Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 9

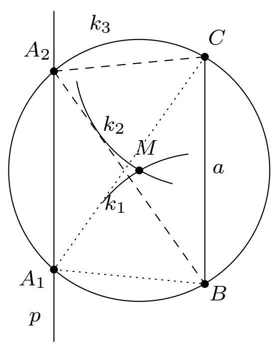
Aufgabe 31 (6 Punkte)**.** Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Dreiecke ΔABC mit folgenden Angaben:

(a) Umkreisradius $r = 1.75$cm, $a = 3$cm und $h_a = 2$cm.

(b) $a = 3$cm, $h_a = 2.5$cm und $s_b = 1.75$cm. *Hinweis: Konstruieren Sie ein Parallelogramm.*

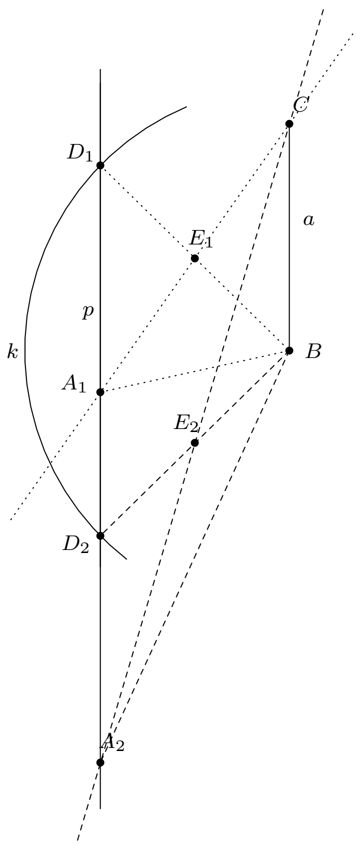
Lösung. Beachten Sie: Grössen stimmen nicht, Proportionen jedoch schon.

(a)



1. Strecke a abtragen $\to$ Punkte B, C
2. Kreis k_1 um B mit Radius r
3. Kreis k_2 um C mit Radius $r \to$ Schnittpunkt M von k_1 und k_2
4. Kreis k_3 um M mit Radius r
5. Parallele p zu a mit Abstand $h_a \to$ Schnittpunkte A_1 und A_2 von k_3 und p.

(b)



1. Strecke a abtragen $\to$ Punkte B, C
2. Parallele p zu a mit Abstand h_a
3. Kreis k um B mit Radius $2s_b \to$ Schnittpunkte $_1, D_2$ von p und k
4. Mittelpunkt E_1 von BD_1
5. Mittelpunkt E_2 von BD_2
6. Schnittpunkt A_1 von p und CE_1
7. Schnittpunkt A_2 von p und CE_2

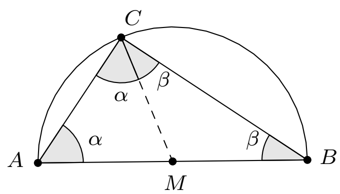
Aufgabe 32 (6 Punkte)**.** Es seien Punkte A, B und M gegeben, sodass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Dreieck, dessen Ecke C auf dem Kreis um M mit Radius $r = \overline{AM}$ liegt, rechtwinklig ist.

(b) Verwenden Sie (a), um den Satz des Pythagoras aus dem Höhensatz zu folgern.

Lösung.

(a)

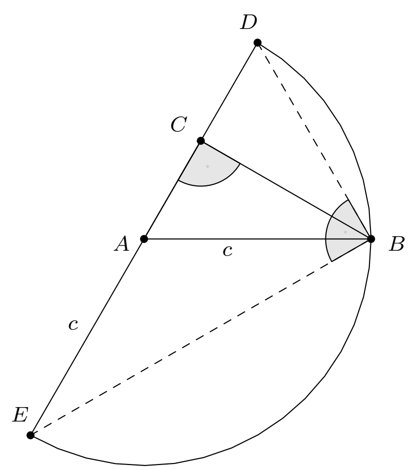


Die Dreiecke ΔAMC und ΔBMC sind gleichschenklig und somit gilt $\measuredangle ACM = \alpha$ und $\measuredangle MCB = \beta$. Daraus folgt

$$2(\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta = 180°$$

und somit $\gamma = \alpha + \beta = 90°$. *Diese Aussage wird auch als Satz von Thales bezeichnet.*

(b)



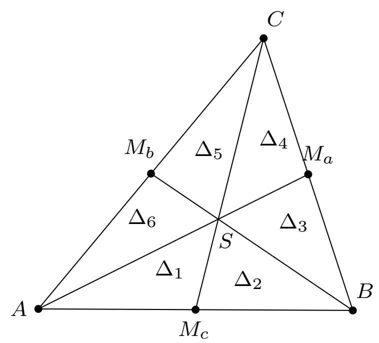
Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse c. Wir machen einen Kreis um A mit Radius c und erhalten die Schnittpunkte D und E des Kreises mit der Gerade AC. Dann folgt aus (a), dass der Winkel $\measuredangle EBD$ ein rechter Winkel ist. Wir wenden den Höhensatz auf das Dreieck ΔDEB an. Es gilt dann

$$a^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} = (c - b)(c + b) = c^2 - b^2,$$

also $c^2 = a^2 + b^2$.

