Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 8

Aufgabe 27 (8 Punkte)**.** Ein Parallelogramm ist ein Rechteck $ABCD$ mit Seiten a, b, c, d wie unten dargestellt, mit der Eigenschaft, dass a und c sowie b und d parallel sind. Beweisen Sie folgende Aussagen.

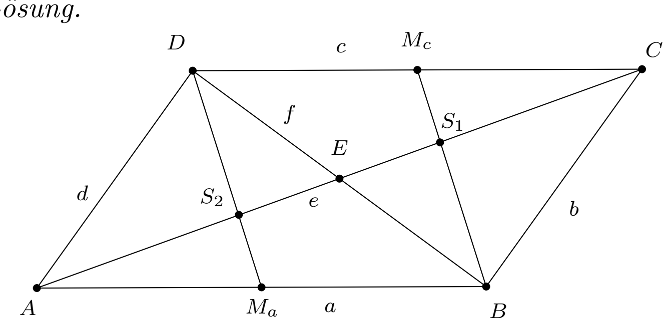
(a) Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $a = c$ und $b = d$.

(b) In einem Parallelogramm drittelt die Verbindungsgerade einer Ecke mit der Mitte einer gegenüberliegenden Seite eine Diagonale.

(c) Eine Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn seine Diagonalen orthogonal sind. *Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.*

(d) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn beide Diagonalen gleich lang sind.

Lösung.



(a) Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Dann sind $\measuredangle BAC$ und $\measuredangle ACD$ sowie $\measuredangle BCA$ und $\measuredangle DAC$ Wechselwinkel und somit gleich. Aus dem Kongruenzsatz WSW folgt dann, dass $a = c$ und $b = d$.

Umgekehrt seien $a = c$ und $b = d$. Aus dem Kongruenzsatz SSS folgt dann, dass die Winkel $\measuredangle BAC$ und $\measuredangle ACD$ gleich sind. Wären a und c nicht parallel, so hätten die Geraden AB und DC einen Schnittpunkt S. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass S links von A liegt. Aber dann gilt

$$\measuredangle ASD = 180^\circ - (\measuredangle SAC + \measuredangle ACD) = 180^\circ - (\measuredangle SAC + \measuredangle BAC) = 0^\circ,$$

ein Widerspruch.

(b) Die Dreiecke ADM_a und BCM_c sind kongruent aufgrund des Kongruenzsatzes SWS und somit gilt $\overline{M_aD} = \overline{M_cB}$. Aus (a) folgt dann, dass M_aBM_cD ein Parallelogramm ist, d.h. M_cB und DM_a sind parallel. Der Strahlensatz impliziert dann

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{M_cC}}{c} = \frac{\overline{S_1C}}{\overline{S_2C}}$$

sowie

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{M_aA}}{a} = \frac{\overline{AS_2}}{\overline{AS_1}}.$$

Ausserdem folgt aus dem Kongruenzsatz WSW, dass die Dreiecke ΔAM_aS_2 und ΔCS_1M_c kongruent sind und daher $\overline{S_1C} = \overline{AS_2}$. Also gilt $\overline{AS_1} = 2\overline{S_1C}$ und die Behauptung ist bewiesen.

(c) Wir zeigen zuerst, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, d.h. $\overline{AE} = \overline{CE} = \frac{e}{2}$ und $\overline{BE} = \overline{DE} = \frac{f}{2}$. Ersteres folgt aus dem Kongruenzsatz WSW, da die Winkel $\measuredangle ABD$ und $\measuredangle BDC$ Wechselwinkel sind. Die zweite Aussage folgt analog.

Wir nehmen zuerst an, dass das Parallelogramm $ABCD$ gleich lange Seiten hat, d.h. $a = b = c = d$. Dann ist das Dreieck ΔABD gleichschenklig und somit $\measuredangle ABD = \measuredangle BDA$. Der Kongruenzsatz SWS impliziert dann, dass die Dreiecke ΔABE und ΔAED kongruent sind. Insbesondere gilt dann $\measuredangle AEB = \measuredangle AED = 90°$.

Umgekehrt seien die Diagonalen e und f orthogonal, d.h. $\measuredangle AEB = \measuredangle AED = 90°$. Dann folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = b^2$$

und somit $a = b$.

(d) Wir nehmen zuerst an, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist. Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass

$$e^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = f^2.$$

Somit gilt $e = f$.

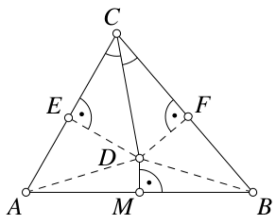
Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $e = f$ gilt. Dann folgt aus dem Kongruenzsatz SSS, dass die Dreiecke ΔABC und ΔBCD kongruent sind. Somit gilt $\beta = \gamma$. Andrerseits gilt aber auch

$$4\beta = 2\beta + 2\gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

und somit sind alle Winkel $90°$.

