Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Probeklausur

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Seien a, b teilerfremd mit $a|n$ und $b|n$. Beweisen Sie $(a \cdot b)|n$.

(b) Zeigen Sie, dass $10|(n^5 - n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Lösung.

(a) Es gilt $a \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = \mathrm{kgV}(a,b)$, da a und b teilerfremd sind. Weil a und b beide n teilen, gilt $a \cdot b = \mathrm{kgV}(a,b)|n$.

(b) Aus (a) folgt, dass es reicht zu zeigen, dass $2|(n^5 - n)$ und $5|(n^5 - n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

- Falls n gerade ist, so ist auch n^5 gerade und somit auch $n^5 - n$. Falls n ungerade ist, so auch n^5 und somit ist $n^5 - n$ gerade. In beiden Fällen gilt $2|(n^5 - n)$.
- Wir zeigen per Induktion über n, dass $5|(n^5 - n)$. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Wir können also annehmen, dass die Behauptung für n gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 1 + 10n^2 + 5n - n - 1 \\ &= 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) + (n^5 - n) + (n^5 - n).\end{aligned}$$

  Der erste Summand ist offensichtlich durch 5 teilbar, und der zweite ebenfalls gemäss der Induktionsannahme. Insgesamt ist also $(n+1)^5 - (n+1)$ auch durch 5 teilbar.

Aufgabe 2. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(1) Zeigen Sie, dass $\sim_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(2) Analog definiert man $\sim_{g\circ f}$. Beweisen Sie, dass $\sim_f \subseteq \sim_{g\circ f}$.

(3) Zeigen Sie, dass wenn f surjektiv ist und $\sim_f = \sim_{g\circ f}$, dann ist g injektiv.

Lösung.

(a) Wir müssen zeigen, dass $\sim_f$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Es gilt offensichtlich, dass $f(x) = f(x)$, somit ist $(x, x) \in \sim_f$. Falls $f(x_1) = f(x_2)$, so gilt trivialerweise auch $f(x_2) = f(x_1)$, somit ist $\sim_f$ symmetrisch. Falls $f(x_1) = f(x_2)$ und $f(x_2) = f(x_3)$, so gilt auch $f(x_1) = f(x_3)$. Damit haben wir gezeigt, dass $\sim_f$ transitiv ist.

(b) Sei $(x_1, x_2) \in \sim_f$. Dann gilt $f(x_1) = f(x_2)$. Insbesondere gilt dann aber auch

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

(c) Wir nehmen an, dass f surjektiv ist und $\sim_f = \sim_{g \circ f}$. Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit $g(y_1) = g(y_2)$. Da f surjektiv ist, gibt es x_1, x_2 mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Somit gilt

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Daraus folgt, dass $(x_1, x_2) \in \sim_{g \circ f} = \sim_f$, d.h. $f(x_1) = f(x_2)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Gleichheit

$$\prod_{k=2}^{n} \Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Lösung. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über $n \geq 2$.

- Für $n = 2$ gilt die Behauptung, da
$$1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big).$$
- Wir nehmen nun an, dass $\prod_{k=2}^{n}\Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big) &= \prod_{k=2}^{n}\Big(1 - \frac{1}{k^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{(n+1)^2 - n - 1}{n(n+1)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{n^2 + n}{n(n+1)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus um den ggT h der Polynome $f = x^3 - 2x^2 - x + 2$ und $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ zu finden. Finden Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ mit $h = p \cdot f + q \cdot g$.

Lösung. Es gilt $f = g + (2x^2 - 4x + 2)$. Polynomdivision mit Rest liefert dann

$$g = (\frac{1}{2}x - 1)(2x^2 - 4x + 2) + (-2x + 2).$$

Eine weitere Polynomdivision liefert

$$2x^2 - 4x = (-x+1)(-2x+2).$$

Somit ist $-2x+2$ ein ggT von f und g, und insbesondere auch $x-1$. Wir können jetzt wie üblich rückwärts einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
x - 1 &= -\frac{1}{2}(-2x+2) \\
&= -\frac{1}{2}(g - (\frac{1}{2}x - 1)(2x^2 - 4x + 2)) \\
&= -\frac{1}{2}(g - (\frac{1}{2}x - 1)(f - g)) \\
&= -\frac{1}{2}((1 + \frac{1}{2}x - 1)g - (\frac{1}{2}x - 1)f) \\
&= -\frac{1}{4}xg + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{2})f.
\end{aligned}$$

Somit sind $p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$ und $q = -\frac{1}{4}x$.

