dots,x^m}\|\}.$$

Sei $\preceq'$ die zur Norm $\varphi'(x) := \|x\|$ gehörende Präwohlordnung auf S. Wir wenden wiederum das Coding Lemma 2.3.11 an, diesmal auf f'_m, und erhalten eine Funktion g_m mit:

(1) Für alle $\alpha < \gamma$ gilt $g_m(\alpha) \subseteq f'_m(\alpha)$.
(2) Für alle $\alpha < \gamma$ folgt $g_m(\alpha) \neq \varnothing$ aus $f'_m(\alpha) \neq \varnothing$.
(3) $\mathrm{Code}(g_m, \preceq')$ ist eine $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$-Menge.

Aus $\mathrm{Code}(g_m, \preceq')$ bekommen wir durch Uniformisierung nach Satz 2.3.9 eine Funktion $f_m : S^{m+1} \to S$ mit

$$\|f_m(x^0, \dots, x^m)\| = \|\prec_{x^0,\dots,x^m}\| \geq \|(x * \tau)_m\|.$$

Diese Funktion erfüllt unsere Anforderungen.

Sei nun $x^0 \in S$ beliebig, definiere induktiv für $m \geq 0$

$$x^{m+1} := f_m(x^0, \dots, x^m).$$

Sei $\delta := \sup\{\|x^i\| \mid i \in \omega\}$. Für $\alpha < \gamma$ betrachten wir folgende Partie im Spiel G^{A_α}: Spieler I spielt ein $x_{\mathrm{I}} \in \omega^\omega$ mit $(x_{\mathrm{I}})_i = x^i$ für alle $i \in \omega$, Spieler II spielt mit einer Strategie τ aus $g(\alpha)$. Also halten sich beide Spieler an die Regel, und da τ eine Gewinnstrategie für II ist, gilt nach Definition der x^i:

$$\sup_{i\in\omega}\{(x_{\mathrm{I}})_i, ((x_{\mathrm{I}} * \tau)_{\mathrm{II}})_i\} = \sup_{i\in\omega}\{(x_{\mathrm{I}})_i\} = \sup_{i\in\omega}\{x^i\} = \delta \in A_\alpha.$$

Dies gilt für alle $\alpha < \gamma$, daher gilt $\delta \in \bigcap_{\alpha\in\gamma} A_\alpha$, nach Lemma 1.1.8 ist $\mathcal{U}$ also $\boldsymbol{\delta}^1_n$-vollständig.

□

Wir haben nun also bewiesen, daß alle projektiven Ordinalzahlen unter AD meßbar sind, d.h. auf $\boldsymbol{\delta}^1_n$ existiert ein $\boldsymbol{\delta}^1_n$-vollständiger freier Ultrafilter. Hieraus folgt jedoch nicht, wie unter ZFC, die Existenz eines normalen Ultrafilters auf $\boldsymbol{\delta}^1_n$.

In Kapitel 5 verwenden wir die Existenz normaler Ultrafilter auf den projektiven Ordinalzahlen, um zu zeigen, daß unter $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ die $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}$-superkompakt sind. Ohne die Normalität der Ultrafilter, d.h. nur mit der Meßbarkeit der $\boldsymbol{\delta}^1_n$, folgt aus den in Satz 5.6 verwendeten Methoden jedoch nur die $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}$-Kompaktheit[4] von $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$.

Ein vollständiger Beweis der Sätze, die benötigt werden, um die Existenz normaler Ultrafilter auf den projektiven Ordinalzahlen zu zeigen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Zudem wird dieses Resultat nur in dem Satz 5.6 benötigt, daher seien an dieser Stelle nur die benötigten Theoreme genannt, für die entsprechenden Beweise sei auf den Artikel von Alexander Kechris verwiesen. Aber auch wenn hier die benötigten Resultate nur aufgelistet werden, müssen zu deren Verständnis einige zusätzliche Definitionen und Notationen eingeführt werden.

2.3.13 Definition: Sei C Teilmenge einer Limesordinalzahl δ. C ist *abgeschlossen in* δ genau dann wenn gilt:

$$\forall \alpha < \delta \, (\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge (\forall \beta < \alpha \, \exists \gamma < \alpha \, (\gamma > \beta \, \wedge \, \gamma \in C)) \, \Rightarrow \, \alpha \in C).$$

(d.h. C enthält jede Limesordinalzahl $\alpha < \delta$, in der $C \cap \alpha$ konfinal ist.)

C ist *abgeschlossen unbeschränkt in* δ genau dann, wenn C abgeschlossen in δ und unbeschränkt in δ ist. Statt abgeschlossen unbeschränkt benutzen wir den kürzeren Begriff *club* (für engl. *closed unbounded*). Der Filter, der von den Mengen erzeugt wird, die club in δ sind, bezeichnet man mit $\mathcal{C}_\delta$. Für reguläre Kardinalzahlen $\kappa > \omega$ ist der Filter $\mathcal{C}_\kappa$ normal, d.h. frei, κ-vollständig und unter Diagonalschnitten abgeschlossen (siehe [**Ka94**, S. 3, Proposition 0.1]).

2.3.14 Definition: Seien $\lambda < \kappa$ beides reguläre Kardinalzahlen. Eine Menge C ist λ-*club in* κ genau dann, wenn sie eine in κ unbeschränkte Menge ist, die alle Limesordinalzahlen α der Konfinalität λ enthält, in denen $C \cap \alpha$ konfinal ist. Den von diesen Mengen erzeugten Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^\lambda_\kappa$. Also ist $\mathcal{C}^\lambda_\kappa$ definiert durch

$$\mathcal{C}^\lambda_\kappa := \{X \subseteq \kappa \,|\, \exists C \in \mathcal{C}_\kappa (C \cap \{\alpha < \kappa \,|\, \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\} \subseteq X)\}.$$

2.3.15 Definition: Sei A Teilmenge einer Kardinalzahl κ und β eine Ordinalzahl. Mit $[A]^\beta$ bezeichnet man die Menge der aufsteigenden Sequenzen in A mit Ordnungstyp β. Also ist $[A]^\beta$ definiert durch

$$[A]^\beta := \{\langle \alpha_i \,|\, i \in |\beta| \rangle \in {}^{|\beta|}A \,|\, \forall i < j \in |\beta| \, ((\alpha_i < \alpha_j) \wedge \mathrm{otp}(\langle \alpha_i \,|\, i \in |\beta| \rangle) = \beta)\}.$$

2.3.16 Definition: Seien κ und λ Kardinalzahlen, α eine Ordinalzahl. Wir definieren folgende Notation:

$$\kappa \to (\lambda)^\alpha \; :\Leftrightarrow \; \forall F : [\kappa]^\alpha \to 2 \, \exists H \subseteq \kappa \, (|H| = \lambda \wedge |F``([H]^\alpha)| = 1\}).$$

[4]Eine Kardinalzahl κ ist γ-*kompakt*, wenn es einen κ-vollständigen feinen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ gibt.

Dies bedeutet gerade, daß jede 2er-Partition von $[\kappa]^\alpha$ eine homogene Menge der Größe λ besitzt. Falls $\kappa \to (\lambda)^\alpha$ gilt, so gilt auch $\mu \to (\nu)^\beta$ für alle $\mu \geq \kappa$, $\nu \leq \lambda$ und $\beta \leq \alpha$.

Im ZFC-Kontext ist $\aleph_1 \to (\aleph_1)^\omega$ nicht möglich, ein Resultat von Paul Erdős und Richard Rado [**ErRa52**] (siehe auch [**Ka94**, S. 71, Proposition 7.1] für einen Beweis). Im $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$-Kontext dagegen konnten Donald Martin und Kenneth Kunen zeigen, daß für die projektiven Ordinalzahlen die abzählbare Partitions-Eigenschaft gilt[5].

2.3.17 Satz: $[\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}]$(Martin 1971) Für alle $n \geq 0$ und $\lambda < \omega_1$ gilt

$$\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} \to (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^\lambda.$$

Beweis: Siehe [**Ke78**, S. 115, Theorem 11.2].

2.3.18 Satz: $[\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}]$(Kunen 1971) Für alle $n \geq 1$ und $\lambda < \omega_1$ gilt

$$\boldsymbol{\delta}^1_{2n} \to (\boldsymbol{\delta}^1_{2n})^\lambda.$$

Beweis: Siehe [**Ke78**, S. 124, Theorem 16.1].

Durch ein Theorem von Eugene Kleinberg erhalten wir nun einen Zusammenhang zwischen Partitions-Eigenschaften und Existenz bestimmter normaler Ultrafilter.

2.3.19 Satz: $[\mathsf{ZF}]$(Kleinberg 1970) Seien $\lambda < \kappa$ beides reguläre Kardinalzahlen und es gelte $\kappa \to (\kappa)^{\lambda+\lambda}$. Dann ist κ meßbar, und $\mathcal{C}^\lambda_\kappa$ ist ein normaler Ultrafilter auf κ.

Beweis: Siehe [**Kl70**] oder [**Ka94**, S. 391, Theorem 28.10].