Aufgabe 33 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussage. Ein Dreieck wird durch seine Seitenhalbierenden in sechs kleinere Teildreiecke zerlegt, die untereinander den gleichen Flächeninhalt haben.

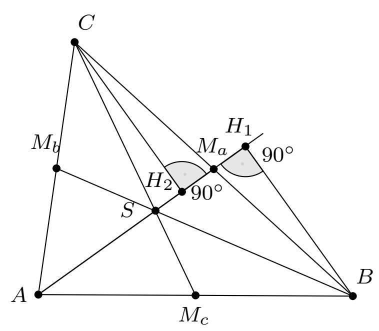
Lösung.



Wir zeigen zunächst, dass ΔABM_a und ΔAM_aC denselben Flächeninhalt besitzen. Dies gilt, weil beide dieselbe Seitenlänge $\overline{BM_a} = \overline{M_aC}$ besitzen und die Höhen zu BM_a resp. M_aC ebenfalls gleich sind. Es gilt also

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6,$$

wobei $\Delta_i, i \in \{1, \ldots, 6\}$, die Flächeninhalte wie oben dargestellt sind. Des Weiteren haben die Dreiecke ΔABS und ΔASC die gleiche Fläche, weil sie dieselbe Seite AS haben und dieselbe Höhe zu AS:



Dies folgt daraus, dass die Dreiecke ΔM_aBH_1 und ΔCH_2M_a kongruent sind (nach dem Kongruenzsatz WSW). Somit erhalten wir auch

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_5 + \Delta_6.$$

Aus der ersten Gleichung können wir somit folgern, dass $\Delta_3 = \Delta_4$. Analog kann man zeigen, dass alle Flächeninhalte gleich sind.

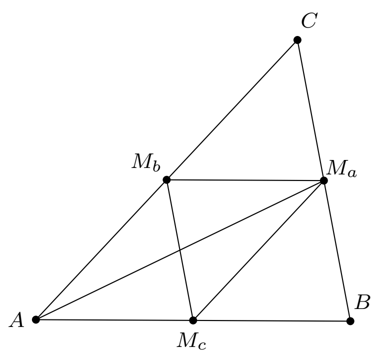
Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Das Mittendreieck eines Dreiecks ΔABC ist das Dreieck, dessen Ecken die Seitenmittelpunkte M_a, M_b und M_c sind.

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt und den Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks. *Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 24.*

(b) Folgern Sie, dass das Dreieck ΔABC und dessen Mittendreieck dieselbe Eulersche Gerade besitzen.

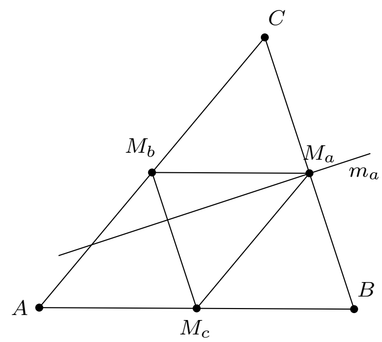
Lösung.

(a) Wir behaupten, dass der Schwerpunkt des Mittendreiecks derselbe ist wie derjenige des Dreiecks ΔABC.



Da $\overline{CM_b} : \overline{CA} = \frac{1}{2} = \overline{CM_a} : \overline{CB}$, folgt aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (Aufgabe 24 (a)), dass M_bM_A und AB parallel sind. Analog erhält man, dass M_cM_a und AC parallel sind. Somit ist $AM_cM_aM_b$ ein Parallelogramm. Aus Aufgabe 27 (c) folgt, dass sich die Diagonalen AM_a und M_bM_c gegenseitig halbieren, d.h. die Seitenhalbierende zu M_bM_c des Mittendreiecks liegt auf der Seitenhalbierenden $S_a = AM_a$. Da dasselbe auch für b und c gilt, stimmen die Schwerpunkte überein.

Wir behaupten, dass der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC ist.



Da M_bM_c und BC parallel sind und m_a senkrecht auf BC steht, steht m_a auch senkrecht auf M_bM_c. Somit liegt die Höhe zu M_bM_c des Mittendreiecks auf m_a. Da dasselbe für die anderen Höhen gilt, ist der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks genau der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von ΔABC, also der Umkreismittelpunkt von ΔABC.

(b) Die Eulersche Gerade des Mittendreiecks ist die eindeutige Gerade durch dessen Schwerpunkt und dessen Höhenschnittpunkt, also die Gerade durch den Schwerpunkt und den Umkreismittelpunkt von ΔABC. Dies ist aber genau die Eulersche Gerade von ΔABC.