Aufgabe 5.

(a) Berechnen Sie $\frac{2i-1}{3i+3}$.
(b) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = 56i$ in $\mathbb{C}$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\frac{2i-1}{3i+3} = \frac{(2i-1)(-3i+3)}{(3i+3)(-3i+3)} = \frac{3+9i}{18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}i.$$

(b) Wir setzen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Gleichung $z^3 = 56$ äquivalent zu

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = 56i$$

und somit zu

$$\begin{aligned}
a^3 - 3ab^2 &= 0 \\
3a^2b - b^3 &= 56.
\end{aligned}$$

Falls $a = 0$, so ergibt die zweite Bedingung $b = -2\sqrt[3]{7}$. Falls $a \neq 0$, so folgt aus der ersten Gleichung

$$\begin{aligned}
a^2 - 3b^2 &= 0 \\
(a + \sqrt{3}b)(a - \sqrt{3}b) &= 0 \\
a &= \pm\sqrt{3}b.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt dann $8b^3 = 57$ und somit $b = \sqrt[3]{7}$. Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\{-2\sqrt[3]{7}, \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}, -\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{7}\}.$$

Aufgabe 6.

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass wenn das reguläre n-Eck und das reguläre m-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so auch das reguläre nm-Eck.

(b) Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $x + iy \in \mathbb{C}$ genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn der Realteil x und der Imaginärteil y konstruierbar sind.

Lösung.

(a) Da n und m teilerfremd sind, gibt e $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $kn + lm = 1$. Es genügt zu zeigen, dass $e^{\frac{2\pi i}{nm}}$ konstruierbar ist. Es gilt aber

$$e^{\frac{2\pi i}{nm}} = e^{\frac{1\pi i(kn+lm)}{nm}} = e^{\frac{2\pi ik}{m} + \frac{2\pi il}{n}} = (e^{\frac{2\pi i}{m}})^k \cdot (e^{\frac{2\pi i}{n}})^l,$$

und das ist konstruierbar, da $e^{\frac{2\pi i}{m}}$ und $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ konstruierbar sind, und ebenfalls Multiplikation und Potenzierung konstruierbarer Zahlen.

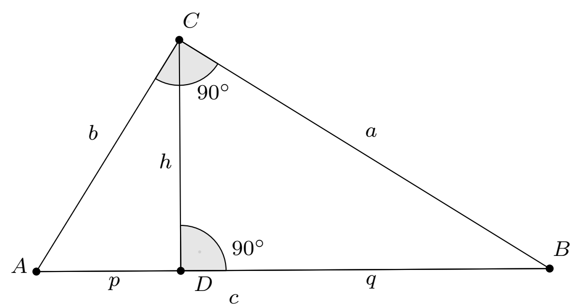
(b) Sei $z = x + iy$ konstruierbar. Dann ist der Realteil x konstruierbar, da x der Schnittpunkt der x-Achse mit dem Lot zur x-Achse durch z ist. Den Imaginärteil erhält man analog durch Vertauschen der x- und der y-Achse. Seien umgekehrt x und y konstruierbar. Dann fällt man das Lot zur x-Achse durch x und das Lot zur y-Achse durch y. Der Schnittpunkt ist dann genau z.

Aufgabe 7. (a) Formulieren Sie den Höhensatz.

(b) Zeigen Sie, dass der Satz von Pythagoras den Höhensatz impliziert.

Lösung.

(a) Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck wie unten dargestellt.



Dann gilt $h^2 = pq$.

(b) Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir folgende Gleichheiten:

$$b^2 = h^2 + p^2$$
$$a^2 = h^2 + q^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Daraus folgt $c^2 = a^2 + b^2 = p^2 + 2h^2 + q^2$. Andrerseits gilt $c^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Somit folgt $2h^2 = 2pq$ und insbesondere $h^2 = pq$.

Aufgabe 8. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ verschiedene Punkte und $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Zeigen Sie, dass falls ζ eine Nullstelle des Polynoms $ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ ist, so sind a, b, c die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.