Nun können wir die Existenz normaler Ultrafilter auf den projektiven Ordinalzahlen beweisen. Nach den Sätzen von Martin und Kunen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{\delta}^1_n \to (\boldsymbol{\delta}^1_n)^{\omega+\omega}.$$

Also ist nach Kleinberg für jede projektive Ordinalzahl $\boldsymbol{\delta}^1_n$ der ω-club Filter $\mathcal{C}^\omega_{\boldsymbol{\delta}^1_n}$ ein normaler Ultrafilter auf $\boldsymbol{\delta}^1_n$. Damit haben wir gezeigt, daß die projektiven Ordinalzahlen unter AD nicht nur meßbar sind, sondern daß ihre Meßbarkeit sogar von normalen Ultrafiltern bezeugt wird.

[5] Ob $\aleph_0 \to (\aleph_0)^\omega$ unter AD gilt ist bisher unbekannt, dies wäre äquivalent dazu, daß unter AD jede Menge reeller Zahlen die Ramsey-Eigenschaft hat, siehe auch [**Ka94**, Question 27.18] und [**Ka94**, S. 144].

Kapitel 3

Superkompakte Kardinalzahlen

Wie Keisler 1962 zeigte, folgt aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl κ die Existenz einer nichttrivialen Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ mit kritischem Punkt $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, wobei wir schon angemerkt haben, daß dieser Beweis das Auswahlaxiom benötigt. In der so gewonnenen Einbettung gilt ${}^{\kappa}M \subseteq M$. In den späten Sechzigern untersuchten Solovay, Reinhardt und Kanamori verschiedene Verallgemeinerungen dieser Einbettungseigenschaft. Dadurch gelangten sie zu stärkeren Großen Kardinalzahleigenschaften, und und entwickelten unter anderem den Begriff der Superkompaktheit.

3.1 Definition per Einbettung

3.1.1 Definition: Seien $\kappa \leq \gamma$ Kardinalzahlen. κ ist *γ-superkompakt*, wenn es eine elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \prec M$ mit kritischem Punkt κ gibt, die zusätzlich ${}^{\gamma}M \subseteq M$ und $\gamma < j(\kappa)$ erfüllt. Ist κ κ^+-superkompakt, so bezeichnen wir κ auch als *Nachfolger-superkompakt*. Eine Kardinalzahl κ ist *superkompakt*, wenn κ für alle $\gamma \geq \kappa$ γ-superkompakt ist.

Eine Kardinalzahl κ ist also unter ZFC nach Lemma 1.4.4 genau dann meßbar, wenn sie κ-superkompakt ist, und falls κ γ-superkompakt ist, so ist κ auch δ-superkompakt für alle $\kappa \leq \delta \leq \gamma$. Eine superkompakte Kardinalzahl ist jedoch nicht nur meßbar, es existieren unterhalb ihr viele meßbare Kardinalzahlen, d.h. die kleinste superkompakte Kardinalzahl ist viel größer als die kleinste meßbare.

3.1.2 Lemma: [ZFC] Sei κ 2^{κ}-superkompakt. Dann existiert ein normaler Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ, so daß gilt:

$$\{\alpha < \kappa \,|\, \alpha \text{ ist meßbar}\} \in \mathcal{U}.$$

Also ist κ die κ-te meßbare Kardinalzahl.

Beweis: Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ ein Zeuge für die 2^{κ}-Superkompaktheit von κ. Sei D der aus dieser Einbettung gewonnene normale Ultrafilter (siehe Lemma 1.3.9) und $j_D : \mathbf{V} \prec \mathrm{Ult}_D$ die aus diesem Ultrafilter konstruierte elementare Einbettung in die Ultrapotenz. Sei $k : \mathrm{Ult}_D \prec M$ die elementare Einbettung von Ult_D nach M, wie in Lemma 1.3.10 definiert.

Da κ 2^κ-superkompakt ist, gilt ${}^{2^\kappa}M \subseteq M$, d.h. jede Teilmenge von M der Größe 2^κ liegt in M. Nach Lemma 1.3.5 liegt jedes Element des kritischen Punkts κ in M, also auch jede Teilmenge von κ und jede Menge von Teilmengen von κ, d.h. es gilt

$$\forall U \subseteq \mathcal{P}(\kappa)\,(U \in M).$$

Daher liegt der Ultrafilter D in M und κ ist in M meßbar.
Nach Lemma 1.3.7 gilt $\mathrm{Ult}_D \models \kappa = [\mathrm{id}]_D$, also

$$k(\kappa) = k([\mathrm{id}]_D) = (j(\mathrm{id}))(\kappa) = \kappa.$$

k ist elementar, daher gilt

$$\mathrm{Ult}_D \models \text{„}\kappa \text{ ist meßbar“},$$

also

$$\mathrm{Ult}_D \models \text{„}[\mathrm{id}] \text{ ist meßbar“}.$$

Nach dem Satz von Łoś gilt damit:

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ ist meßbar}\} \in D.$$

Die in diesem Beweis angewandte Methode werden wir in Kapitel 4 verwenden, um zu zeigen, daß unter einer superkompakten Kardinalzahl viele Woodin-Kardinalzahlen liegen. $\square$

3.2 Superkompaktheit und Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$

Wie wir in Kapitel 1 bemerkt hatten, kann der Ausdruck „j ist eine elementare Abbildung“ in ZF in einer Sprache mit zusätzlichem Symbol j für die elementare Einbettung formalisiert werden, auch wenn j eine Klasse ist. In unserer Definition von Superkompaktheit erscheint jedoch ein Quantor über elementare Abbildungen. Wir können nicht die in Kapitel 1 angesprochene Methode anwenden, um diese Definition in ZF auszudrücken. Im folgenden Abschnitt werden wir jedoch zeigen, daß unter ZFC die γ-Superkompaktheit von κ äquivalent zur Existenz eines normalen Ultrafilters auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ ist. Dadurch können wir Superkompaktheit unter ZF formalisieren, und haben auch ohne Auswahl eine Definition superkompakter Kardinalzahlen.

3.2.1 Satz: [ZFC](Solovay, Reinhardt) Sei κ eine Kardinalzahl, $\gamma \geq \kappa$ eine Ordinalzahl. κ ist genau dann γ-superkompakt, wenn es einen normalen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ gibt.

Beweis: Als erstes konstruieren wir aus der elementaren Einbettung den normalen Ultrafilter. Sei dazu $j : \mathbf{V} \prec M$ ein Zeuge für die γ-Superkompaktheit von κ. Dann gilt, nach Definition von γ-Superkompaktheit, $j"\gamma \in M$. Sei $\mathcal{U}_j$ wie folgt definiert

$$\mathcal{U}_j := \{X \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, j"\gamma \in j(X)\}.$$

Wir zeigen, daß $\mathcal{U}_j$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ ist:

Es gilt $j(\varnothing) = \varnothing$, d.h. die leere Menge ist kein Element von $\mathcal{U}_j$. Weiterhin gilt $|j"\gamma| = \gamma < j(\kappa)$, da j eine elementare Einbettung ist gilt also

$$j"\gamma \in j(\mathcal{P}_\kappa(\gamma)) = (\mathcal{P}_{j(\kappa)}(j(\gamma)))^M,$$

d.h. $\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \in \mathcal{U}_j$.

Wenn $j"\gamma \in j(X)$ und $j"\gamma \in j(Y)$ gilt, so auch

$$j"\gamma \in j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y),$$

also folgt $X \cap Y \in \mathcal{U}_j$ aus $X, Y \in \mathcal{U}_j$.

Für $X \subseteq Y$ mit $X \in \mathcal{U}_j$ gilt

$$j"\gamma \in j(X) \subseteq j(Y),$$

also ist $\mathcal{U}_j$ gegen Obermengen abgeschlossen. Damit ist $\mathcal{U}_j$ ein Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$.

$\mathcal{U}_j$ ist ein Ultrafilter: Angenommen $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ sei nicht in $\mathcal{U}_j$, d.h. es gilt $j"\gamma \notin j(X)$ nach Definition von $\mathcal{U}_j$. Dann folgt

$$j"\gamma \in j(\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X)$$

aus

$$j"\gamma \in j(\mathcal{P}_\kappa(\gamma)) = j(X) \cup j(\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X),$$

also gilt $\mathcal{P}_\kappa(\gamma) \backslash X \in \mathcal{U}_j$.

Als nächstes zeigen wir die κ-Vollständigkeit: Sei $\lambda < \kappa$ eine Ordinalzahl und $\mathcal{X} = \langle X_\alpha \,|\, \alpha < \lambda \rangle$ eine Sequenz der Länge λ mit

$$\forall \alpha < \lambda \, (j"\gamma \in j(X_\alpha)).$$

In M ist $j(\mathcal{X})$ eine Sequenz der Länge $j(\lambda)$ und für alle $\alpha < \lambda$ ist $j(X_\alpha)$ das $j(\alpha)$-te Glied von $j(\mathcal{X})$. Da aber $j(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ gilt, ist $j(\mathcal{X})$ von der Form $j(\mathcal{X}) = \langle j(X_\alpha) \,|\, \alpha < \lambda \rangle$. Also gilt

$$j(\bigcap \mathcal{X}) = \bigcap j(\mathcal{X}) = \bigcap_{\alpha < \lambda} j(X_\alpha)$$

und damit

$$j"\gamma \in j(\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} j(X_\alpha),$$

d.h. $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{U}_j$, $\mathcal{U}_j$ ist also ein κ-vollständiger Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$.

$\mathcal{U}_j$ ist fein: Für alle $\beta < \gamma$ gilt

$$j"\gamma \in \{x \in \mathcal{P}_{j(\kappa)}(j(\gamma)) \,|\, j(\beta) \in x\} = j(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \,|\, \beta \in x\}),$$

d.h. für alle $\beta < \gamma$ gilt

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \mid \beta \in x\} \in \mathcal{U}_j.$$

Also ist $\mathcal{U}_j$ ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$.

$\mathcal{U}$ ist normal: Sei $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle \in {}^\gamma\mathcal{U}_j$ eine Sequenz von Filterelementen. Da j elementar ist existiert eine Sequenz $\langle Y_\beta \mid \beta < j(\gamma)\rangle \in M$ mit

$$\langle Y_\beta \mid \beta < j(\gamma)\rangle = j(\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle),$$

also $Y_{j(\alpha)} = j(X_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$. Für alle $\alpha < \gamma$ gilt $j" \in j(X_\alpha)$. Dann gilt

$$j"\gamma \in \bigcap_{\alpha\in\gamma} j(X_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\gamma} Y_{j(\alpha)} = \bigcap_{\beta\in j"\gamma} Y_\beta.$$

Also gilt $j"\gamma \in j(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \mid x \in \bigcap_{\alpha\in x} X_\alpha\})$, damit ist $\mathcal{U}_j$ normal. Wenn κ γ-superkompakt ist, existiert also ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$. Andererseits erfüllt die durch einen normalen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ induzierte elementare Einbettung in den Ultrafilter $\mathrm{Ult}_\mathcal{U}$ nach Lemma 1.4.8 gerade die Bedingung ${}^\gamma\,\mathrm{Ult}_\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Ult}_\mathcal{U}$ und hat κ als kritischen Punkt.

Damit bezeugt diese elementare Einbettung nach Definition 3.1.1 die γ-Superkompaktheit von κ.

□

Über diese Äquivalenz kann nun γ-Superkompaktheit in ZF formalisiert werden. Wir werden eine solche Formalisierung angeben, dabei läßt sich auch die Komplexität[1] der Formel „κ ist γ-superkompakt“ bestimmen.

3.2.2 Lemma: [ZF] „$\mathrm{rg}(v_0) = v_1$“ ist Δ_1^{ZF} und „$\mathbf{V}_{v_0} = v_1$“ ist Π_1^{ZF}.

Beweis: Sei $\varphi(f)$ eine Formel, die besagt, daß f eine Rang-Funktion ist:

$$\varphi(f) := \mathrm{Fn}(f) \land \forall x \in \mathrm{dom}(f)(x \subseteq \mathrm{dom}(f) \land f(x) = \bigcup\{f(y)+1 \mid y \in x\}).$$

Dann ist $\varphi(f)$ nach Definition eine Δ_0^{ZF}-Formel. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(v_0) = v_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f\,(\varphi(f) \land \langle v_0, v_1\rangle \in f) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall f\,(\varphi(f) \land v_0 \in \mathrm{dom}(f) \to \langle v_0, v_1\rangle \in f). \end{aligned}$$

Also ist „$\mathrm{rg}(v_0) = v_1$“ eine Δ_1^{ZF}-Formel und „$\mathbf{V}_{v_0} = v_1$“ eine Π_1^{ZF}-Formel:

$$V_{v_0} = v_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall v_2(v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 \in v_0(\mathrm{rg}(v_2) = v_3)).$$

□

[1] Komplexität im Sinne der Levy-Hierarchie, siehe [**Ka94**, S. 5].

3.2.3 Lemma: [ZF] Die Aussage „κ ist γ-superkompakt“ ist Δ_2^{ZF}.

Beweis: Sei $\varphi(v_0, v_1, v_2)$ die Σ_0-Formel, in der alle Quantoren auf v_2 beschränkt sind, und die besagt, daß es einen normalen feinen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_{v_0}(v_1)$ gibt. Wie groß muß v_2 gewählt werden? Es gilt

$$\gamma \in \mathbf{V}_{\gamma+1} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_\kappa(\gamma) \subseteq \mathcal{P}(\gamma) \in \mathbf{V}_{\gamma+2}.$$

Ein Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ ist also eine Teilmenge von

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa(\gamma)) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\gamma)) \in \mathbf{V}_{\gamma+3}.$$

Zum Nachweis der Normalität eines Filters benötigen wir Funktionen von γ auf den Filter, also Mengen von Tupeln, also Mengen von Mengen von Mengen aus $\mathbf{V}_{\gamma+3}$, womit wir bei $\mathbf{V}_{\gamma+5}$ sind. Die Aussage „$\mathbf{V}_{\gamma+5} = v_2$“ ist Π_1^{ZF} nach Lemma 3.2.2. Damit gilt:

$$\begin{aligned} &\text{„}\kappa \text{ ist } \gamma\text{-superkompakt“} \\ \Leftrightarrow\ &\forall x\,(\mathbf{V}_{\gamma+5} = x \wedge \varphi(\kappa, \gamma, x)) \\ \Leftrightarrow\ &\exists x\,(\mathbf{V}_{\gamma+5} = x \rightarrow \varphi(\kappa, \gamma, x)). \end{aligned}$$

Also ist „κ ist γ-superkompakt“ eine Δ_2^{ZF}-Formel, und die Behauptung ist bewiesen. □

Kapitel 4

Superkompakte und Woodin Kardinalzahlen

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen Superkompaktheit und dem Axiom der Determiniertheit. Wir untersuchen zwei der Fragen, die sich dabei stellen:

(1) Wie ist das Verhältnis bezüglich Konsistenz von $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ und ZFC + „Es existiert eine superkompakte Kardinalzahl"?

(2) Folgt aus $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ die Existenz superkompakter Kardinalzahlen?

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der ersten Frage, wir werden mit Hilfe eines Satzes von Woodin zeigen, daß die Konsistenzstärke von ZFC + „Es existiert eine superkompakte Kardinalzahl" strikt größer ist als die Konsistenzstärke von $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$.

Die genaue Konsistenzstärke von $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ wurde von Woodin bestimmt. Leider existiert noch keine Veröffentlichung dieses Beweises, er wird sich in dem noch nicht erschienenen Buch „The Axiom of Determinacy" von Woodin, Mathias und Hauser [**WMH∞**] befinden. In [**Ka94**, Theorem 32.16] findet sich eine Beschreibung dieses Beweises[1].

4.1 Satz: (Woodin)
Die beiden Theorien ZFC+„Es gibt ω Woodin-Kardinalzahlen" und $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ sind äquikonsistent.

Es stellt sich also die Frage, in welcher Relation superkompakte und Woodin-Kardinalzahlen stehen. Als wir Superkompaktheit definiert haben, zeigten wir auch, daß unter einer superkompakten Kardinalzahl κ κ-viele meßbare Kardinalzahlen liegen. Eine ähnliche Methode verwenden wir nun, um zu zeigen, daß unter einer superkompakten Kardinalzahl viele Woodin-Kardinalzahlen liegen. Zunächst jedoch die Definition von Woodin-Kardinalzahl, die wir verwenden werden.

4.2 Definition: Eine Kardinalzahl κ ist *Woodin*, wenn es für jede Funktion $f:\kappa\to\kappa$ ein $\alpha<\kappa$ mit $f``\alpha\subseteq\alpha$ gibt, so daß eine elementare Einbettung $j:\mathbf{V}\prec M$ mit kritischem Punkt α existiert, die $\mathbf{V}_{j(f)(\alpha)}\subseteq M$ erfüllt.

Der Beweis zum nun folgenden Satz besteht aus der Aneinanderreihung mehrerer Resultate zur relativen Stärke einiger Großer Kardinalzahlen.

[1] In der Literatur verfügbar ist das Resultat von Martin und Steel aus [**MaSt89**]. In diesem Artikel zeigen sie, daß aus der Existenz von n Woodins mit einer meßbaren Kardinalzahl darüber die Determiniertheit der Punktklasse $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ folgt.

Da uns jedoch an diesem Punkt nur der Zusammenhang zwischen superkompakten und Woodin-Kardinalzahlen interessiert, verbinden wir die einzelnen Beweise zu einem einzigen. Die genauen Resultate und Beweise finden sich in [**Ka94**, S. 360–361], oder in [**MaSt89**, Lemma 4.1].

4.3 Satz: [ZFC] Sei κ 2^κ-superkompakt. Dann gibt es einen normalen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ mit $\{\alpha < \kappa \,|\, \alpha \text{ ist Woodin}\} \in U$, d.h. es existieren unterhalb von κ konfinal viele Woodin-Kardinalzahlen.

Beweis: Sei $j : \mathbf{V} \prec M$ Zeuge der 2^κ-Superkompaktheit von κ. Zuerst konstruieren wir mit Hilfe dieser elementaren Abbildung j eine elementare Abbildung in M. Dazu schränken wir zunächst j auf $\mathbf{V}_{\kappa+1}$ ein. Diese Einschränkung

$$\hat{\jmath} := j \restriction \mathbf{V}_{\kappa+1}$$

ist dann ebenfalls eine elementare Einbettung, genauer gesagt gilt

$$\hat{\jmath} : \mathbf{V}_{\kappa+1} \prec (\mathbf{V}_{j(\kappa+1)})^M.$$

Die Abschlußeigenschaften von M reichen aus, um zu zeigen, daß $\hat{\jmath}$ bereits eine Teilklasse von M ist, so daß wir also für den Rest des Beweises in M arbeiten können: Als 2^κ-superkompakte Kardinalzahl ist κ insbesondere unerreichbar, also gilt[2] $|\mathbf{V}_{\kappa+1}| = 2^\kappa$. Da κ 2^κ-superkompakt ist gilt

$${}^{2^\kappa}M \subseteq M,$$

daraus folgt, da nach Satz 1.3.11 $\mathbf{V}_{\kappa+1} = (\mathbf{V}_{\kappa+1})^M$ gilt, schließlich

$$\mathbf{V}_{\kappa+1} = (\mathbf{V}_{\kappa+1})^M \in M.$$

Also liegt $\hat{\jmath}$ in M und ist in M eine elementare Abbildung:[3]

$$M \models \hat{\jmath} : \mathbf{V}_{\kappa+1} \prec \mathbf{V}_{j(\kappa+1)}.$$

Ab diesem Punkt arbeiten wir erst einmal in M. Wir haben also eine elementare Einbettung, die jedoch auf $\mathbf{V}_{\kappa+1}$ eingeschränkt ist. Mit Hilfe dieser Einbettung $\hat{\jmath}$ läßt sich ein $(\kappa, \hat{\jmath}(\kappa))$-Extender $\mathcal{E}$ bilden. Dies ist trotz der Einschränkung von $\hat{\jmath}$ auf $\mathbf{V}_{\kappa+1}$ möglich, da

$$\mathcal{P}([\kappa]^{|a|}) \subseteq \mathbf{V}_{\kappa+1}$$

gilt, $\hat{\jmath}$ also groß genug ist, um den Extender zu definieren. $\hat{\jmath}(\kappa)$ ist in M unerreichbar, also gilt $|\mathbf{V}_{\hat{\jmath}(\kappa)}| = \hat{\jmath}(\kappa)$. Aber dann gilt nach Lemma 1.5.4

$$\mathbf{V}^{M_\mathcal{E}}_{\hat{\jmath}(\kappa)} = \mathbf{V}^M_{\hat{\jmath}(\kappa)} = \mathbf{V}_{\hat{\jmath}(\kappa)}.$$

[2] Da κ unerreichbar ist, gilt $2^\lambda < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$. Die Kardinalität von $\mathbf{V}_{\aleph_0}$ ist $\aleph_0$, damit gilt per Induktion $|\mathbf{V}_\lambda| < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$, also $|\mathbf{V}_\kappa| = \kappa$ und $|\mathbf{V}_{\kappa+1}| = |\mathcal{P}(\mathbf{V}_\kappa)| = 2^\kappa$.

[3] Dies besagt gerade, daß κ in M 1-extendible ist, zur Definition von 1-extendible siehe [**Ka94**, S. 311].

Zudem ist der kritische Punkt von $j_{\mathcal{E}}$ derselbe wie von $\hat{\jmath}$ und nach Lemma 1.5.4 gilt $j_{\mathcal{E}}(\kappa) = j(\kappa)$. Also ist $j_{\mathcal{E}} : \mathbf{V} \prec M_{\mathcal{E}}$ eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt κ, für die gilt[4]

$$\mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}.$$

Wir haben nun also eine elementare Abbildung $(j_{\mathcal{E}} : \mathbf{V} \prec M_{\mathcal{E}})^M$ konstruiert. Wir arbeiten weiterhin in M. Sei f eine beliebige Abbildung von κ nach κ. Dann ist $j_{\mathcal{E}}(f)$ eine Abbildung von $j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ nach $j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ und es gilt

$$j_{\mathcal{E}}(f)\text{"}\kappa = f\text{"}\kappa \subseteq \kappa.$$

Mit Hilfe von $j_{\mathcal{E}}$ bilden wir nun einen $(\kappa, |\mathbf{V}^{M_{\mathcal{E}}}_{j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa)}|)$-Extender $\bar{\mathcal{E}}$. Da $j_{\mathcal{E}}(k)$ unerreichbar in $M_{\mathcal{E}}$ und $j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa) < j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ ist, gilt

$$|\mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa)}|^{M_{\mathcal{E}}} < j_{\mathcal{E}}(\kappa).$$

Aus der Definition des Extenders (siehe 1.5.1) folgt $\bar{\mathcal{E}} \in \mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)}$, aber da

$$\mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)} \subseteq M_{\mathcal{E}}$$

gilt, liegt der Extender $\bar{\mathcal{E}}$ also auch in $M_{\mathcal{E}}$. Wir wenden wiederum Lemma 1.5.4 an, damit gilt

$$\mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa)} \subseteq M_{\bar{\mathcal{E}}}$$

und $j_{\mathcal{E}}(f) = j_{\bar{\mathcal{E}}}(f)$, also ist $\mathbf{V}_{j_{\bar{\mathcal{E}}}(f)(\kappa)}$ eine Teilmenge von $M_{\bar{\mathcal{E}}}$.
Zusammengefaßt gilt in $M_{\mathcal{E}}$ also: $j_{\mathcal{E}}(f)$ ist eine Abbildung von $j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ nach $j_{\mathcal{E}}(\kappa)$, und es existiert ein $\alpha < j_{\mathcal{E}}(\kappa)$, nämlich κ, mit

$$j_{\mathcal{E}}(f)\text{"}\alpha \subseteq \alpha,$$

so daß es einen $(\alpha, |\mathbf{V}_{j_{\mathcal{E}}(f)(\alpha)}|)$-Extender $\bar{\mathcal{E}}$ mit kritischem Punkt α gibt, der

$$\mathbf{V}_{j_{\bar{\mathcal{E}}}(f)(\alpha)} \subseteq M_{\bar{\mathcal{E}}}$$

erfüllt. Durch die Elementarität von $j_{\mathcal{E}}$ können wir diese Aussage reflektieren, und es folgt, daß es für alle $f \in {}^{\kappa}\kappa$ ein $\alpha < \kappa$ und einen (α, β)-Extender $\bar{\mathcal{E}}$ mit kritischem Punkt α gibt, der $\mathbf{V}_{j_{\bar{\mathcal{E}}}(f)(\alpha)} \subseteq M_{\bar{\mathcal{E}}}$ erfüllt. Dies besagt aber gerade, daß κ Woodin ist.

Wir haben nun also gezeigt, daß κ in M Woodin ist. Nun wenden wir die selbe Methode wie im Beweis von Lemma 3.1.2 an. Sei $\mathcal{U}$ der durch j induzierte normale Ultrafilter auf κ und k die in Lemma 1.3.10 definierte elementare Abbildung von $\mathrm{Ult}_{\mathcal{U}}$ nach M. Aus $\kappa = k(\kappa)$ und $M \models \kappa = [\mathrm{id}]$ folgt dann

$$\{\alpha < \kappa \,|\, \alpha \text{ ist Woodin}\} \in U.$$

□

[4]Dies besagt gerade, daß κ in $M_{\mathcal{E}}$ superstark ist, zur Definition von superstark siehe [**Ka94**, S. 358].

Durch Anwenden von Satz 4.1 kommen wir also zu folgender Abschätzung der Konsistenzstärke superkompakter Kardinalzahlen.

4.4 Satz: Ist die Theorie ZFC + „Es gibt ein 2^κ-superkompaktes κ“ konsistent, so ist auch die Theorie $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ konsistent, d.h. es gilt:

$$\mathrm{Kon}(\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt ein } 2^\kappa\text{-superkompaktes } \kappa\text{“}) \Rightarrow \mathrm{Kon}(\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}).$$

Es läßt sich allerdings mehr als diese relative Konsistenz beweisen. Als 2^κ-superkompakte Kardinalzahl ist κ auch unerreichbar, d.h. es gilt[5]

$$\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC}.$$

In Satz 4.3 haben wir aber bewiesen, daß unterhalb von κ unendlich viele Woodin-Kardinalzahlen liegen, d.h. es gilt sogar

$$\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt } \omega \text{ Woodin-Kardinalzahlen“}.$$

Da $\mathbf{V}_\kappa$ also ein Model von ZFC + „Es gibt ω Woodin-Kardinalzahlen“ ist, kommen wir zu folgendem Resultat:

4.5 Satz: Aus dem Axiomensystem ZFC + „Es gibt ein 2^κ-superkompaktes κ“ folgt die Konsistenz von ZFC + „Es gibt ω Woodin-Kardinalzahlen“, nach Satz 4.1 also auch die Konsistenz von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$:

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt ein } 2^\kappa\text{-superkompaktes } \kappa\text{“} \vdash \mathrm{Kon}(\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}).$$

[5]Ein Beweis hierzu ist z.B. in [**Ku89**, S. 132,Theorem 6.6] zu finden, siehe auch Seite 145 für ein Anwendung diese Satzes, die unerreichbare Kardinalzahlen verwendet und der hier verwendeten Argumentation ähnelt.

Kapitel 5

Superkompakte Kardinalzahlen unter AD

In Kapitel 2 haben wir bewiesen, daß die projektiven Ordinalzahlen unter AD meßbar sind, und angemerkt, daß normale Ultrafilter auf ihnen existieren. In diesem Kapitel beweisen wir, daß die projektiven Ordinalzahlen unter AD sogar Nachfolger-superkompakt sind. Dazu konstruieren wir zuerst aus einem normalen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\gamma)$ normale Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\delta)$ für alle δ mit $|\delta| = |\gamma|$.

5.1 Lemma: [ZF] Sei κ λ-superkompakt. Dann ist κ auch α-superkompakt für alle $\lambda < \alpha < \lambda^+$.

Beweis: Sei $f : \lambda \to \alpha$ eine Bijektion und $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$. Nach Lemma 1.4.6 und Lemma 1.1.16 ist dann der Bildfilter[1] $\hat{f}_*(\mathcal{U})$ ein feiner κ-vollständiger Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\alpha)$. Es ist zu zeigen, daß $\hat{f}_*(\mathcal{U})$ auch normal ist.

Sei $g^* : \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \to \alpha$ eine Auswahlfunktion. Definiere eine Funktion g wie folgt:

$$g := f^{-1} \circ g^* \circ \hat{f} : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda.$$

Die Funktion g ist dann ebenfalls eine Auswahlfunktion:

$$\forall x \in \mathcal{P}_\kappa(\alpha)(g^*(x) \in x) \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)(g^*(\hat{f}(y)) \in \hat{f}(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)(f^{-1}(g^*(\hat{f}(y))) \in f^{-1}(\hat{f}(y)))$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)(g(y) \in y).$$

Da $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter ist, gibt es nach Lemma 1.4.7 ein $\beta < \lambda$ mit

$$\{y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \,|\, g(y) = \beta\} \in \mathcal{U},$$

d.h. es gilt

$$\{y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \,|\, f^{-1}(g^*(\hat{f}(y))) = \beta\} \in \mathcal{U}.$$

Da f^{-1} eine Bijektion ist, gilt also

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \,|\, f^{-1}(g^*(x)) = \beta\} \in \mathcal{U}^*,$$

d.h. es gibt ein $\beta^* < \alpha$ mit

$$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \,|\, g^*(x) = \beta^*\} \in \mathcal{U}^*.$$

Damit ist $\mathcal{U}^*$ nach Lemma 1.4.7 normal, κ also α-superkompakt. □

[1] $\hat{f}$ ist die Fortsetzung von f auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$, siehe Definition 1.4.5.

Wichtig für den $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$-Kontext ist bei diesem Lemma, daß der Zeuge der α-Superkompaktheit von κ nicht von der gewählten Bijektion f abhängt.

5.2 Lemma: [ZF] Seien λ und α Ordinalzahlen mit $\lambda < \alpha < \lambda^+$, $\kappa < \lambda$ eine Kardinalzahl und $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$. Wenn f und g Bijektionen zwischen λ und α sind, so gilt $\hat{f}_*(\mathcal{U}) = \hat{g}_*(\mathcal{U})$. Den in diesem Fall eindeutig von $\mathcal{U}$ induzierten normalen Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\alpha)$ bezeichnen wir im folgendem mit $\mathcal{U}_\alpha$.

Beweis: Angenommen, es gilt $B := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \mid \hat{f}(x) = \hat{g}(x)\} \in \mathcal{U}$. Dann gilt

$$A \in f_*(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}\text{''}A \in \mathcal{U} \Rightarrow (f^{-1}\text{''}A) \cap B \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$g^{-1}\text{''}A \supseteq (f^{-1}\text{''}A) \cap B \in \mathcal{U} \Rightarrow g^{-1}\text{''}A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in g_*(\mathcal{U}).$$

für alle $A \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\alpha)$. Da sich die Rollen von f und g austauschen lassen, gilt damit unter dieser Annahme $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$. Zum Beweis der Behauptung reicht es also $B \in \mathcal{U}$ zu zeigen.

Definiere zwei Funktionen $h, k : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ durch

$$h(A) := \begin{cases} \bigcap A & \text{falls } \hat{f}(A) \subseteq \hat{g}(A), \\ \min\{\alpha \in A \mid f(\alpha) \notin \hat{g}(A)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$k(A) := \begin{cases} \bigcap A & \text{falls } \hat{g}(A) \subseteq \hat{f}(A), \\ \min\{\alpha \in A \mid g(\alpha) \notin \hat{f}(A)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen h und k sind Auswahlfunktionen, also gibt es nach Lemma 1.4.7 zwei Mengen $C, D \in \mathcal{U}$ und dazu gehörende Ordinalzahlen $\gamma, \delta < \lambda$, so daß $h\text{''}C = \{\gamma\}$ und $k\text{''}D = \{\delta\}$ gelten. Angenommen, es gelte $B \notin \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt dann

$$\bar{B} := \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \backslash B \in \mathcal{U}$$

und damit auch $\bar{B} \cap C \cap D \in \mathcal{U}$. Sei $x \in \bar{B} \cap C \cap D$ mit $g^{-1}(f(\gamma)), f^{-1}(g(\delta)) \in x$. Aus $x \in \bar{B}$ folgt $\hat{f}(x) \neq \hat{g}(x)$, es gibt also ein $\mu \in \hat{f}(x) \backslash \hat{g}(x)$. Dann gilt

$$\hat{f}(x) \not\subseteq \hat{g}(x),$$

aber auch

$$f(\gamma) \in \hat{g}(x).$$

Daher kann $h(x)$ also nicht γ sein, Widerspruch zu $x \in C$. Also gilt $B \in \mathcal{U}$ und damit $\hat{f}_*(\mathcal{U}) = \hat{g}_*(\mathcal{U})$. □

5.3 Lemma: [ZF] Seien $\kappa < \lambda$ Kardinalzahlen und κ sei α-superkompakt für alle α mit $\kappa < \alpha < \lambda$ und auf λ existiere ein normaler Ultrafilter. Dann ist κ auch λ-superkompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter auf λ, für jedes $\kappa < \alpha < \lambda$ sei $\mathcal{U}_\alpha$ der dadurch nach Lemma 5.2 eindeutig definierte normale Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\alpha)$. Wir zeigen, daß dann durch

$$\mathcal{U}_\lambda := \{A \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \,|\, \{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}\}$$

ein normaler feiner Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ definiert ist.

Die leere Menge $\varnothing$ ist kein Element von $\mathcal{U}$, also auch auch nicht von $\mathcal{U}_\lambda$, d.h. $\varnothing \notin \mathcal{U}_\lambda$. Für alle α mit $\kappa < \alpha < \lambda$ gilt $\mathcal{P}_\kappa(\lambda) \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) = \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha$, da $\mathcal{U}$ ein λ-vollständiger Ultrafilter auf λ ist, gilt also nach Lemma 1.1.9 auch

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} = \{\alpha \in \lambda \,|\, \alpha > \kappa\} \in \mathcal{U},$$

d.h. $\mathcal{P}_\kappa(\lambda) \in \mathcal{U}_\lambda$.

Sei $B \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ Obermenge eines $A \in \mathcal{U}_\lambda$. Dann gilt für alle $\alpha \in \lambda$

$$A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \subseteq B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha).$$

Die $\mathcal{U}_\alpha$ sind abgeschlossen unter Obermengen, es gilt also

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \subseteq \{\alpha \in \lambda \,|\, B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$A \in \mathcal{U}_\lambda \Leftrightarrow \{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Und da $\mathcal{U}$ unter Obermengen abgeschlossen ist, folgt daraus

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow B \in \mathcal{U}_\lambda,$$

also ist auch $\mathcal{U}_\lambda$ bezüglich Obermengen abgeschlossen.

Seien A und B Elemente von $\mathcal{U}_\lambda$, d.h.

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U} \wedge \{\alpha \in \lambda \,|\, B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, gilt also

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha \wedge B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Für alle $\alpha \in \lambda$ sind die $\mathcal{U}_\alpha$ unter Obermengen abgeschlossen, also gilt

$$(A \cap B) \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha \wedge B \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha.$$

Und da auch $\mathcal{U}$ unter Obermengen abgeschlossen ist, folgt also

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, (A \cap B) \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Nach Definition von $\mathcal{U}_\lambda$ gilt daher $A \cap B \in \mathcal{U}_\lambda$, damit ist $\mathcal{U}_\lambda$ ein Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$.

$\mathcal{U}_\lambda$ ist zudem ein Ultrafilter: Angenommen, für eine Menge $A \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ gilt $A \notin \mathcal{U}_\lambda$, d.h.

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \notin \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt dann

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \notin \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Die $\mathcal{U}_\alpha$ sind ebenfalls alle Ultrafilter, es gilt also

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, (\mathcal{P}_\kappa(\lambda) \backslash A) \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Dies bedeutet nach Definition von $\mathcal{U}_\lambda$ aber gerade $(\mathcal{P}_\kappa(\lambda)\backslash A) \in \mathcal{U}_\lambda$, d.h. auch $\mathcal{U}_\lambda$ ist ein Ultrafilter.

Als nächstes zeigen wir die κ-Vollständigkeit. Sei $\langle X_\beta \,|\, \beta < \delta < \kappa\rangle$ eine Partition von $\mathcal{P}_\kappa(\lambda) \in \mathcal{U}_\lambda$. Dann ist für $\alpha < \lambda$

$$\langle X_\beta \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \,|\, \beta < \delta < \kappa\rangle$$

eine Partition von $\mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha$. Die $\mathcal{U}_\alpha$ sind κ-vollständig, nach Lemma 1.1.7 existiert also für jedes $\alpha < \lambda$ ein $\beta < \delta$ mit $X_\beta \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha$. Wir definieren mit Hilfe dieser β eine Partition von $\lambda \in \mathcal{U}$:

$$Y_\beta := \{\alpha \in \lambda \,|\, X_\beta \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

Da auch $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, gibt es, wiederum nach Lemma 1.1.7, ein $\gamma < \delta$ mit

$$Y_\gamma = \{\alpha \,|\, X_\gamma \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

Also gilt $X_\gamma \in \mathcal{U}_\lambda$, nach Lemma 1.1.7 ist $\mathcal{U}_\lambda$ also κ-vollständig.

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{U}_\lambda$ ein feiner Filter ist. Sei $\beta \in \lambda$ beliebig, wir definieren eine Menge C:

$$C := \{A \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \,|\, \beta \in A\}.$$

Die $\mathcal{U}_\alpha$ sind feine Filter, daher gilt für alle $\alpha > \beta$

$$C \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) = \{A \in \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \,|\, \beta \in A\} \in \mathcal{U}_\alpha.$$

Da $\mathcal{U}$ ein λ-vollständiger Ultrafilter ist, gilt also nach Lemma 1.1.9

$$\{\alpha \in \lambda \,|\, C \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \supseteq \{\alpha \in \lambda \,|\, \alpha > \beta\} \in \mathcal{U},$$

d.h. es gilt $C \in \mathcal{U}_\lambda$, demnach ist $\mathcal{U}_\lambda$ ein feiner Filter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$.

Noch zu zeigen ist die Normalität von $\mathcal{U}_\lambda$. Sei dazu $f : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ eine Auswahlfunktion, dann wird durch $f_\alpha := f \upharpoonright \mathcal{P}_\kappa(\alpha)$ eine Auswahlfunktion für jedes $\alpha < \lambda$ definiert. Also gibt es $A_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ und $\beta_\alpha \in \alpha$ mit f_α"$A_\alpha = \{\beta_\alpha\}$. Wir definieren $g : \lambda \to \lambda$ durch $g(\alpha) := \beta_\alpha$. Dieses g ist dann ebenfalls eine Auswahlfunktion, also gibt es ein $B \in \mathcal{U}$ und ein $\delta < \lambda$ mit g"$B = \{\delta\}$. Sei $A := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \,|\, f(x) = \delta\}$. Für jedes $\alpha \in B$ gilt $g(\alpha) = \beta_\alpha = \delta$, d.h. es gilt:

$$A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \supseteq A_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha.$$

Also gilt

$$\{\alpha \,|\, A \cap \mathcal{P}_\kappa(\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha\} \supseteq B \in \mathcal{U},$$

und damit $A \in \mathcal{U}_\lambda$, nach Lemma 1.4.7 ist $\mathcal{U}_\lambda$ also normal. $\square$

Aus dem Lemma 1.4.4 folgt also durch Anwenden der Lemmas 5.1 und 5.3 direkt das Korollar:

5.4 Korollar: [ZF] Seien κ und κ^+ Kardinalzahlen auf denen normale Ultrafilter existieren. Dann ist κ κ^+ superkompakt.

Dieses Resultat stammt von Donald Martin aus dem Jahr 1975, jedoch wurde es nicht von ihm veröffentlicht. Eine Publikation des Beweises befindet sich in einem Artikel von Carlos Di Prisco and James Henle [**DiHe78**].

Im Abschnitt über „Eigenschaften unter AD“ haben wir einen Satz aufgeführt (und teilweise bewiesen), der folgendes besagte:

(1) Unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ existieren auf allen projektiven Ordinalzahlen $\boldsymbol{\delta}^1_n$ normale Ultrafilter.
(2) Unter $\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}$ sind die projektiven Ordinalzahlen mit geradem Index die Nachfolger der projektiven Ordinalzahlen mit ungeradem Index, d.h.

$$\forall n \in \omega(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+2} = (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})).$$

Wir brauchen also nur Korollar 5.4 anzuwenden, um zu beweisen, daß unter AD superkompakte Kardinalzahlen existieren:

5.5 Satz: $[\mathsf{ZF}+\mathsf{AD}]$ Für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} \text{ ist } \boldsymbol{\delta}^1_{2n+2}\text{-superkompakt.}$$

Nun ist Nachfolger-Superkompaktheit keine sehr starke Superkompaktheit (aber dennoch mehr als Meßbarkeit). Es stellt sich also die Frage, ob unter AD mehr Superkompaktheit erreicht werden kann?

Solovay bewies 1978, daß $\aleph_1$ unter $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ für alle $\gamma < \Theta$ γ-Superkompakt ist[2]. Ob diese Aussage unter der schwächeren Bedingung AD ebenfalls gilt, ist bisher ungeklärt.

In dem für die weitere Entwicklung sehr wichtigen Artikel [**HaKe81**] zeigten Harrington und Kechris, daß sich bestimmte Spiele auf reellen Codes für Ordinalzahlen durch Spiele auf ω simulieren lassen. Dadurch konnten sie den Beweis von Solovay übernehmen, und damit beweisen, daß $\aleph_1$ unter AD $\boldsymbol{\delta}^1_n$-superkompakt ist für alle $n \in \omega$ (siehe ebenfalls [**HaKe81**]). Genauer gesagt bewiesen Harrington und Kechris, daß $\aleph_1$ unter AD $(\boldsymbol{\delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$-superkompakt ist, dabei ist $(\boldsymbol{\delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ definiert durch

$$(\boldsymbol{\delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})} := \sup\{\eta \mid \eta \text{ ist die Länge einer } (\boldsymbol{\Delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}\text{-Präwohlordnung von } \omega^\omega\}.$$

Im selben Jahr verwendete Becker das Resultat von Harrington und Kechris, um durch eine andere Methode als Solovay die $\boldsymbol{\delta}^1_n$-Superkompaktheit von $\aleph_1$ zu beweisen [**Be81b**] und sogar zu zeigen, daß auch $\aleph_2$ unter AD $\boldsymbol{\delta}^1_n$-superkompakt ist für alle $n > 0$ [**Be81a**]. Auch hier ist das eigentliche Resultat stärker, Becker bewies die $(\boldsymbol{\delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$-Superkompaktheit von $\aleph_1$ und $\aleph_2$.

[2] Siehe [**So78**]. $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ ist die Annahme „Alle Spiele auf mit reellen Zügen sind determiniert“.

Die von Becker verwendeten Methoden konnten jedoch noch nicht dahingehend verallgemeinert werden, für Kardinalzahlen über $\aleph_2$ die $\boldsymbol{\delta}^1_n$-Superkompaktheit zu zeigen. Mit Hilfe eines Theorems von Becker konnte Jackson zeigen, daß alle projektiven Ordinalzahlen $(\sup_n \boldsymbol{\delta}^1_n)$-superkompakt sind:

5.6 Satz: $[\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}]$ Für alle $n > 0$ gilt:

$$\boldsymbol{\delta}^1_n \text{ ist } (\sup_n \boldsymbol{\delta}^1_n)\text{-superkompakt.}$$

Beweis: Siehe [**BeJa01**].

In dem Artikel [**BeJa01**] wird weiterhin gezeigt, daß die projektiven Ordinalzahlen sogar für alle $\gamma < \aleph_{\aleph_1}$ γ-superkompakt sind. (Unter AD gilt nach Steve Jackson [**Ja88**] $\sup_n \boldsymbol{\delta}^1_n = \aleph_{\varepsilon_0} < \aleph_{\aleph_1}$.)

Die zu diesem Zeitpunkt höchste bewiesene Superkompaktheit für projektive Ordinalzahlen unter AD wurde von Steve Jackson gezeigt. Er beweist in dem Artikel [**Ja01**], daß jedes $\boldsymbol{\delta}^1_n$ unter AD $(\boldsymbol{\delta}^2_1)^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$-superkompakt ist.

Kapitel 6

Diskussion der Ergebnisse

Wir haben nun superkompakte Kardinalzahlen sowohl im ZFC- als auch im $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$-Kontext untersucht. Im ZFC-Kontext haben wir die Einbettungsdarstellung, die uns Satz 4.3 lieferte. Dadurch ist im ZFC-Kontext das Axiom „Es gibt eine superkompakte Kardinalzahl“ ein sehr starkes Axiom. Auf der anderen Seite haben wir unter $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ bewiesen, daß es viele κ^+-superkompakte Kardinalzahlen κ gibt.

Von anderen Großen Kardinalzahlaxiomen ist bekannt, daß die mengentheoretische Stärke der Axiome nicht von der Wahl der Basistheorie abhängt: So sind die Axiomensysteme

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt eine meßbare Kardinalzahl“}$$

und

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es gibt eine meßbare Kardinalzahl“}$$

äquikonsistent.[1] Man kann sich fragen, ob dies auch bei den Superkompaktheitsaxiomen der Fall ist. Wie die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, verhalten sich diese jedoch völlig anders:

In Kapitel 4 haben wir mit Hilfe des Resultats von Woodin zur Konsistenzstärke von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$, siehe Satz 4.1, gezeigt, daß unter ZFC aus der Existenz einer 2^κ-superkompakten Kardinalzahl κ die Konsistenz von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ folgt, siehe Satz 4.5:

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt eine } 2^\kappa\text{-superkompakte Kardinalzahl } \kappa\text{“} \vdash \mathrm{Kon}(\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}).$$

Es stellt sich die Frage, ob die Konsistenz von AD nicht schon mit weniger Superkompaktheit zu beweisen ist. In dem Artikel [**SRK78**] bewies Solovay, daß unter der Annahme ZFC + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“ ein bestimmtes kombinatorisches Prinzip, bezeichnet mit $\square_\kappa$, nicht gilt.

Nach einem Resultat von Schimmerling und Zeman folgt aus diesem Versagen von $\square_\kappa$ die Existenz einer sogenannten nicht-domestizierten Maus[2] (siehe [**SchiZe01**, S. 309, Fußnote 5]), und daraus wiederum folgt die Konsistenz von

[1] Siehe [**Je97**, S. 476]. Als Metatheorie für Konsistenz-Aussagen wäre z.B. die Peano Arithmetik erster Stufe geeignet.

[2] Der Begriff Maus, englisch mouse, stammt aus der Kernmodell-Theorie, Alessandro Andretta führt in [**ANS01**] die nicht-domestizierten Mäuse ein. Zur Einführung in die Kernmodell-Theorie eignet sich z.B. [**LöSt99**], insbesondere für die hier erwähnten Begriffe und Resultate bezüglich Mäusen und Woodin-Kardinalzahlen.

ZFC + „Es gibt ω Woodin-Kardinalzahlen“ (siehe [**LöSt99**, Proposition 2.32]). Nun können wir das Äquikonsistenz-Resultat Satz 4.1 von Woodin anwenden, und erhalten das folgende Resultat:

(0) ZFC + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“ $\vdash$ Kon($\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$).

Die Existenz einer κ^+-superkompakten Kardinalzahl κ unter ZFC reicht also aus, um die Konsistenz von $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ zu beweisen.

Betrachten wir die relative Konsistenz der von uns untersuchten Axiomen-Systeme, beginnend bei dem System ZFC + „Es gibt eine 2^κ-superkompakte Kardinalzahl κ“, so erhalten wir folgendes Diagramm:

(1) Kon(ZFC + „Es gibt eine 2^κ-superkompakte Kardinalzahl κ“)

$$\Downarrow$$

(2) Kon(ZFC + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“)

$$\Downarrow$$

(3) Kon(ZFC + „Es gibt ω Woodin-Kardinalzahlen“)

$$\Updownarrow$$

(4) Kon($\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$)

$$\Updownarrow$$

(5) Kon($\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$ + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“)

$$\Downarrow$$

(6) Kon(ZF + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“)

Betrachten wir dieses Diagramm in Hinblick auf weitere Äquikonsistenzen. Wir wissen, daß ZFC und ZF äquikonsistent sind (siehe [**Je97**, S. 108, Kapitel 13]). Es stellt sich also die Frage, ob auch die Existenz einer κ^+-superkompakten Kardinalzahl κ unter ZFC äquikonsistent zur Existenz einer κ^+-superkompakten Kardinalzahl κ unter ZF ist.

Wie wir eben angemerkt haben, gilt Aussage (0):

ZFC + „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“ $\vdash$ Kon($\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$).

Würden nun die Aussagen (2) und (6) äquikonsistent sein, so würde dies bedeuten, daß (2) aus (4) folgt:

$$\text{Kon}(\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}) \Rightarrow \text{Kon}(\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt ein } \kappa^+\text{-superkompaktes } \kappa\text{“}).$$

Wenden wir nun die Aussage (0) an, so erhalten wir:

Aus $\mathsf{ZFC}+$ „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“
folgt die Konsistenz von
$\mathsf{ZFC}+$ „Es gibt eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ“.

Das jedoch widerspricht dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeits-Satz, nach dem keine rekursive Erweiterung von ZF ihre eigene Konsistenz beweisen kann.

Im obigen Diagramm haben wir also eine nicht umkehrbare Implikation zwischen (2) und (6). In diesem Sinne ist der Begriff der Superkompaktheit im auswahllosen Kontext schwächer als im ZFC-Kontext.

Es bleiben zwei Fragen, die das obige Diagramm offen läßt:

(i) Ist die Implikation zwischen (1) und (2) umkehrbar?
(ii) Ist die Implikation zwischen (5) und (6) umkehrbar?

Die Frage (i) könnte z.B. dann positiv beantwortet werden, wenn die Theorien

$$\mathsf{ZFC}+\text{„Es gibt eine } 2^\kappa\text{-superkompakte Kardinalzahl } \kappa\text{“}$$

und

$$\mathsf{ZFC}+\text{„Es gibt ein } \kappa^+\text{-superkompaktes } \kappa \text{ und es gilt } \kappa^+ = 2^\kappa\text{“}$$

äquikonsistent sind[3].

In [**LeSo67**] zeigten Levy und Solovay, daß ein Forcing, dessen zugrunde liegende partielle Ordnung kleiner als κ ist, die Meßbarkeit einer Kardinalzahl κ erhält. Dieses Resultat läßt sich auf stark kompakte, superkompakte und andere Große Kardinalzahlen, deren Existenz durch bestimmte Ultrapotenzen bezeugt wird, erweitern. Joel Hamkins und Hugh Woodin konnten dieses Resultat auch für starke und Woodin-Kardinalzahlen beweisen [**HaWo00**].

Allerdings beantworten diese Resultate unsere Frage nicht, da durch ein Forcing, das im obigen Sinne klein ist, $\alpha^+ = 2^\alpha$ nur für Kardinalzahlen α erzwungen werden kann, die unterhalb der Großen Kardinalzahl κ liegen. Bisher existieren keine Forcing-Techniken, die geeignet sind, die obige Frage zu beantworten.

Die Methode der inneren Modelle, die z.B. zu dem Ergebnis von Solovay geführt hat, daß die Systeme

$$\mathrm{Kon}(\mathsf{ZFC}+\text{„Es gibt ein meßbares } \kappa\text{“})$$

und

$$\mathrm{Kon}(\mathsf{ZFC}+\text{„Es gibt ein meßbares } \kappa \text{ und es gilt } \kappa^+ = 2^\kappa\text{“})$$

äquikonsisten sind (siehe [**Ka94**, Lemma 20.2]), steht für superkompakte Kardinalzahlen bisher nicht zur Verfügung. Anscheinend existieren bislang keine Methoden, um die erste der obigen Fragen zu beantworten.

[3]Diese Aussage ist zumindest oberflächlich etwas stärker als eine Äquivalenz zwischen den Aussagen (1) und (2) aus dem Diagramm.

Die zweite der beiden Fragen, die das Diagramm offen läßt, war die nach der Konsistenzstärke einer κ^+-superkompakten Kardinalzahl κ unter ZF. Wir hatten eben angemerkt, daß die Systeme

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es gibt eine meßbare Kardinalzahl"}$$

und

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es gibt eine meßbare Kardinalzahl"}$$

äquikonsistent sind. Eine κ^+-superkompakte Kardinalzahl κ ist meßbar, daher ist

$$\mathsf{ZFC} + \text{„Es existiert eine meßbare Kardinalzahl"}$$

eine untere Schranke der Konsistenzstärke von

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es existiert eine Kardinalzahl } \kappa\text{, die } \kappa^+\text{-superkompakt ist".}$$

Eine obere Schranke ist $\mathsf{ZF} + \mathsf{AD}$, wie wir in Kapitel 5, Satz 5.5, gezeigt haben. Bisher sind keine besseren Schranken für die Konsistenzstärke bekannt.

John Steel hat in dem Buch [**Ste96**] gezeigt, daß man aus der Aussage

$$\mathsf{ZF} + \text{„Es existiert eine Kardinalzahl } \kappa\text{, die } \kappa^+\text{-superkompakt ist".}$$

ein inneres Modell mit einer Woodin-Kardinalzahl erhält.

Die in diesem Beweis verwendeten Methoden könnten eventuell mit Methoden verbunden werden, die Ralf Schindler in dem Artikel [**Schi99**] verwendet. Dort wird eine ähnliche Konstruktion in Modellen ohne Auswahl durchgeführt.

Es ist vorstellbar, daß mit dieser Idee eine untere Schranke von einer Woodin-Kardinalzahl erreicht werden könnte, aber auch hierzu läßt sich zu diesem Zeitpunkt keine genaue Aussage treffen.

Literaturverzeichnis

[ANS01] Alessandro Andretta, Itay Neeman and John R. Steel, *The domestic levels of K^c are iterable*, Israel Journal of Mathematics **125** (2001), S. 157–201.

[Be81a] Howard S. Becker, *Determinacy implies that $\aleph_2$ is supercompact*, Israel Journal of Mathematics **40** (1981), S. 229–234.

[Be81b] Howard S. Becker, AD *and the supercompactness of* $\aleph_1$, Journal of Symbolic Logic **46** (1981), S. 822–842.

[BeJa01] Howard S. Becker and Steve Jackson, *Supercompactness within the Projective Hierarchy*, Journal of Symbolic Logic **66** (2001), S. 658–672.

[Ca37] Henri Cartan, *Théorie des filtres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **205** (1937), S. 595–598.

[ChKe90] Chen-Chung Chang and H. Jerome Keisler, *Model Theory*, 3 ed., North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Da64] Morton Davis, *Infinite Games of Perfect Information*, Advances in Game Theory (Melvin Dresher, Lloyd S. Shapley and Alan W. Tucker, eds.), Annals of Mathematical Studies, vol. 52, Princeton University Press, Princeton, 1964, S. 85–101.

[DiHe78] Carlos A. Di Prisco and James M. Henle, *On the compactness of* $\aleph_1$ *and* $\aleph_2$, Journal of Symbolic Logic **43** (1978), S. 394–401.

[EFT96] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum and Wolfgang Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 4 ed., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[En01] Matthias Enders, *Charakterisierung projektiver Mengen durch Topologieverfeinerungen*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Bonn, 2001.

[ErRa52] Paul Erdős and Richard Rado, *Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set*, Proceedings of the London Mathematical Society **(3)2** (1952), S. 417–439.

[GaSt53] David Gale and Frank M. Stewart, *Infinite games with perfect information*, Contributions to the Theory of Games Bd. 2 (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.), Annals of Mathematical Studies, vol. 28, Princeton University Press, Princeton, 1953, S. 245–266.

[Gö39] Kurt F. Gödel, *Consistency-proof for the Generalized Continuum-Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. **25** (1939), S. 220-224.

[HaWo00] Joel D. Hamkins and W. Hugh Woodin, *Small forcing creates neither strong nor Woodin cardinals*, Proceedings of the American Mathematical Society **128** (2000), S. 3025–3029.

[HaKe81] Leo A. Harrington and Alexander S. Kechris, *On the Determinacy of Games on Ordinals*, Annals of Mathematical Logic **20** (1981), S. 109–154.

[Ha08] Felix Hausdorff, *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Mathematische Annalen **65** (1908), S. 435–505.

[Ja01] Steve Jackson, *The weak Square Property*, Journal of Symbolic Logic **66** (2001), S. 640–657 .

[Ja88] Steve Jackson, AD *and the projective ordinals*, Cabal Seminar 1977-1979 (Alexander S. Kechris, Donald S. Martin and John R. Steel, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 839, Springer Verlag, Berlin, 1981, S. 117-220.

[Je97] Thomas Jech, *Set Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1997.

[Ka94] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1994.

[Ke78] Alexander S. Kechris, AD *and Projective Ordinals*, Cabal Seminar 1976-1977 (Alexander S. Kechris and Yiannis N. Moschovakis, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 689, Springer Verlag, Berlin, 1978, S. 91–132.

[Kl70] Eugene M. Kleinberg, *Strong partition properties for infinite cardinals*, Journal of Symbolic Logic **35** (1970), S. 410–428.

[BuKo96] Manfred Burghardt und Peter Koepke, *Mengenlehre, Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*, `http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Data/Lectures/skript/skript_1.ps`, `http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Data/Lectures/skript/skript_2.ps`, 1996.

[Ko98] Peter Koepke, *Extenders, Embedding Normal Forms, and the Martin-Steel-Theorem*, Journal of Symbolic Logic **63** (1998), S. 1137–1176.

[Ku89] Kenneth Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[LöSt99] Benedikt Löwe and John R. Steel, *An introduction to core model theory*, Sets and proofs (S. Barry Cooper and John K. Truss, eds.), Lecture Note Series of the London Mathematical Socity 258, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, S. 103–157.

[Ło55] Jerzy Łoś, *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, Mathematical Interpretation of Formal Systems (Thoralf Skolem, *et al*, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1955, S. 98–113.

[LeSo67] Azriel Levy and Robert M. Solovay, *Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis*, Israel Journal of Mathematics **5** (1967), S. 234–248.

[MaSt89] Donald A. Martin and John R. Steel, *A Proof of Projective Determinacy*, Journal of the American Mathematical Society **2** (1989), S. 71–125.

[Mo70] Yiannis N. Moschovakis, *Determinacy and prewellorderings of the continuum*, Contributions to the Theory of Games Bd. 3 (Yehoshua Bar-Hillel, ed.), Mathematical Logic and Foundations of Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1970, S. 24–62.

[Mo80] Yiannis N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, vol. 100, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[MySt62] Jan Mycielski and Hugo Steinhaus, *A Mathematical Axiom contradicting the Axiom of Choice*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série de Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **10** (1962), S. 1–3.

[MySt64] Jan Mycielski and Stanisław Swierczkowski, *On the Lebesgue Measurability and the Axiom of Determinateness*, Fundamenta Mathematicae **54** (1964), S. 67–71.

[MSZ56] Jan Mycielski, Stanisław Swierczkowski and Andrzej Zięba, *On infinite positional games*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série de Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **4** (1956), S. 458–488.

[MyZi55] Jan Mycielski and Andrzej Zięba, *On infinite games*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série de Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **3** (1955), S. 133–136.

[Ox57] John C. Oxtoby, *The Banach-Mazur Game and Banach Category Theorem*, Contributions to the Theory of Games Bd. 3 (Melvin Dresher, Alan W. Tucker and Philip Wolfe, eds.), Annals of Mathematical Studies, vol. 39, Princeton University Press, Princeton, 1957, S. 159–163.

[Ro01] Philipp Rohde, *Über Erweiterungen des Axioms der Determiniertheit*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Bonn, 2001.

[Sc61] Dana Scott, *Measurable cardinals and constructible sets*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série de Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **9** (1961), S. 521–524.

[SiTa30] Wacław Sierpiński und Alfred Tarski, *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, Fundamenta Mathematicae **15** (1930), S. 29–35.

[So78] Robert M. Solovay, *The independence of* DC *from* AD, Cabal Seminar 1976-1977 (Alexander S. Kechris and Yiannis N. Moschovakis, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 689, Springer Verlag, Berlin, 1978, S. 171–184.

[SRK78] Robert M. Solovay, William N. Reinhardt and Akihiro Kanamori, *Strong axioms of infinity and elementary embeddings*, Annals of Mathematical Logic **13** (1978), S. 73–116.

[Ste96] John R. Steel, *The core model iterability problem*, Lecture Notes in Logic 8, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[St98] Heike Steinwand, *Konsequenzen aus dem Axiom der Determiniertheit*, Wissenschaftliche Arbeit, Universität Tübingen, Mathematische Fakultät, Tübingen, 1998.

[Schm99] Ute K. Schmid, *Partitionskardinalzahlen und unendliche Spiele*, Wissenschaftliche Arbeit, Universität Tübingen, Mathematische Fakultät, Tübingen, 1999.

[Schi99] Ralf Schindler, *Successive weakly compact or singular cardinals*, Journal of Symbolic Logic **64** (1999), S. 139–146.

[SchiZe01] Ernest Schimmerling and Martin Zeman, *Square in core models*, Bulletin of Symbolic Logic **7** (2001), S. 305–314.

[Ul30] Stanisław Ulam, *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fundamenta Mathematicae **16** (1930), S. 140–150.

[Wo55] Philip Wolfe, *The strict determinateness of certain infinite games*, Pacific Journal of Matehmatics **5** (1955), S. 841–847.

[WMH∞] W. Hugh Woodin, Adrian R. D. Mathias and Kai Hauser, *Large Cardinals and Determinacy*, noch nicht erschienen.

[Ze13] Ernst Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge) (Ernest W. Hobson and Augustus E. H. Love, eds.), vol. 2, Cambridge University Press, 1913, S. 501–504.

[Ze30] Ernst Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Fundamenta Mathematicae **16** (1930), S. 29–47.

Ich möchte mich bei Professor Peter Koepke bedanken, dessen Vorlesungen mich dazu gebracht haben, mein Studium schließlich doch noch zu beenden.

Vielen Dank an Benedikt Löwe, der selbst in fernen Ländern nie unerreichbar war. Ohne seine Betreuung würde diese Arbeit nicht existieren.

Schließlich möchte ich mich noch bei meinen Mitbewohnern und Freunden bedanken, die mich bis zum Schluß verständnisvoll ertragen haben.