Aufgabe 28 (2 Punkte)**.** Betrachten Sie folgenden Beweis.

Satz. *Jedes Dreieck ist gleichschenklig.*



Beweis. Im Dreieck ΔABC halbiere CD den Innenwinkel γ und MD sei die Mittelsenkrechte zu AB. Dann sind nach dem Kongruenzsatz WSW die Dreiecke ΔCED und ΔCFD kongruent. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke ΔAMD und ΔBMD ebenfalls kongruent. Wegen $ED = FD, AD = BD$ und $\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90°$, sind auch ΔAED und ΔBFD kongruent. Also it $AE = BF$ und $AC = BC$, d.h. das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig. □

Wo steckt der Fehler?

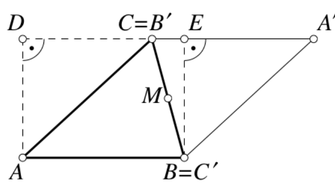
Lösung. Der Schnittpunkt D der Mittelsenkrechten zu AB und der Winkelhalbierenden von γ liegt ausserhalb des Dreiecks.

Aufgabe 29 (6 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie, dass die Fläche eines Dreiecks ΔABC durch folgende Formel berechnet werden kann.

$$F(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(a \cdot h_a) = \frac{1}{2}(b \cdot h_b) = \frac{1}{2}(c \cdot h_c).$$

Spiegeln Sie dazu das Dreieck am Mittelpunkt M der Seite a um 180° wie unten dargestellt.[1]



(b) Folgern Sie, dass der Flächeninhalt berechnet werden kann durch

$$F = \frac{2}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Hinweis: Finden Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit der gleichen Fläche und verwenden Sie (a).

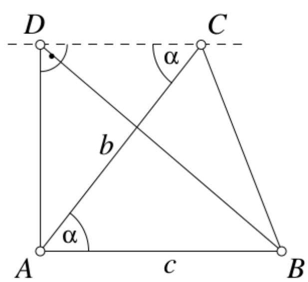
[1]Quelle der Bilder: www.matheraetsel.de/texte/geom_2.5.pdf

Lösung.

(a) Wenn wir das Dreieck ΔABC um M um $180°$ drehen, dann gilt für das Bilddreieck $\Delta A'B'C'$, dass $B' = C$ und $C' = B$. Da die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ kongruent sind, ist dann nach Aufgabe 27 (a) das Viereck $ABA'C$ ein Parallelogramm. Sei D der Schnittpunkt der zu c rechtwinkligen Gerade durch A mit der Gerade CA', und E der Schnittpunkt der cu c rechtwinkligen Gerade durch B mit CA'. Dann sind nach dem Kongruenzsatz WSW die Dreiecke ΔACD und $\Delta BA'E$ kongruent und somit flächengleich. Dann gilt für die Flächen

$$\begin{aligned} 2F(\Delta ABC) &= F(ABA'C) = F(\Delta BA'E) + F(ABEC) = F(ABED) \\ &= c \cdot \overline{BE} = ch_c. \end{aligned}$$

(b)



Wir verwandeln das Dreieck ΔABC in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck ΔABD, indem wir D als den Schnittpunkt der Senkrechten zu AB durch A mit der Parallelen zu AB durch C wählen. Dann gilt $\measuredangle ACD = \alpha$ und somit $\overline{AD} = b \sin \alpha$. Dies ergibt

$$F(\Delta ABC) = F(ABD) = \frac{1}{2} c \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Die anderen Gleichheiten zeigt man analog.

Aufgabe 30 (3 Punkte)**.** Verwenden Sie den Kosinussatz sowie Aufgabe 29 (b) um die *Heron'sche Formel* zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

herzuleiten, wobei $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Lösung. Aus dem Kosinussatz folgt

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\
&= \sqrt{\frac{4b^2c^2-(b^4+2b^2c^2+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+a^4)}{4b^2c^2}} \\
&= \frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{2bc}.
\end{aligned}$$

Nun folgt aus Aufgabe 29 (b)

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}bc\sin\alpha \\
&= \frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{2bc} \\
&= \frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{4}
\end{aligned}$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(-a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a-b+c)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)} \\
&= \frac{\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{(b+c)^2a^2-a^4-(b+c)^2(b-c)^2+a^2(b-c)^2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2-a^4-b^4+2b^2c^2-c^4+a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{4} \\
&= F
\end{aligned}$$

wie gewünscht.