Lösung. Es gilt $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ und $\bar{\zeta} = \zeta^2$. Nach Annahme gilt $c = -a\zeta^2 - b\zeta$. Wir müssen zeigen, dass $|a-b| = |b-c| = |a-c|$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|b-c|^2 &= |b(1+\zeta^2) + a\zeta|^2 \\
&= (b(1+\zeta^2) + a\zeta)(\bar{b}\overline{(1+\zeta^2)} + \bar{a}\bar{\zeta}) \\
&= (b(1+\zeta^2) + a\zeta)(\bar{b}(1+\zeta) + \bar{a}\zeta^2) \\
&= b\bar{b}(1+\zeta^2)(1+\zeta) + a\bar{b}\zeta(1+\zeta) + \bar{a}b\zeta^2(1+\zeta^2) + a\bar{a} \\
&= b\bar{b} - a\bar{b} - \bar{a}b + a\bar{a} \\
&= (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) \\
&= |a-b|^2,
\end{aligned}$$

wobei die drittletzte Gleichheit aus den folgenden Gleihheiten folgt:

$$\begin{aligned}(1+\zeta)(1+\zeta^2) &= 1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3 = 0+1 = 1\\ \zeta(1+\zeta) &= \zeta+\zeta^2 = -1\\ \zeta^2(1+\zeta^2) &= \zeta^2+\zeta^4 = \zeta^2+\zeta = -1.\end{aligned}$$

Aufgabe 9.

(a) Berechnen Sie das Inverse von $\bar{9}$ in $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Zahl

$$n = 1+2+\cdots+1000$$

durch 7 teilbar ist.

Lösung. (a) Wir wenden den Euklidischen Algorithmus an um a, b zu finden mit $9a + 31b = 1$. Dann ist $\bar{a}$ das Inverse von $\bar{9}$. Wir haben

$$\begin{aligned}31 &= 3\cdot 9+4\\ 9 &= 2\cdot 4+1\end{aligned}$$

und somit $1 = 9 - 2\cdot(31-3\cdot 9) = 7\cdot 9 - 2\cdot 31$. Damit ist $\bar{7}$ das Inverse von $\bar{9}$ in $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

(b) Es gilt $1000 = 143\cdot 7 - 1$. Wir schreiben

$$n = (0+1+2+3+4+5+6) + (7+8+\cdots+13) + \cdots + (994+\cdots+1000)$$

Modulo 7 ergibt das

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \underbrace{(\bar{0}+\bar{1}+\ldots\bar{6})}_{=\bar{2}1} + \underbrace{(\bar{0}+\bar{1}+\ldots\bar{6})}_{=\bar{2}1} + \underbrace{\ldots(\bar{0}+\bar{1}+\cdots+\bar{6})}_{=\bar{2}1}\\ &= \bar{1}43\cdot\bar{2}1\\ &= \bar{1}43\cdot\bar{0}\\ &= \bar{0}.\end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass n durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 10. Sei G eine endliche abelsche Gruppe.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\prod_{g\in G} g^2 = e_G.$$

(b) Falls $|G|$ ungerade ist, so gilt

$$\prod_{g\in G} g = e_G.$$

Lösung.

(a) Da G endlich ist, ist G von der Form $G = \{g_1, \ldots, g_n\} = \{g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\}$, denn falls $g \neq h$, so gilt auch $g^{-1} \neq h^{-1}$, denn

$$g^{-1} = h^{-1} \Longleftrightarrow hg^{-1} = hh^{-1} = e_G \Longleftrightarrow h = hg^{-1}g = e_G = g.$$

Somit folgt

$$\prod_{g\in G} g^2 = \prod_{k=1}^{n} g_k^2 = \prod_{k=1}^{n} g_k \cdot \prod_{k=1}^{n} g_k^{-1} = \prod_{k=1}^{n} g_k g_k^{-1} = e_G.$$

Die zweite und die dritte Gleichheit gilt, da G abelsch ist.

(b) Sei $|G|$ ungerade. Dann gilt $G = \{e_G, g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1}\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, denn für $h \notin \{g, g^{-1}\}$ ist $h^{-1} \notin \{g, g^{-1}\}$. Somit gilt

$$\prod_{g\in G} g = e_G \cdot \prod_{k=1}^{n} g_k g_k^{-1} = e_G,$$

wobei wir umordnen können, da G abelsch ist.

Abgabe: Dienstag, 21.06.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern